第３２回代数的組合せ論シンポジウム

下記の要領で研究集会を開催しますので、ご案内申し上げます。

世話人：平木彰 (大阪教育大)
川越謙一 (金沢大)
北詰正顕 (千葉大)
大浦学 (金沢大)

記

日程：平成 27 年 6 月 22 日 (月)〜24 日 (水)
場所：22 日, 23 日 金沢市尾山町 10 番 5 号
石川県文教会館 ４０１・４０２（大会議室）
24 日 金沢市西町三番丁 16 番地
金沢大学サテライト・プラザ ３階集会室

6 月 22 日 (月)	10:00-10:40	上岡修平（京都大） 平面分割と直交多項式
	10:50-11:30	入江佑樹（千葉大） 反転ニムゲーム
	11:40-12:20	伊東桂司（東北大） The skew energy of tournaments
	14:00-14:40	田中太初（東北大） A semidefinite programming approach to a cross-intersection problem with measures (joint with N.Tokushige and S.Suda)
	14:50-15:30	冨山正人（石川高専） The Terwilliger algebra of the incidence graph of the hypercube
	15:50-16:30	生田卓也（神戸学院大） A complex Hadamard matrix in an odd orthogonal scheme (joint with A. Munemasa)
	16:40-17:20	宗政昭弘（東北大） Self-orthogonal designs

6月23日(火)	10:00-10:40	M. Farrokhi D. G.（室蘭工大） Self 2-distance graphs with a forbidden structure
	10:50-11:30	小田文仁（近畿大） The units of a partial Burnside ring relative to the Young subgroups of a symmetric group
	11:40-12:20	吉田知行（北星学園大） 有限群とグラフの再構成予想
	14:00-14:40	小関道夫（山形大名誉教授） 3元符号による格子の数論的、組合せ論的考察
	14:50-16:20	谷口浩朗（香川高専） 高次元双対超卵形について
	16:40-17:40	吉荒聡（東京女子大） DHOとの２０年
	懇親会	
6月24日(水)	10:00-10:40	奥田隆幸（広島大） アソシエーションスキームの商集合についてのDelsarte理論
	10:50-11:30	島倉裕樹（東北大） Classification of vertex operator algebras of class $\mathcal{S}^4$ with minimal conformal weight one
	11:40-12:20	田辺顕一朗（北海道大） 頂点代数のintertwining operatorの一般化について

本研究集会は平成２７年度科学研究費
基盤研究（B） 研究代表者：原田昌晃 課題番号15H03633
基盤研究（B） 研究代表者：北詰正顕 課題番号24340002
基盤研究（B） 研究代表者：宮本雅彦 課題番号26287001
基盤研究（C） 研究代表者：大浦学 課題番号25400014
からの援助を受けています。

第３２回代数的組合せ論シンポジウムは、平成２７年６月２２日から２４日にかけて、石川県金沢市において行われました。この年は、３月１４日に北陸新幹線が開通した年でもありました。講演者、参加者、及び関係者の皆様に心より感謝いたします。

平成２８年１月５日

世話人
平木彰（大阪教育大）
川越謙一（金沢大）
北詰正顕（千葉大）
大浦学（金沢大）

目次

上岡修平（京都大）
平面分割と直交多項式 ······1

入江佑樹（千葉大）
反転ニムゲーム ······14

伊東桂司（東北大）
Tournament の skew energy ······18

田中太初（東北大）
A semidefinite programming approach to a cross-intersection problem with measures ······28

冨山正人（石川高専）
The Terwilliger algebra of the incidence graph of the hypercube ······33

生田卓也（神戸学院大）
A complex Hadamard matrix in an odd orthogonal scheme ······40

宗政昭弘（東北大）
Self-orthogonal designs ······50

A. Azimi(Ferdowsi Univ. of Mashhad), M. Farrokhi D. G.（室蘭工大）
Self 2-distance graphs with a forbidden structure ······57

小田文仁（近畿大）、竹ヶ原裕元（室蘭工大）、吉田知行（北星学園大）
The units of a partial Burnside ring relative to the Young subgroups of a symmetric group ······66

吉田知行（北星学園大）、小田文仁（近畿大）、竹ヶ原裕元（室蘭工業大）
グラフと有限群の再構成予想 ······72

小関道夫（山形大名誉教授）
3 元体上の自己双対な極値的符号から構成される自己双対格子の数論的、組合せ論的問題についての考察 ······82

谷口浩朗（香川高専）
On higher dimensional dual hyperovals ······94

吉荒聡（東京女子大）
DHO との２０年–My 20 years working with DHOs ······100

奥田隆幸（広島大）
アソシエーションスキームの商集合についての Delsarte 理論 ······113

島倉裕樹（東北大）
Classification of vertex operator algebras of class $\mathcal{S}^4$ with minimal conformal weight one ······129

田辺顕一朗（北海道大）
頂点代数の intertwining operator の一般化について ······135

平面分割と直交多項式

京都大学大学院情報学研究科　上岡修平
kamioka.shuhei.3w@kyoto-u.ac.jp

1　はじめに

自然数の 2 次元配列

$$\pi = (\pi_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}_{\geq 1}} = \begin{pmatrix} \pi_{1,1} & \pi_{1,2} & \pi_{1,3} & \cdots \\ \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3} & \cdots \\ \pi_{3,1} & \pi_{3,2} & \pi_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \tag{1}$$

($\pi_{i,j} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) で次の 2 条件を満たすものを**平面分割 (plane partition)** という.

(i) $|\pi| = \sum_{i,j=1}^{\infty} \pi_{i,j} < \infty$.

(ii) 任意の $(i,j) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^2$ に対して $\pi_{i,j} \geq \max\{\pi_{i+1,j}, \pi_{i,j+1}\}$.

$|\pi|$ を平面分割 π の**ノルム**という. 本研究では平面分割の**良い (nice)**[1] 和公式を (双) 直交多項式を用いて探す.

整数分割を (2 次元) Young 図形で表すように, 平面分割も **3 次元 Young 図形**で表すと視覚的に分かりやすい. 例えば平面分割

$$\pi = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

(他成分は全て 0) が与えられたとき, 各座標 $(i,j) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^2$ のところに $\pi_{i,j}$ 個の箱を積み上げることにより図 1 のような図形を得る. これが平面分割 (2) を視覚化した 3 次元 Young 図形である. なお図 1 には積み上げられた箱の他に 2 つの壁面と床面が描いてある. これにより平面分割を六角形領域の**菱形タイリング (rhombus tiling, lozenge tiling)** と同一視することもできる.

3 次元 Young 図形の底面が $r \times c$ の長方形に収まる平面分割, すなわち $\pi_{r+i,j} = \pi_{i,c+j} = 0$ $(i,j \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ をみたす平面分割の全体を $\mathcal{P}(r,c)$ と書く. さらにそのような平面分割の中で 3 次元 Young 図形の高さが n 以下のもの, すなわち $\pi_{1,1} \leq n$ を満たすものの全体を $\mathcal{P}(r,c,n)$ と書く. 例えば平面分割 (2) は $r \geq 4, c \geq 5, n \geq 3$ のと

[1] ここでは (3)–(6) のような「$\sum = \prod$」型の等式を**良い (nice)** 和公式と言う [9].

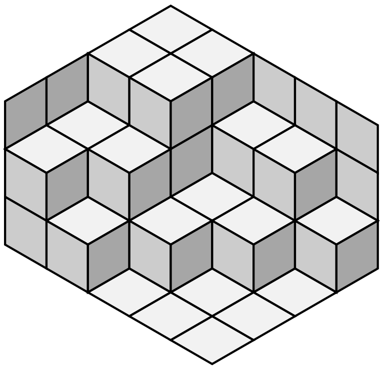


図 1: 平面分割 (2) に対応する 3 次元 Young 図形.

き $\mathcal{P}(r,c)$ とその部分集合である $\mathcal{P}(r,c,n)$ に属する. $\mathcal{P}(r,c)$ が無限集合であるのに対し $\mathcal{P}(r,c,n)$ は有限集合である. 実際 $\mathcal{P}(r,c,n)$ は 3 次元 Young 図形が $r \times c \times n$ の直方体に収まる平面分割の全体であり, そのような平面分割は高々有限個しかない.

平面分割の良い和公式として最も基本的なものは MacMahon の**ノルム母関数**

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(r,c)} q^{|\pi|} = \prod_{i=0}^{r-1} \prod_{j=0}^{c-1} (1 - q^{i+j+1})^{-1}, \tag{3a}$$

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(r,c,n)} q^{|\pi|} = \prod_{i=0}^{r-1} \prod_{j=0}^{c-1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - q^{i+j+2}}{1 - q^{i+j+1}} \tag{3b}$$

である [10, Section IX]. ノルム母関数 (3a) は同 (3b) から $n \to \infty$ の極限により得られる. その意味で (3b) は (3a) をより精密化したものである. MacMahon の発見から随分の時間を経て Stanley は**ノルム・トレース母関数**

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(r,c)} q^{|\pi|} a^{\mathrm{tr}(\pi)} = \prod_{i=0}^{r-1} \prod_{j=0}^{c-1} (1 - aq^{i+j+1})^{-1} \tag{4}$$

を見つけた [12, 13]. ただし $\mathrm{tr}(\pi)$ は平面分割 π のトレース, すなわち主対角成分の総和である. それから暫くして Gansner は Stanley の結果を**トレース母関数**

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(r,c)} \prod_{-r<\ell<c} q_\ell^{\mathrm{tr}_\ell(\pi)} = \prod_{i=0}^{r-1} \prod_{j=0}^{c-1} \left(1 - \prod_{\ell=-i}^{j} q_\ell\right)^{-1} \tag{5}$$

に拡張した [3, 4]. ただし $\mathrm{tr}_\ell(\pi)$ ($\ell \in \mathbb{Z}$) は平面分割 π の ℓ **トレース**と呼ばれ

$$\mathrm{tr}_\ell(\pi) = \sum_{j-i=\ell} \pi_{i,j} \tag{6}$$

により定義される. 特に 0 トレースは通常のトレースに一致する.

Stanley のノルム・トレース母関数 (4) および Gansner のトレース母関数 (5) は $\mathcal{P}(r,c)$ に対する MacMahon のノルム母関数 (3a) の一般化である. 実際, 変数の特殊化 $q_0 = aq, q_\ell = q$ ($\ell \neq 0$) により (5) は (4) に帰着する. さらにトレースを無視する ($a = 1$) ことにより (4) は (3a) に帰着する. ここで素朴に次の疑問が生じる. 同様の良い和公式で $\mathcal{P}(r,c,n)$ に対する MacMahon のノルム母関数 (3b) を一般化するものはあるだろうか. この疑問に対するナイーブな答えは否である. 実際 (4) および (5) の右辺の $\mathcal{P}(r,c)$ を単純に $\mathcal{P}(r,c,n)$ に取り替えたものは (3b) のように因数分解されない.

本稿では $\mathcal{P}(r,c)$ に対する 2 つのトレース型母関数 (4) および (5) に着目し, それを精密化するような $\mathcal{P}(r,c,n)$ に対する平面分割の良い和公式を求める. すなわち MacMahon のノルム母関数 (3) において (3b) にあたるものを求める. そのために双直交多項式とその組合せ論的解釈を利用する. 以降の議論では紙数の都合上, 証明等の詳細は省略されている場合が多い. 興味ある読者は [7] を参照してほしい.

2 双直交多項式と格子路

$\mathbb{K}$ を体とし, 2 変数 x,y の多項式環の上で定義された線形汎関数 $\mathcal{F} : \mathbb{K}[x,y] \to \mathbb{K}$ を考える. x,y の単項式に対する $\mathcal{F}$ の値を**モーメント**といい

$$f_{i,j} = \mathcal{F}[x^i y^j] \qquad (i,j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{7}$$

と書く. 線形性よりモーメントを決めることにより $\mathcal{F}$ は一意に定まる. モーメントの行列式

$$\Delta_n^{(r,c)} = \det_{0\leq i,j<n} (f_{r+i,c+j}) = \begin{vmatrix} f_{r,c} & \cdots & f_{r,c+j} & \cdots & f_{r,c+n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{r+i,c} & \cdots & f_{r+i,c+j} & \cdots & f_{r+i,c+n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{r+n-1,c} & \cdots & f_{r+n-1,c+j} & \cdots & f_{r+n-1,c+n-1} \end{vmatrix} \tag{8}$$

は任意の $(r,c,n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ に対して非零と仮定する. ただし $\Delta_0^{(r,c)} = 1$ である.

線形汎関数 $\mathcal{F}$ に対する (モニックな) **双直交多項式** $P_n^{(r,c)}(x) \in \mathbb{K}[x]$ を次の 2 条件を満たすものとして定義する.

(i) $P_n^{(r,c)}(x)$ の先頭項は x^n である.

(ii) 非零定数 $h_n^{(r,c)}$ が存在して直交関係式

$$\mathcal{F}[x^r y^{c+j} P_n^{(r,c)}(x)] = h_n^{(r,c)} \delta_{n,j} \qquad (0 \leq j \leq n) \tag{9}$$

が成り立つ. ただし $\delta_{n,j}$ は Kronecker のデルタである.

直交関係式 (9) の非零定数 $h_n^{(r,c)}$ は規格化定数と呼ばれる．

双直交多項式 $P_n^{(r,c)}(x)$ の明示式は

$$P_n^{(r,c)}(x) = \begin{vmatrix} f_{r,c} & \cdots & f_{r,c+j} & \cdots & f_{r,c+n-1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{r+i,c} & \cdots & f_{r+i,c+j} & \cdots & f_{r+i,c+n-1} & x^i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{r+n,c} & \cdots & f_{r+n,c+j} & \cdots & f_{r+n,c+n-1} & x^n \end{vmatrix} \times (\Delta_n^{(r,c)})^{-1} \tag{10}$$

である．これから規格化定数 $h_n^{(r,c)}$ の行列式表示

$$h_n^{(r,c)} = \frac{\Delta_{n+1}^{(r,c)}}{\Delta_n^{(r,c)}} \tag{11}$$

が得られる．なお変数 x と y の役割を入れ替えた双直交多項式

$$Q_n^{(r,c)}(y) = \begin{vmatrix} f_{r,c} & \cdots & f_{r,c+j} & \cdots & f_{r,c+n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{r+i,c} & \cdots & f_{r+i,c+j} & \cdots & f_{r+i,c+n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{r+n-1,c} & \cdots & f_{r+n-1,c+j} & \cdots & f_{r+n-1,c+n} \\ 1 & \cdots & y^j & \cdots & y^n \end{vmatrix} \times (\Delta_n^{(r,c)})^{-1} \tag{12}$$

も考えられる．$P_n^{(r,c)}(x)$ と $Q_n^{(r,c)}(y)$ は双直交関係式

$$\mathcal{F}[x^r y^c P_m^{(r,c)}(x) Q_n^{(r,c)}(x)] = h_n^{(r,c)} \delta_{m,n} \qquad (m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{13}$$

を満たす．これが「双直交」という名前の由来である．$P_n^{(r,c)}(x)$ と $Q_n^{(r,c)}(y)$ は本質的に同じものなので以下では $P_n^{(r,c)}(x)$ のみを扱う．

双直交多項式 $P_n^{(r,c)}(x)$ は局所的な隣接関係式を満たす．

命題 1 ([11] 等). 双直交多項式 $P_n^{(r,c)}(x)$ は隣接関係式

$$xP_n^{(r+1,c)}(x) = P_{n+1}^{(r,c)}(x) + a_n^{(r,c)} P_n^{(r,c)}(x), \tag{14a}$$

$$P_n^{(r,c)}(x) = P_n^{(r,c+1)}(x) + b_n^{(r,c)} P_{n-1}^{(r,c+1)}(x) \tag{14b}$$

($(r, c, n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$) を満たす．ただし $P_{-1}^{(r,c)}(x) \equiv 0$ であり係数 $a_n^{(r,c)}$, $b_n^{(r,c)}$ は

$$a_n^{(r,c)} = \frac{h_n^{(r+1,c)}}{h_n^{(r,c)}} = \frac{\Delta_{n+1}^{(r+1,c)} \Delta_n^{(r,c)}}{\Delta_n^{(r+1,c)} \Delta_{n+1}^{(r,c)}}, \tag{15a}$$

$$b_n^{(r,c)} = \frac{h_n^{(r,c)}}{h_{n-1}^{(r,c+1)}} = \frac{\Delta_{n+1}^{(r,c)} \Delta_{n-1}^{(r,c+1)}}{\Delta_n^{(r,c)} \Delta_n^{(r,c+1)}} \tag{15b}$$

により定まる非零定数である．

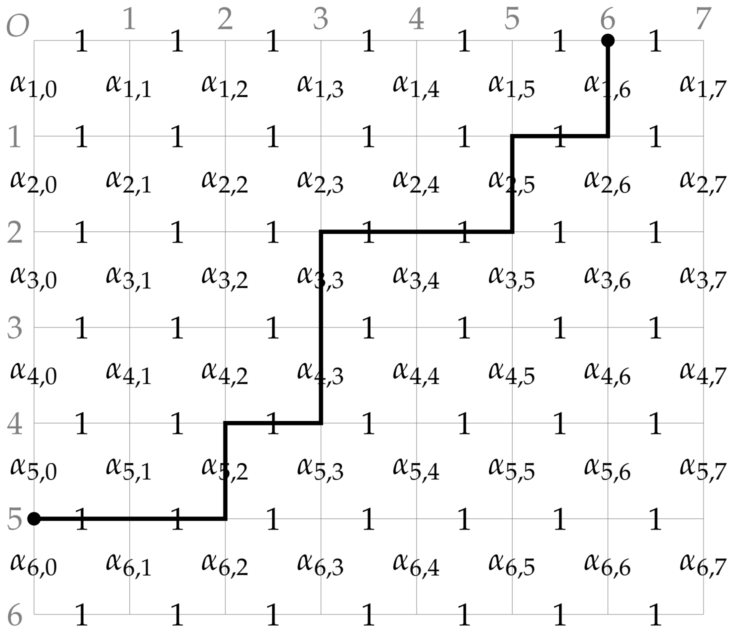


図 2: 辺にラベルの付いた正方格子と $(5,0)$ から $(0,6)$ への格子路.

ここで考えている双直交多項式の概念は, 変数 x と y を同一視する $(x=y)$ とき通常の (自己直交的な) 直交多項式に帰着する. 例えば [14] や [2] で議論されているものはそれにあたる. 通常の直交多項式に対する組合せ論的解釈として Viennot による Motzkin 路や Dyck 路による解釈 [15, 16] がある. Viennot のアイディアは直交多項式の満たす隣接関係式 (3 項間漸化式) からモーメントの組合せ論的な表示を得る点にある. このアイディアを隣接関係式 (14) を満たす双直交多項式 $P_n^{(r,c)}(x)$ に借用する.

図 2 のような辺にラベルの付いた正方格子を考える. この正方格子は $\mathbb{Z}^2$ の第 1 象限 $\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ を行列流の座標で描いたものである. すなわち各格子点は $(i,j) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ の形で表され, (i,j) の下および右に隣接する格子点はそれぞれ $(i+1,j)$ および $(i,j+1)$ である. また下端点を $(i,j) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ に持つ縦辺のラベルは $\alpha_{i,j}$ であり, 横辺のラベルは全て 1 である.

この正方格子の上で格子路を考える. 任意の格子点 $(i,j),(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ に対して **(i,j) から (k,ℓ) への格子路**と言うときには (i,j) と (k,ℓ) を結ぶ $\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ 上の最短路を意味する. ただし $(i,j)=(k,\ell)$ のときは便宜的に長さ 0 の**空路 (empty path)** を考える. 格子路 P の**重み**は P の通る全ての辺のラベルの積であり $w(P)$ と書く. ただし任意の空路の重みは 1 とする. 図 2 にあるのは $(5,0)$ から $(0,6)$ への格子路の 1 つであり, この格子路の重みは $w(P)=\alpha_{1,6}\alpha_{2,5}\alpha_{3,3}\alpha_{4,3}\alpha_{5,2}$ である.

双直交多項式のモーメントは次の組合せ論的解釈を持つ.

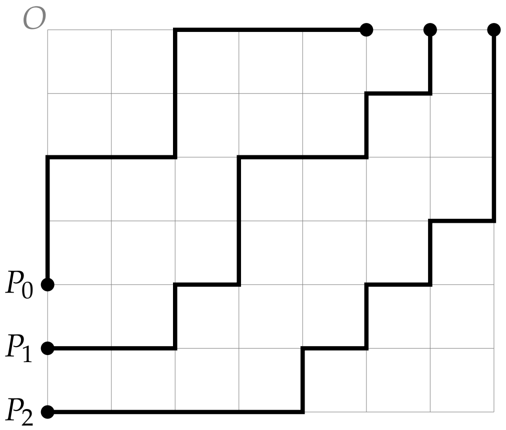


図 3: 非交叉格子路の組 $(P_0, P_1, P_2) \in \mathcal{LP}(4,5,3)$.

定理 2. 正方格子の縦辺のラベル $\alpha_{i,j}$ を隣接関係式 (14) の係数 $a_n^{(r,c)}$, $b_n^{(r,c)}$ を用いて

$$\alpha_{i,j} = a_j^{(i-j-1,0)} \qquad (i > j), \tag{16a}$$

$$= b_i^{(0,j-i)} \qquad (i \le j) \tag{16b}$$

により定める. このときモーメント $f_{i,j}$ は

$$\frac{f_{r,c}}{f_{0,c}} = \sum_P w(P) \qquad (r, c \in \mathbb{Z}_{\ge 0}) \tag{17}$$

を満たす. ただし右辺の和において P は $(r,0)$ から $(0,c)$ への格子路全てを動く.

定理 2 より, モーメントの行列式 $\Delta_n^{(r,c)}$ に対する Gessel–Viennot 流 [5, 1] の解釈が可能になる. 自然数の 3 つ組 (r,c,n) に対して, 格子路の n 本組 $(P_0, \ldots, P_{n-1})$ で次の 2 条件を満たすものの全体を $\mathcal{LP}(r,c,n)$ と書く.

(i) P_k は $(r+k, 0)$ から $(0, c+k)$ への格子路である.

(ii) $P_0, \ldots, P_{n-1}$ は**非交叉的 (non-intersecting)** である. すなわちどの相異なる 2 本も同じ点を通らない.

図 3 にそのような $(P_0, \ldots, P_{n-1})$ の例を示す.

系 3. 定理 2 と同じラベルの下で

$$\frac{\Delta_n^{(r,c)}}{\prod_{k=0}^{n-1} f_{0,c+k}} = \sum_{(P_0,\ldots,P_{n-1}) \in \mathcal{LP}(r,c,n)} \prod_{k=0}^{n-1} w(P_k) \qquad (r,c,n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}). \tag{18}$$

3 little q-Laguerre 多項式

前節の一般論を古典直交多項式の 1 つである **little q-Laguerre 多項式**

$$L_n(x;a;q) = (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} (aq;q)_n \times {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-n}, 0 \\ aq \end{matrix}; q, qx\right) \qquad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{19}$$

に適用する. ただし q 解析の記法は標準的なものである.

- q-Pochhammer 記号

$$(a;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - aq^k). \tag{20}$$

- q-超幾何級数

$${}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; q, x\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a;q)_i (b;q)_i}{(c;q)_i (q;q)_i} x^i. \tag{21}$$

 ただし $a = q^{-n}$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) のときは x に関して高々n 次の多項式になる.

q 解析や little q-Laguerre 多項式については例えば [6] や [8] が詳しい.
ここで必要な little q-Laguerre 多項式の性質を以下にまとめる.

- 係数体 $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q, a)$.
- 線形汎関数 $\mathcal{F} : \mathbb{K}[x, y] \to \mathbb{K}$ のモーメント

$$f_{i,j} = \mathcal{F}[x^i y^j] = (aq^{j+1};q)_i. \tag{22}$$

- 双直交多項式

$$P_n^{(r,c)}(x) = L_n(x; aq^{r+c}; q). \tag{23}$$

- 直交関係式 (9) の規格化定数

$$h_n^{(r,c)} = f_{r,c+n} \times a^n q^{n(r+c+n)} (q;q)_n. \tag{24}$$

- 隣接関係式 (14) の係数

$$a_n^{(r,c)} = q^n(1 - aq^{r+c+n+1}), \tag{25a}$$
$$b_n^{(r,c)} = aq^{r+c+n}(1 - q^n). \tag{25b}$$

定理 2 のように正方格子の縦辺のラベル $\alpha_{i,j}$ を定める. 今の場合 (25) より

$$\begin{aligned}\alpha_{i,j} &= q^j(1-aq^i) && (i>j), && \text{(26a)}\\ &= aq^j(1-q^i) && (i\le j) && \text{(26b)}\end{aligned}$$

である. このラベルの下で格子路の重み $w(P)$ を考える. P を $(r,0)$ から $(0,c)$ への格子路とする. P と正方格子の境界の囲む領域は (2 次元) Young 図形と思うことができる. これを $\lambda(P)$ と書く. Young 図形 λ の箱の総数を $|\lambda|$ と書く. また主対角にある箱の数 (すなわち Durfee square の大きさ) を $\mathsf{D}(\lambda)$ と書く. このとき (26) より P の重みは

$$\frac{w(P)}{(aq;q)_r} = q^{|\lambda(P)|}a^{\mathsf{D}(\lambda(P))}\omega(P;a;q), \tag{27a}$$

$$\omega(P;a;q) = \frac{(q;q)_{\mathsf{D}(\lambda(P))}}{(aq;q)_{\mathsf{D}(\lambda(P))}} \tag{27b}$$

を満たす. 従って系 3 は

$$\frac{\Delta_n^{(r,c)}}{\prod_{k=0}^{n-1}(aq;q)_{r+k}} = \sum_{(P_0,\dots,P_{n-1})\in\mathcal{LP}(r,c,n)} q^{\sum_{k=0}^{n-1}|\lambda(P_k)|}a^{\sum_{k=0}^{n-1}\mathsf{D}(\lambda(P_k))}\prod_{k=0}^{n-1}\omega(P_k;a;q) \tag{28}$$

を導く.

実は非交叉格子路に関する和公式 (28) は平面分割の言葉に翻訳することができる. (28) から平面分割の良い和公式を得るために次の 2 つを実行する.

(a) $\mathcal{P}(r,c,n)$ と $\mathcal{LP}(r,c,n)$ の間の全単射を用いて (28) を平面分割の言葉に書き換える.

(b) 双直交多項式を用いてモーメントの行列式 $\Delta_n^{(r,c)}$ の値を計算する.

(a) 全単射による書き換え　古典的な事実として, 平面分割の集合 $\mathcal{P}(r,c,n)$ と非交叉格子路の組の集合 $\mathcal{LP}(r,c,n)$ の間には簡単な全単射が存在する. 全単射では平面分割 $\pi\in\mathcal{P}(r,c,n)$ の 3 次元 Young 図形から非交叉格子路の組 $(P_0,\dots,P_{n-1})\in\mathcal{LP}(r,c,n)$ を次のように構成する.

平面分割 π の 3 次元 Young 図形を高さ k $(1\le k\le n)$ のところで切った断面は (2 次元) Young 図形になる. この断面の Young 図形を $\lambda_k(\pi)$ と書く. 例えば (2) の平面分割を $\mathcal{P}(4,5,3)$ の元と見るとき, その 3 次元 Young 図形 (図 1) からは図 4 に示す 3 つの断面を得る. 各断面 $\lambda_k(\pi)$ のジグザグの縁部分を格子路と見なすとき, n 個の断面は $\mathcal{LP}(r,c,n)$ に属する n 本の非交叉格子路の組を与える. もう少し正確に言うと $\lambda_{n-k}(\pi)$ のジグザグの縁部分を $(r+k,k)$ から $(k,c+k)$ への格子路として描くとき n 本の格子路は非交叉的になる. さらに各 $0\le k<n$ について $(r+k,0)$ と

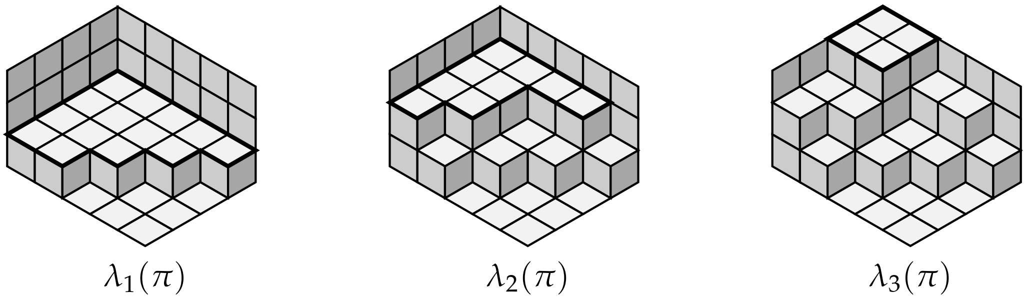


図 4: 3 次元 Young 図形の断面のつくる (2 次元) Young 図形 $\lambda_k(\pi)$.

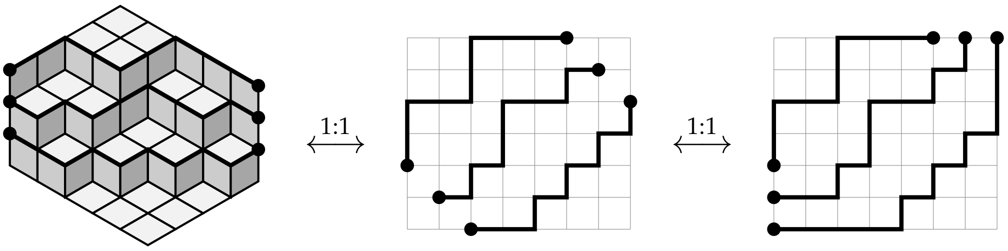


図 5: 平面分割の集合 $\mathcal{P}(r,c,n)$ と非交叉格子路の組の集合 $\mathcal{LP}(r,c,n)$ の間の全単射.

$(r+k,k)$ を結ぶ横線と $(0,c+k)$ と $(k,c+k)$ を結ぶ縦線を描き足すと $\mathcal{LP}(r,c,n)$ に属する非交叉格子路の組になる. この手続きの例を図 5 に示す. この手続きは明らかに可逆であり, また描き足した横線と縦線は $\mathcal{LP}(r,c,n)$ に属する全ての非交叉格子路の組に含まれるので, $\mathcal{P}(r,c,n)$ から $\mathcal{LP}(r,c,n)$ への全単射になっている.

この全単射を用いて (28) を平面分割の言葉に書き換える. 平面分割 $\pi \in \mathcal{P}(r,c,n)$ と非交叉格子路の組 $(P_0,\ldots,P_{n-1}) \in \mathcal{LP}(r,c,n)$ が全単射により互いに対応するとき, 全単射の作り方から

$$|\lambda(P_k)| = |\lambda_{n-k}(\pi)| + k(r+c+k), \tag{29a}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\lambda(P_k)| = |\pi| + \frac{n(n-1)(3r+3c+2n-1)}{6}, \tag{29b}$$

$$\mathsf{D}(\lambda(P_k)) = \mathsf{D}(\lambda_{n-k}(\pi)) + k, \tag{29c}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathsf{D}(\lambda(P_k)) = \mathsf{tr}(\pi) + \frac{n(n-1)}{2} \tag{29d}$$

が成り立つ. 従って (28) は

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(r,c,n)} q^{|\pi|} a^{\mathsf{tr}(\pi)} \omega_n(\pi) = \frac{\Delta_n^{(r,c)}}{q^{\frac{n(n-1)(3r+3c+2n-1)}{6}} a^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} (aq^{k+1};q)_r (q;q)_k} \tag{30}$$

と等価である. ただし

$$\omega_n(\pi) = \prod_{k=1}^{\pi_{1,1}} \frac{(q^{n-k+1};q)_{\mathsf{D}(\lambda_k(\pi))}}{(aq^{n-k+1};q)_{\mathsf{D}(\lambda_k(\pi))}} \tag{31}$$

である.

(b) モーメントの行列式の計算　モーメントの行列式 $\Delta_n^{(r,c)}$ の計算は双直交多項式を用いれば簡単である. 規格化定数 $h_n^{(r,c)}$ の行列式表示 (18) より一般の双直交多項式に関して

$$\Delta_n^{(r,c)} = \prod_{k=0}^{n-1} h_k^{(r,c)} \tag{32}$$

が成り立つ. これに little q-Laguerre 多項式の規格化定数 (24) をそのまま代入すれば, 今必要な $\Delta_n^{(r,c)}$ の値が厳密に求まる. 結果として平面分割に関する次の良い和公式を得る.

定理 4. 任意の $(r,c,n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ に対して

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(r,c,n)} q^{|\pi|} a^{\mathrm{tr}(\pi)} \omega_n(\pi) = \prod_{i=0}^{r-1}\prod_{j=0}^{c-1}\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1-aq^{i+j+k+2}}{1-aq^{i+j+k+1}}, \tag{33a}$$

$$\omega_n(\pi) = \prod_{k=1}^{\pi_{1,1}} \frac{(q^{n-k+1};q)_{\mathsf{D}(\lambda_k(\pi))}}{(aq^{n-k+1};q)_{\mathsf{D}(\lambda_k(\pi))}} \tag{33b}$$

が成り立つ.

ここで求めた和公式 (33) は $\mathcal{P}(r,c)$ に対する Stanley のノルム･トレース母関数 (4) の良い精密化である. 実際 (33b) より q に関する形式的冪級数として $\lim_{n\to\infty} \omega_n(\pi) \equiv 1$ が成り立つ. 従って (33a) の左辺の和は $n \to \infty$ の極限において (4) の右辺の和に一致する. 和公式 (33) は $\mathcal{P}(r,c,n)$ に対する MacMahon のノルム母関数 (3b) の良い一般化でもある. これは $\omega_n(\pi)|_{a=1} \equiv 1$ から明らかだろう.

4　一般化 little q-Laguerre 多項式

前節の議論を一般化すると $\mathcal{P}(r,c)$ に対する Gansner のトレース母関数 (5) の良い精密化が得られる. まず記号と記法を準備する. $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3, \dots)$, $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3, \dots)$ に対して

$$\boldsymbol{p}_m = (p_{m+1}, p_{m+2}, p_{m+3}, \dots), \tag{34a}$$

$$\boldsymbol{q}_m = (q_{m+1}, q_{m+2}, q_{m+3}, \dots) \tag{34b}$$

$(m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ と書く. また任意の $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ に対して添字上昇冪

$$\boldsymbol{x}^{\overline{n}} = \prod_{k=1}^{n} x_k \tag{35}$$

を考える. 特に $\boldsymbol{p}_m^{\overline{n}} = \prod_{k=1}^{n} p_{m+k}$, $\boldsymbol{q}_m^{\overline{n}} = \prod_{k=1}^{n} q_{m+k}$ である.

一般化 little q-Laguerre 多項式を

$$\mathcal{L}_n(x; a; \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_{i=0}^{n} x^i \left(\prod_{k=i}^{n-1} \boldsymbol{p}^{\overline{k}} \right) \sum_{i \geq \nu_i \geq \cdots \geq \nu_{n-1} \geq 0} \prod_{k=i}^{n-1} \left(a\boldsymbol{q}^{\overline{k-\nu_k}} - \frac{1}{\boldsymbol{p}^{\overline{\nu_k}}} \right) \tag{36}$$

$(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ により定義する. 一般化 little q-Laguerre 多項式は文字通り little q-Laguerre 多項式の一般化であり

$$\mathcal{L}_n(x; a; \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})|_{\substack{p_1=p_2=p_3=\cdots=q \\ q_1=q_2=q_3=\cdots=q}} = L_n(x; aq^{-1}; q) \tag{37}$$

が成り立つ.

一般化 little q-Laguerre 多項式は以下の性質を持つ.

- 係数体 $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, a)$.
- 線形汎関数 $\mathcal{F} : \mathbb{K}[x, y] \to \mathbb{K}$ のモーメント

$$f_{i,j} = \mathcal{F}[x^i y^j] = \prod_{k=0}^{i-1} (1 - a\boldsymbol{p}^{\overline{k}} \boldsymbol{q}^{\overline{j}}). \tag{38}$$

- 双直交多項式

$$P_n^{(r,c)}(x) = \mathcal{L}_n(x; a\boldsymbol{p}^{\overline{r}} \boldsymbol{q}^{\overline{c}}; \boldsymbol{p}_r, \boldsymbol{q}_c). \tag{39}$$

- 直交関係式 (9) の規格化定数

$$h_n^{(r,c)} = f_{r,c+n} \times a^n \prod_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{p}^{\overline{r+k}} (\boldsymbol{q}^{\overline{c+k}} - \boldsymbol{q}^{\overline{c+n}}). \tag{40}$$

- 隣接関係式 (14) の係数

$$a_n^{(r,c)} = \boldsymbol{p}_r^{\overline{n}} (1 - a\boldsymbol{p}^{\overline{r}} \boldsymbol{q}^{\overline{c+n}}), \tag{41a}$$
$$b_n^{(r,c)} = a\boldsymbol{p}^{\overline{r+n-1}} \boldsymbol{q}^{\overline{c}} (1 - \boldsymbol{q}_c^{\overline{n}}). \tag{41b}$$

前節と同様の手法により平面分割に関する次の良い和公式を得る.

定理 5. 任意の $(r,c,n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ に対して

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(r,c,n)} a^{\mathsf{tr}_0(\pi)} \left(\prod_{i=1}^{r-1} p_i^{\mathsf{tr}_{-i}(\pi)} \right) \left(\prod_{j=1}^{c-1} q_j^{\mathsf{tr}_j(\pi)} \right) \omega_{r,n}(\pi) = \prod_{i=0}^{r-1} \prod_{j=0}^{c-1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - a\boldsymbol{p}^{\overline{i}} \boldsymbol{q}^{\overline{j+k+1}}}{1 - a\boldsymbol{p}^{\overline{i}} \boldsymbol{q}^{\overline{j+k}}} \tag{42a}$$

が成り立つ. ただし

$$\omega_{r,n}(\pi) = \prod_{k=1}^{\pi_{1,1}} \left\{ \prod_{i=1}^{D_k} (1 - \boldsymbol{q}_{\lambda_{k,i}(\pi)-i}^{\overline{n-k+i}}) \right\} \left\{ \prod_{i=D_k+1}^{r} (1 - a\boldsymbol{p}^{\overline{i-\lambda_{k,i}(\pi)-1}} \boldsymbol{q}^{\overline{n-k+\lambda_{k,i}(\pi)}}) \right\} \times \left\{ \prod_{i=1}^{r} (1 - a\boldsymbol{p}^{\overline{i-1}} \boldsymbol{q}^{\overline{n-k}}) \right\}^{-1} \tag{42b}$$

である. ここで $D_k = \mathsf{D}(\lambda_k(\pi))$ であり, また $\lambda_{k,i}(\pi)$ は Young 図形 $\lambda_k(\pi)$ の第 i 行にある箱の個数を表す.

和公式 (42) は $\mathcal{P}(r,c)$ に対する Gansner のトレース母関数 (6) の良い精密化である. 実際 (42b) より $q_1, q_2, q_3, \ldots$ に関する形式的冪級数として $\lim_{n\to\infty} \omega_{n,r}(\pi) \equiv 1$ が成り立つ. 従って $a = q_0$, $p_\ell = q_{-\ell}$ ($\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) と読み替えれば (42a) の左辺の和は $n \to \infty$ の極限において (6) の右辺の和に一致する. 和公式 (42) は前節で求めた良い和公式 (33) の一般化でもある. (42) から (33) を得るには $a \leftarrow aq$, $p_\ell = q_\ell = q$ ($\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) というように変数を特殊化すればよい.

参考文献

[1] M. Aigner and G. M. Ziegler, Proofs from The Book, fifth ed., Springer-Verlag, Berlin, 2014.

[2] T. S. Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomials, Mathematics and its Applications, vol. 13, Gordon and Breach Science Publishers, New York–London–Paris, 1978.

[3] E. R. Gansner, *The enumeration of plane partitions via the Burge correspondence*, Illinois J. Math. **25** (1981), 533–554.

[4] E. R. Gansner, *The Hillman–Grassl correspondence and the enumeration of reverse plane partitions*, J. Combin. Theory Ser. A **30** (1981), 71–89.

[5] I. Gessel and G. Viennot, *Binomial determinants, paths, and hook length formulae*, Adv. in Math. **58** (1985), 300–321.

[6] M. E. H. Ismail, Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 98, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[7] S. Kamioka, *Plane partitions with bounded size of parts and biorthogonal polynomials*, arXiv:1508.01674 (math.CO).

[8] R. Koekoek, P. A. Lesky and R. F. Swarttouw, Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q-Analogues, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[9] C. Krattenthaler, *Advanced determinant calculus*, Sém. Lothar. Combin. **42** (1999), Art. B42q.

[10] P. A. MacMahon, Combinatory Analysis, vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1916.

[11] 前田一貴, 三木啓司, 辻本諭, 直交多項式理論からみえてくる可積分系, 日本応用数理学会論文誌 **23** (2013), 341–380.

[12] R. P. Stanley, *Theory and application of plane partitions, I, II*, Studies in Appl. Math. **50** (1971), 167–188, 259–279.

[13] R. P. Stanley, *The conjugate trace and trace of a plane partition*, J. Combinatorial Theory Ser. A **14** (1973), 53–65.

[14] G. Szegő, Orthogonal Polynomials, fourth ed., American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 23, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975.

[15] G. Viennot, *Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux*, Université du Québec à Montréal, 1983.

[16] G. Viennot, *A combinatorial theory for general orthogonal polynomials with extensions and applications*, Orthogonal Polynomials and Applications (Bar-le-Duc, 1984), Lecture Notes in Math., vol. 1171, Springer, Berlin, 1985, pp. 139–157.

反転ニムゲーム

入江 佑樹 （千葉大学理学研究科）

ゲームに飽和という概念を導入し, 反転ニムという新しいゲームを飽和させた, 飽和反転ニムのエネルギー公式と飽和次数を得た.

1 はじめに

本稿では 2 人対戦不偏ゲーム（以下, ゲーム）を扱う.

ゲームにおいて, 1 番の問題は「どのようにすれば勝てるか」である. いいかえると, 必勝形を特定することが問題である.

必勝形かどうかは, エネルギー (Sprague-Grundy 数) というものによって判断できる. 必勝形であることと, エネルギーが 0 であることは同値である.

ここで, エネルギーの定義は再帰的である. そのため, 膨大な計算が必要になることが多い.

ところが, 一部の特別なゲームについてはエネルギー公式があり, ただちにエネルギーが求まる. 全ての場合に対して, エネルギー公式が与えられているゲームの例は少ない. 代表的なものに「ニム」や「マヤ」と呼ばれるゲームがある.

本研究の目的は, これらのようなエネルギー公式を持つゲームを構成することである.

本稿では, 反転ニムという新しいゲームを考え, さらに, 飽和という概念を導入することで, 飽和反転ニムのエネルギー公式を得た結果を紹介する.

本稿の概要をのべる. 2 節では, ゲーム理論を紹介する. 3 節では, 反転ニムと飽和を定義し, 反転ニムのエネルギー公式と飽和次数を与える. 反転ニムは, ニムのゲーム木の矢印を反転（向きを全て逆にする）後, ニムの必勝形がふたたび必勝形になるように局面を制限したゲームである. 飽和は, 条件つきで d 山から石を取ることを許したときに, ある d_0 (飽和次数) から先はエネルギーが変わらない状態をあらわす.

2 ゲーム

ニムという 2 人対戦ゲームを紹介する. ゲーム前に, 石の山を複数個用意する. ゲームのルールをのべよう. 2 人のプレイヤーは交互に 1 つの山を選び, 1 個以上の石を取っていく.

交互に石を取っていき, 取る石がなくなった方が負けである.

さて, ゲームの局面（ニムの場合は, 石の山）全体を頂点集合, 局面 X から Y に移動できるときに矢印 $X \to Y$ を走らせることで, ゲームは有向グラフ $\Gamma = (V, A)$ であらわすことができる ($X \to Y$ のとき $(X, Y) \in A$ とする). 本稿で扱うゲームは, この有向グラフが次を満たすものに限ることにする：

1. 全ての有向パスの長さは有限,
2. 全ての頂点の子孫の数は有限,

ただし, 頂点 Y が 頂点 X の子孫とは, X からはじまり Y でおわる有向パスが存在することをあらわす. 特にゲームは, シンク（矢印が 1 本も出ていない頂点）を持つことがわかる.

例えば, k 山のニムで考えよう. 局面を横ベクトル $(x_1, \dots, x_k)$ であらわすと頂点集合は $V = \mathbb{Z}_{\geq 0}^k$, 辺集合は $A = \left\{ (X, X - ae_i) \in V^2 \;\middle|\; a \in \mathbb{Z}_{>0}, i = 1, \dots, k \right\}$ となる, ただし, e_i は k 次の単位行列の i 行目である.

さて, ゲーム Γ の 必勝形は エネルギー（または, Sprague-Grundy 数）を使って記述できる. ゲーム Γ の局面 X のエネルギーは, 次のように再帰的に定義される:

$$E_\Gamma(X) = \operatorname{mex} \{ E_\Gamma(Y) \mid X \to Y \},$$

ここで $S \subsetneq \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\operatorname{mex} S = \{ a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid a \notin S \}$ である. ゲームはシンクを持ち, シンクのエネルギーは $\operatorname{mex} \emptyset = 0$ から 0 になるため, ここから順々にエネルギーが定まる.

このエネルギーを使うと必勝形を次のように記述できる：

定理 2.1. (Sprague [4], Grundy [1]) Γ をゲームとする. エネルギー e の局面は, 本質的に e 個の石からなる 1 山のニムの局面と思うことができる. 特に, Γ の局面 X が (後手) 必勝形であることと X のエネルギーが 0 であることは同値である.

さて, 上でみたようにエネルギーは再帰的に定義されていて, 原理的には計算できる. ここで, 一部の特別なゲームについては, エネルギー公式が知られている. ニムはその代表例であり, ニム和を使ってエネルギーをあらわせる.

ニム和とは, 2 進法であらわして各桁毎に繰り上げのない足し算をしたものである. 記号の準備をかねて, 形式的にのべる. 非負整数 x を 2 進法であらわしたとき, その L 桁目を $[x]_L$ であらわそう, すなわち, $x = \sum_{L \geq 0} [x]_L \, 2^L$ ($[x]_L \in \{ 0, 1 \}$). このとき, x と y のニム和 $x \oplus y$ を, $[x \oplus y]_L \equiv [x]_L + [y]_L \pmod 2$ で定める.

定理 2.2. (Sprague [4], Grundy [1]) ニムの局面 $(x_1, \dots, x_k)$ のエネルギーは $x_1 \oplus \cdots \oplus x_k$ である.

3 反転ニムと飽和

反転ニムは、ニムの矢印を全て反転した後, ニムの必勝形全体が再び必勝形になるように、誘導した部分ゲームである[*1].

反転ニムのルールをのべる. N を正の整数とする. ゲーム前に, 石の山を $2k+1$ 個用意する (偶数個の場合は, ニムと一致する), ただし, 各山の石の数は 2^N-1 以下にしておく. そして, 交互に 1 つの山を選び, 少なくとも 1 個の石を増やす[*2]. このとき, 各山の石の数は 2^N-1 以下になるようにし[*3], さらに次を満たす局面 $(x_1,\ldots,x_{2k+1})$ にしてはいけない:

$$[x_1]_{L_0} = \cdots = [x_{2k+1}]_{L_0} = 1,$$

ただし, $L_0 = \max\{\, L \geq 0 \mid [x_1 \oplus \cdots \oplus x_{2k+1}]_L = 1 \,\}$ である. ここで, $[x]_L$ は x を 2 進法であらわしたときの L 桁目をあらわす. このゲームを サイズ N で $2k+1$ 山の反転ニム と呼ぶ.

反転ニムのように, 元のゲーム $\Gamma = (V, A)$ の局面を一部に制限して得られるゲーム $\Gamma' = (V', A')$ を Γ を V' に誘導した部分ゲーム と呼ぶ（グラフの言葉でいえば誘導部分グラフである）. すなわち, $V' \subset V$ で $A' = \{\, (X,Y) \in A \mid X, Y \in V' \,\}$ である.

では, 反転ニムのエネルギーの話に入ろう.

$x \odot y$ で x と y を 2 進法であらわして各桁毎の掛け算をしたものとする. すなわち, $[x \odot y]_L = [x]_L\,[y]_L$ である. 例えば, $3 \odot 9 = 1$ となる.

このとき, サイズ N で 3 山の反転ニムの局面 (x_1, x_2, x_3) のエネルギーは次になる:

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 - 2x_1 \odot x_2 \odot x_3.$$

3 より大きな奇数については, このようなエネルギー公式は見つかっていない. しかし, 飽和した反転ニムについては, エネルギー公式を得ることができる.

以下, 飽和の定義をする.

まず, $\mathcal{W}^{(d)}$ を次の条件を満たす $(w_1,\ldots,w_k) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^k$ 全体とする:

1. $|\{\, w_i \mid w_i > 0, i = 1,\ldots,k \,\}| < d$,
2. $\min\left(\mathrm{supp}\left(\bigoplus_{i=1}^k w_i\right)\right) = \min(\bigcup_{i=1}^k \mathrm{supp}(w_i))$,

---

[*1] 反転ニムは, ゲーム分布というものを考えると自然に現れる. ゲーム分布の一方の端がニムに対応し, もう一方の端が反転ニムに対応している [2].

[*2] ニムのように, 反転ニムも石を減らすゲームとして記述できる. しかし, 石を増やすゲームとして記述する方が容易なため, ここでは増やすゲームとしてのべる.

[*3] ここまでの条件だとふつうのニムである.

ただし, x のサポート $\mathrm{supp}(x)$ は, 2 進法であらわしたときに, 0 でない桁全体である: $\mathrm{supp}(x) = \{\, L \geq 0 \mid [x]_L \neq 0 \,\}$. そして, $A^{(d)} = \left\{ (X, Y) \in (\mathbb{Z}^k_{\geq 0})^2 \;\middle|\; X - Y \in \mathcal{W}^{(d)} \right\}$ とおく. このとき, ゲーム $(\mathbb{Z}^k_{\geq 0}, A^{(d)})$ を 次数 d の k 山ニム と呼ぶ.

$d = 1$ のときは普通のニムである. 普通のニムは 1 つの山からしか石を取ることができなかったが, 次数 d の場合は, 条件つきで d 山から取ることができる[*4].

これで飽和を定義する準備が整った.

定義 3.1. ゲーム $\Gamma^{(d)}$ は 次数 d の k 山ニムを $V \subset \mathbb{Z}^k_{\geq 0}$ に誘導した部分ゲームとする. このとき, $\Gamma^{(1)}$ の 飽和次数 $d_0 > 0$ とは, 全ての局面 $X \in V$ と $d_0 \leq d \leq k$ に対して

$$E_{\Gamma^{(d)}}(X) = E_{\Gamma^{(d_0)}}(X)$$

を満たす最小の数と定義する. このとき, $\Gamma^{(d_0)}$ を $\Gamma^{(1)}$ の 飽和と呼ぶ.

例えば, ニムの飽和次数は, 1 である. また, 3 山の反転ニム[*5] も 1 である. ところが, 5 山以上の反転ニムについては, 飽和次数が 1 にはならない.

定理 3.2. 反転ニムの飽和次数は, 3 山のとき 1 であり, 5 山以上のとき 2 である. さらに, 飽和反転ニムの局面 $(x_1, \ldots, x_{2k+1})$ のエネルギーは次である:

$$x_1 \oplus \cdots \oplus x_{2k+1} - 2x_1 \odot \cdots \odot x_{2k+1}.$$

参考文献

[1] P. M. Grundy. Mathematics and games. *Eureka*, 2(5):6–8, 1939.

[2] Y. Irie. 不偏ゲームとデザイン. 数理解析研究所講究録, 1956:94–100, 2015.

[3] E. H. Moore. A Generalization of the Game Called Nim. *Annals of Mathematics*, 11(3):93–94, 1910.

[4] R. Sprague. Ãœber mathematische Kampfspiele. *Tohoku Mathematical Journal, First Series*, 41:438–444, 1935.

[*4] d 山から任意に石を取ることができるゲームは, Moore の Nim_d と呼ばれ, 必勝形は特定されている [3]. しかし, 一般的なエネルギー公式は知られていない.

[*5] 反転ニムは, 石を減らすゲームでもあるので, k 山ニムの誘導部分ゲームになる.

Tournament の skew energy

伊東　桂司

December 1, 2015

1 Introduction

The skew energy of digraphs is introduced by C. Adiga, R. Balakrishman and W. So [1]. It is defined as the sum of the absolute values of the eigenvalues of a skew-adjacency matrix. C. Adiga et al [1] also gave bounds for the skew energy of digraphs. For a digraph D of order n, let S be the skew-adjacency matrix of D, m be the number of arcs and Δ be the maximum degree of the underlying undirected graph of D. Then the skew energy $E(S)$ satisfies

$$\sqrt{2m + n(n-1)p^{\frac{2}{n}}} \leq E(S) \leq \sqrt{2mn} \leq n\sqrt{\Delta}, \tag{1}$$

where $p = |\det S|$ (see [1, Theorem 2.5]).

The skew energy of trees and cycles were also studied by C. Adiga et al [1]. In this paper, we will discuss the skew energy of tournaments. In this case, when n is fixed, $m = n(n-1)/2$ and $\Delta = n-1$ for all tournaments. We give an improved lower bound for the skew energy of tournaments depending only on n:

$$\sum_{m=1}^{n} \left| \cot\left(\frac{2m-1}{2n}\pi\right) \right| \leq E(S).$$

In fact, the left-hand side is the minimum of $E(S)$ over all skew-adjacency matrices of order n. Moreover, when n is odd, we can also give an improved upper bound of the skew energy:

$$E(S) \leq \sqrt{2n-2} + (n-1)\sqrt{n-2}.$$

Generalizing the notion of the skew energy, we will also give similar results for the α-skew energy $E_\alpha(S)$ $(0 < \alpha \leq 2)$.

2 Tournaments and skew energy

Definition 2.1. *A digraph is a pair* $D = (V, E)$ *such that* V *is a finite set and* $E \subset \{(x, y) \in V \times V \mid x \neq y\}$. *The sets* V, E *are called the vertex set and the arc set, respectively.*

The size of V is called the *order* of the digraph (V, E). We denote by $x \to y$ if vertices $x, y \in V$ satisfy $(x, y) \in E$.

Definition 2.2. *A tournament is defined as a digraph such that either $x \to y$ or $y \to x$ holds for all $x, y \in V$ $(x \neq y)$.*

The *skew-adjacency matrix* of a digraph D of order n is defied as the $n \times n$ $\{0, \pm 1\}$-matrix $S = [S_{xy}]$, where

$$S_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{if } x \to y, \\ -1 & \text{if } y \to x, \\ 0 & \text{if otherwise.} \end{cases}$$

In this paper, since we deal with skew-adjacency matrices rather than digraphs, a skew-adjacency matrix of a tournament of order n is just called a skew-adjacency matrix of order n. Let $\mathscr{S}_n$ be the set of all skew-adjacency matrices of order n.

We will define the skew energy for skew-adjacency matrices and polynomials.

Definition 2.3. *Let f be a polynomial of degree n and α be a positive real number. The α-energy $E_\alpha(f)$ of f is defined as the sum of the α-th power of the absolute values of the roots of f. The energy $E(f)$ is defined as $E_1(f)$. For $S \in M_n\mathbb{R}$, the α-energy $E_\alpha(S)$ is defined as the α-energy of the characteristic polynomial of S. Moreover the energy $E(S)$ is defined as $E_1(S)$.*

Since a skew-adjacency matrix S is skew-symmetric, eigenvalues of S are 0 or purely imaginary numbers. In particular, S has 0 as an eigenvalue when n is odd. It will be shown in Lemma 2.4 that $\det S \geq 1$ when n is even. This means that all eigenvalues are purely imaginary numbers. Moreover the complex conjugate of an eigenvalue is an eigenvalue of S, too.

Let J_n be the *all-ones matrix* (the $n \times n$ matrix each of whose entries is equal to 1), and I_n be the identity matrix of order n.

Lemma 2.4. *Let S be a skew-adjacency matrix of order n.*

(i) If n is odd, then $\det S = 0$.

(ii) If n is even, then $\det S \geq 1$.

Proof. If n is odd, then S has 0 as an eigenvalue. Thus $\det S = 0$. If n is even, then

$$\begin{aligned} \det S &\equiv \det(J_n - I_n) \pmod 2 \\ &\equiv 1 \pmod 2. \end{aligned}$$

This congruence implies $\det S \in \mathbb{Z}$ and $\det S \neq 0$. Therefore $\det S \geq 1$. □

Let $c_k(x_1, \dots, x_n)$ be the elementary symmetric polynomial of degree k in the indeterminates $x_1, \dots, x_n$. For $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, we write $x \preceq y$ if $c_k(x_1, \dots, x_n) \leq c_k(y_1, \dots, y_n)$ for all $k = 1, \dots, n$.

Lemma 2.5 ([2, Theorem 3]). *Let $0 < \alpha \leq 1$ and x_i, y_i $(i = 1, \dots, n)$ be non-negative real numbers, and let $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. If $x \preceq y$, then it holds that*

$$x_1^\alpha + \cdots + x_n^\alpha \leq y_1^\alpha + \cdots + y_n^\alpha.$$

Lemma 2.6. *(1) Let $f_1(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i x^{n-i}$, $f_2(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i x^{n-i}$ be monic polynomials with real coefficients, and assume that all of their roots are non-negative. If $a_i \leq b_i$ holds for every $1 \leq i \leq n$, then*

$$E_\alpha(f_1) \leq E_\alpha(f_2) \ (0 < \alpha \leq 1).$$

(2) Let $f_3(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$, $f_4(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^{n-i}$ be monic polynomials with real coefficients, and assume that all of their roots are non-positive. If $a_i \leq b_i$ holds for every $1 \leq i \leq n$, then

$$E_\alpha(f_3) \leq E_\alpha(f_4) \ (0 < \alpha \leq 1)$$

Proof. First, we prove (1). Let $\lambda_j, \mu_j > 0$ $(j = 1, \dots, n)$ be the roots of f_1, f_2, respectively. By Vieta's formulas and assumption, for $1 \leq i \leq n$,

$$c_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = a_i \leq b_i = c_i(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

By Lemma 2.5,

$$E_\alpha(f_1) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^\alpha \leq \sum_{j=1}^n \mu_j^\alpha = E_\alpha(f_2).$$

Next, we prove (2). Setting $f_1(x) = (-1)^n f_3(-x), f_2(x) = (-1)^n f_4(-x)$, the roots of $f_1(x), f_2(x)$ are positive, so the result follows from (1). □

Corollary 2.7. *Let $g_1(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$, $g_2(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^{n-i}$ be monic polynomials with real coefficients and assume that their roots are purely imaginary numbers. If $a_i \leq b_i$ holds for every $1 \leq i \leq n$, then*

$$E_\alpha(g_1) \leq E_\alpha(g_2) \ (0 < \alpha < 2).$$

Proof. The assumption of this theorem implies that n is even. Setting,

$$f_3(x) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} a_{2i} x^{\frac{n}{2}-i},$$

$$f_4(x) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} b_{2i} x^{\frac{n}{2}-i},$$

we have $f_3(x^2) = g_1(x), f_4(x^2) = g_2(x)$. Since the roots of $f_3(x), f_4(x)$ are negative real numbers, $E_\alpha(g_1) = E_{\alpha/2}(f_3) \leq E_{\alpha/2}(f_4) = E_\alpha(g_2)$ by Lemma 2.6 (2). □

3 The minimum skew energy of tournaments

For $S \in \mathscr{S}_n$, let $S[\{k_1, k_2, \cdots, k_i\}]$ denote the $i \times i$ principal submatrix of S which is indexed by $\{k_1, k_2, \cdots, k_i\}$ $(1 \le k_1 < \cdots < k_i \le n)$. Let $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$ be the characteristic polynomial of S. Then, by Lemma 2.4,

$$a_i = (-1)^i \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_i \le n} \det S[\{k_1, k_2, \ldots, k_i\}] \begin{cases} = 0 & \text{if } i \text{ is odd,} \\ \ge \binom{n}{i} & \text{if } i \text{ is even.} \end{cases}$$

Let $f_0(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} x^{n-2i}$. Then by Corollary 2.7,

$$E_\alpha(f_0) \le E_\alpha(S) \quad (0 < \alpha < 2). \tag{2}$$

Let

$$S_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{S}_n.$$

Lemma 3.1. *If n is even, then* $\det S_n = 1$.

Proof.

$$\det S_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & & & & 1 \\ \vdots & & S_{n-2} & & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & & & 1 \\ \vdots & & S_{n-2} & & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \det S_{n-2}.$$

Since $\det S_2 = 1$, we have $\det S_n = 1$ by induction. □

Lemma 3.2. *The characteristic polynomial of S_n is f_0, and the eigenvalues of S_n are*

$$-i \cot \left(\frac{2m-1}{2n} \pi \right) \quad (m = 1, \ldots, n).$$

Proof. Every $i \times i$ principal submatrix of S_n is S_i and

$$\det S_i = \begin{cases} 0 & \text{if } i \text{ is odd,} \\ 1 & \text{if } i \text{ is even} \end{cases}$$

by Lemma 3.1. Thus

$$\det(xI_n - S_n) = f_0(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} x^{n-2i} = \frac{1}{2}\left((x+1)^n + (x-1)^n\right).$$

The roots of f_0 are

$$x = \frac{-1-\zeta}{1-\zeta},$$

where

$$\zeta = e^{\frac{2m-1}{n} i\pi} \quad (m = 1, \ldots, n).$$

By $(1+e^{ia})/(1-e^{ia}) = i\cot(a/2)$,

$$x = -\frac{1+\zeta}{1-\zeta} = -i\cot\left(\frac{2m-1}{2n}\pi\right) \quad (m = 1, \ldots, n).$$

□

Now, we find the skew-adjacency matrices which have the minimum skew energy.

Theorem 3.3 (G. Pick, 1922, see [3, Theorem 1.1])**.** *Let* λ *be an eigenvalue of* $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$*. Then*

$$|\mathrm{Im}\ \lambda| \leq g(A)\cot\frac{\pi}{2n}, \tag{3}$$

where

$$g(A) = \max_{i,j}\left|\frac{a_{ij} - a_{ji}}{2}\right|.$$

If A has an eigenvalue λ for which equality holds in (3), then A is called a *Pick matrix.* By Lemma 3.2, S_n has an eigenvalue λ such that $|\mathrm{Im}\,\lambda| = \cot(\pi/2n)$. This implies that S_n is a Pick matrix.

Let $\mathscr{Q}_n$ be the set of signed permutation matrices of order n.

Theorem 3.4 ([3, Theorem 2.1])**.** *Let* $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$ *with* $g(A)$ *defined in Theorem 3.3. Then* A *is a Pick matrix if and only if there exists* $Q \in \mathscr{Q}_n$ *such that*

(i) $A - A^T = 2g(A)Q^T S_n Q$,

(ii) $Q^T w$ *is an eigenvector of* A,

where

$$w = [1, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}]^T, \quad \sigma = e^{i\pi/n}$$

In this case, if $Ax = \lambda x$ *where* $|\mathrm{Im}\,\lambda| = g(A)\cot(\pi/(2n))$*, then* $Qx = cw$ *or* $c\overline{w}$ *for some scalar* c*.*

Theorem 3.5. *For $S \in \mathscr{S}_n$ and $0 < \alpha < 2$,*

$$\sum_{m=1}^{n} \left| \cot\left(\frac{2m-1}{2n}\pi\right) \right|^{\alpha} \leq E_\alpha(S).$$

When $\alpha = 1$, equality holds if and only if there exists $Q \in \mathscr{Q}_n$ such that $S = Q^T S_n Q$.

Proof. Since the roots of f_0 are $-i\cot(\pi(2m-1)/2n)$ $(m = 1, \ldots, n)$ by Lemma 3.2, the inequality in this theorem holds by (2). Let f be the characteristic polynomial. Then

$$E(S) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(n + x \frac{f'(-x)}{f(-x)} \right) dx,$$

where $f'(x)$ is the derivative of f (see [1]). By this integral representation, if $S \in \mathscr{S}_n$ satisfies $E(S) = E(S_n)$, then $\mathrm{Spec}(S) = \mathrm{Spec}(S_n)$. This implies that S is a Pick matrix. By applying Theorem 3.4 to S, there is $Q \in \mathscr{Q}_n$ such that $S - S^T = 2Q^T S_n Q$, namely $S = Q^T S_n Q$. □

Remark 3.6. The matrices $S \in \mathscr{S}_n$ which achieve equality in Theorem 3.5 coincide with those characterized in Wesp [4, Corollary 7].

4 The upper bound of the skew energy

The following bound is known ([1, Theorem 2.5]). We give a proof here in order to establish a condition for equality.

Proposition 4.1. *For $S \in \mathscr{S}_n$,*

$$E(S) \leq n\sqrt{n-1}.$$

Equality holds if and only if $S + I_n$ is a Hadamard matrix.

Proof. Let θ_i for all $i = 1, \ldots, n$ be the eigenvalues of S. By Cauchy-Schwarz inequality and $(S^2)_{ii} = -(n-1)$ for all $i = 1, \ldots, n$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\theta_i| \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} |\theta_i|^2 = n \sum_{i=1}^{n} (-\theta_i^2) = n\mathrm{tr}\left(S^2\right) = n^2(n-1).$$

Therefore

$$\sum_{i=1}^{n} |\theta_i| \leq n\sqrt{n-1}. \tag{4}$$

Equality in (4) holds if and only if $|\theta_i| = \sqrt{n-1}$ for all $i = 1, \ldots, n$. Since S is a normal matrix, there is a unitary matrix U such that $U^* S U = \mathrm{diag}(\theta_1, \ldots, \theta_n)$.

The conjugate of this equation is $U^*S^TU = \operatorname{diag}(\overline{\theta_1}, \ldots, \overline{\theta_n})$. Thus, $SS^T = (n-1)I_n$ holds. Since

$$\begin{aligned}(S+I_n)(S+I_n)^T &= (S+I_n)(S^T+I_n)\\ &= (n-1)I_n + I_n\\ &= nI_n,\end{aligned}$$

$S + I_n$ is a Hadamard matrix. □

It is well known that there exists a Hadamard matrix of order n only if $n = 1, 2$ or n is a multiple of 4. Therefore, if equality holds in Proposition 4.1, then n is $1, 2$ or a multiple of 4. When n is odd, a better upper bound can be given (see Remark 4.6). When $n \equiv 2 \pmod 4$, we do not know any better upper bounds.

Lemma 4.2 and Theorem 4.3 below are proved for symmetric positive definite matrices in [5, Theorem 1 and Corollary 2]. By the same argument, we can prove them for symmetric positive semidefinite matrices.

Lemma 4.2. *Let*

$$A'_n = \begin{bmatrix} a & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & m & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & m \end{bmatrix}$$

be a symmetric positive semidefinite matrix and $a > 0$. If A'_n satisfies

$$\min_{2\le j\le n} |a_{1j}| \ge a, \tag{5}$$

then:

(i) $\det A'_n \le a(m-a)^{n-1}$,

(ii) equality in (i) holds if and only if $A'_n = Q^T A_n Q$ $(Q \in \mathscr{Q}_n)$, where

$$A_n = \begin{bmatrix} a & a\mathbf{1} \\ a\mathbf{1}^T & aJ_{n-1} + (m-a)I_{n-1} \end{bmatrix},$$

and $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$.

Proof. Construct a matrix A''_n from A'_n as follows: for $i = 2, 3, \ldots, n$, subtract $\dfrac{a_{1i}}{a}$ times the first row from the i-th row. Because of $a_{1i} = a_{i1}$, the diagonal entries of A''_n are

$$a, \left(m - \frac{a_{12}^2}{a}\right), \ldots, \left(m - \frac{a_{1n}^2}{a}\right).$$

By $\det A \le a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,

$$\det A'_n = \det A''_n \le a \prod_{j=2}^{n} \left(m - \frac{a_{1j}^2}{a} \right). \tag{6}$$

By the inequality (5) in the assumption, $\det A'_n \le a(m-a)^{n-1}$.

We now consider the condition that equality holds. Without loss of generality, we assume that all entries of the first row and the first column of A'_n are non-negative. If equality in (6) holds then A''_n is a diagonal matrix. Hence $a_{ij} = a_{1j}$ for all i, j $(i \ne j)$. Since $|a_{1j}| = a$ for $j = 2, \ldots, n$ in (6), $a_{ij} = a$ $(i \ne j)$ holds. We can change the sign of a_{1j} by multiplying -1 to first row and column if necessary. In other words, we can make $a_{1j} = a$. Converse is clear. □

Theorem 4.3. *Let*

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} m & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & m \end{bmatrix}$$

be a symmetric positive semidefinite matrix, and let a be a non-negative real number. If $\min_{1\le i,j\le n} |a_{ij}| \ge a$*, then*

(i) $\det A \le (m + na - a)(m-a)^{n-1}$,

(ii) equality in (i) holds if and only if $A = Q^T BQ$ *where*

$$B = aJ_n + (m-a)I_n.$$

Proof. We prove $\det A[\{n-i,\ldots,n\}] \le (m+(i+1)a-a)(m-a)^i$ by induction on i, where $A[\{n-i,\ldots,n\}]$ denotes the $(i+1)\times(i+1)$ lower right principal submatrix of A. For $i = 0$, $A[\{n\}] = m$. Suppose that $\det A[\{n-(i-1),\ldots,n\}] \le (m+ia-a)(m-a)^{i-1}$ holds for some $i \ge 1$. Observe

$$\det A[\{n-i,\ldots,n\}] = \det \begin{bmatrix} a & a_{i,i+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,i} & m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,i} & \cdots & \cdots & m \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} m-a & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,i} & m & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,i} & \cdots & \cdots & m \end{bmatrix}.$$

Using the notation of Lemma 4.2, this can be written as

$$\det A[\{n-i,\ldots,n\}] = \det A'_{i+1} + (m-a)\det A[\{n-(i-1),\ldots,n\}]. \tag{7}$$

By interlacing all but possibly one eigenvalue of A'_{i+1} is non-negative, since $A[\{n-i,\dots,n\}]$ is also a principal submatrix of A'_{i+1}. We claim that

$$\det A[\{n-i,\dots,n\}] \le a(m-a)^i + (m-a)\det A[\{n-(i-1),\dots,n\}]. \quad (8)$$

Case 1. $\det A'_n > 0$. In this case A'_n is positive definite. Then by Lemma 4.2 and (7), we obtain (8).

Case 2. $\det A'_n \le 0$. In this case, (8) follows from (7) since $m \ge a$.

Thus, by (8) and the inductive hypothesis,

$$\begin{aligned}\det A[\{n-i,\dots,n\}] &\le a(m-a)^i + (m-a)\det A[\{n-(i-1),\dots,n\}]\\ &\le (m+(i+1)a-a)(m-a)^i.\end{aligned}$$

In particular, when $i = n-1$, $\det A \le (m+na-a)(m-a)^{n-1}$.

If equality holds, then $\det A'_n = a(m-a)^{n-1}$. By Lemma 4.2, all non-diagonal entries are equal to a; hence $A = aJ_n + (m-a)I_n$. Converse is clear. □

Let $T_i(n) = J_i + (n-1)I_i$. Then the characteristic polynomial of $T_i(n)$ is

$$\sum_{k=1}^{i}(-1)^k\binom{i}{k}\det T_k(n)x^{n-k} = (x-(n+i-1))(x-(n-1))^{i-1}. \quad (9)$$

Corollary 4.4. *Let*

$$A_i = \begin{bmatrix} n-1 & a_{12} & \cdots & a_{1i}\\ a_{21} & n-1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & \cdots & n-1\end{bmatrix}$$

be a real symmetric positive semidefinite matrix with $\min_{\substack{1\le k,l\le i\\ k\ne l}} |a_{kl}| \ge 1$. *Then,*

$$\det A_i \le \det T_i(n-1),$$

Equality holds if and only if $A_i = T_i(n-1)$.

Proof. Apply Theorem 4.3 with $a = 1$ and $m = n-1$. □

Theorem 4.5. *Let* $n \ge 3$ *be an odd positive integer,* $S \in \mathscr{S}_n$ *and* $0 < \alpha < 2$. *Then*

$$E_\alpha(S) \le \sqrt{2n-2}^{\,\alpha} + (n-1)\sqrt{n-2}^{\,\alpha}.$$

Proof. Observe, for $k \ne l$, $(-S^2)_{kl} = (SS^T)_{kl} = a-b$, where

$$\begin{aligned} a &= |\{t \in \{1,\dots,n\} \mid t \ne k,l,\ S_{kt} = S_{lt}\}|,\\ b &= |\{t \in \{1,\dots,n\} \mid t \ne k,l,\ S_{kt} \ne S_{lt}\}|.\end{aligned}$$

Since $a+b+2=n$ is odd, $a-b$ is odd. Thus $|(-S^2)_{kl}| \geq 1$. Moreover the diagonal entries of $-S^2$ are equal to $n-1$. Because of $-S^2 = SS^T$, $-S^2$ is a positive semidefinite, so we can apply Corollary 4.4 to any principal submatrix of $-S^2$. Therefore

$$\det(-S^2[\{k_1, \dots, k_i\}]) \leq \det T_i(n-1). \tag{10}$$

Let λ_i, μ_i $(i = 1, \dots, n)$ be the eigenvalues of $-S^2, T_n(n-1)$, respectively. Since $-S^2 = SS^T$ is positive semidefinite, λ_i $(i = 1, \dots, n)$ are non-negative real numbers. Moreover μ_i $(i = 1, \dots, n)$ are $2n-2$, $n-2$ (multiplicity $n-1$) by (9). By the inequality (10) and Vieta's formulas,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\Lambda \subset \{1,\dots,n\} \\ |\Lambda| = i}} \left(\prod_{l \in \Lambda} \lambda_l \right) &= \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq n} \det(-S^2[\{k_1, \dots, k_i\}]) \\ &\leq \binom{n}{i} \det T_i(n-1) = \sum_{\substack{\Lambda \subset \{1,\dots,n\} \\ |\Lambda| = i}} \left(\prod_{l \in \Lambda} \mu_l \right). \end{aligned}$$

By Lemma 2.6 (1),

$$E_{2\alpha'} = E_{\alpha'}(-S^2) \leq E_{\alpha'}(T_n(n-1)) = (2n-2)^{\alpha'} + (n-1)(n-2)^{\alpha'} \ (0 < \alpha' \leq 1).$$

The result follows by replacing $2\alpha'$ by α. □

Remark 4.6. The upper bound of $E_\alpha(S)$ given in Theorem 4.5 is better than the general bound in (1) when $\alpha = 1$. Indeed,

$$\begin{aligned} &n\sqrt{n-1} - (\sqrt{2n-2} + (n-1)\sqrt{n-2}) \\ &= \frac{\sqrt{n-1}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2(n-1)} - \sqrt{n-2})}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2}} \\ &> 0. \end{aligned}$$

References

[1] C. Adiga, R. Balakrishnan and W. So, The skew energy of a digraph, *Linear Algebra Appl.* **432** (2010), no. 7, 1825–1835.

[2] G. A. Efroymson, B. Swartz and B. Wendroff, A new inequality for symmetric functions, *Adv. Math.* **38** (1980), 109–127.

[3] D. A. Gregory, S. J. Kirkland and B. L. Shader, Pick's inequality and tournaments, *Linear Algebra Appl.* **186** (1993), 15–36.

[4] G. Wesp, A note on the spectra of certain skew-symmetric $\{1, 0, -1\}$-matrices, *Discrete Math.* **258** (1-3) (2002), 339–346.

[5] M. Wojtas, On Hadamard's inequality for the determinants of order non-divisible by 4, *Colloq. Math.* **12** (1964), 73–83.

A semidefinite programming approach to a cross-intersection problem with measures

田中 太初

東北大学 大学院情報科学研究科 純粋・応用数学研究センター

htanaka@m.tohoku.ac.jp

本稿の内容は須田庄氏 (愛知教育大学) 及び徳重典英氏 (琉球大学) との共同研究の成果 [9] に基いている。詳細については [9] を参照されたい。

本稿では有限単純グラフのみを取り扱う。正則グラフ G の独立数については、Hoffman 限界がよく知られている。すなわち、$\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$ をそれぞれ G の最大・最小固有値とするとき、G の任意の独立集合 $U \subset V(G)$ について

$$\frac{|U|}{|V(G)|} \leqslant \frac{-\lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}$$

が成り立つ。Hoffman 限界の証明は、Lovász の ϑ-関数 [5] を定める半正定値計画問題の適当な実行可能解を見つけることとみなすことができる [1]。次に、G が二分割 $V(G) = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ を持つ二正則二部グラフとする。すなわち、次数が Ω_1, Ω_2 のそれぞれで一定だと仮定する。二つの部分集合 $U_1 \subset \Omega_1, U_2 \subset \Omega_2$ の間に辺がないとき、すなわち $U_1 \sqcup U_2$ が独立集合であるとき、U_1, U_2 は**交差独立** (cross-independent) だということにする。G の隣接行列を上の二分割に対応して 2×2 ブロック行列とみなし、一方の非対角ブロックの特異値の中で最も大きな二つを $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$ とするとき、交差独立な $U_1 \subset \Omega_1, U_2 \subset \Omega_2$ について

$$\sqrt{\frac{|U_1||U_2|}{|\Omega_1||\Omega_2|}} \leqslant \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \tag{1}$$

が成り立つ。Hoffman 限界の場合と同様に、(1) についても半正定値計画法を用いた精密化が可能であり、[8] ではそれを用いて cross-intersecting (交差交叉?) な二つの部分空間族に関する Erdős–Ko–Rado 型の定理が証明された [2]。

本稿では半正定値計画の手法のさらなる応用を紹介する。出発点となるのは Fishburn, Frankl, Freed, Lagarias, Odlyzko [3] の結果である。n を正の整数とし、$[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$, $\Omega := 2^{[n]}$ (べき集合) とおく。ベクトル $\boldsymbol{p} = (p^{(1)}, \ldots, p^{(n)})$ が $0 < p^{(\ell)} < 1$ $(\forall \ell \in [n])$ を満たすとき、これを**確率ベクトル**と呼ぶことにする。このとき $\boldsymbol{p}$ に関する Ω 上の**積測度** (product measure) $\mu_{\boldsymbol{p}}$ を

$$\mu_{\boldsymbol{p}}(U) := \sum_{x \in U} \prod_{\ell \in x} p^{(\ell)} \prod_{k \in [n] \setminus x} (1 - p^{(k)}) \qquad (\forall U \subset \Omega)$$

により定める。実際 $\mu_{\boldsymbol{p}}$ が Ω 上の確率測度であること、すなわち $\mu_{\boldsymbol{p}}(\Omega) = 1$ は直ちに確かめられる。部分集合族 $U \subset \Omega$ が**交叉的** (intersecting) であるとは、$x \cap y \neq \emptyset$ $(\forall x, y \in U)$ が成り立つこととする。

[1] 正確には、Schrijver [7] による ϑ-関数の変形に関してである (しばしば ϑ'-関数と呼ばれる)。なお、グラフ G がある association scheme に付随するグラフ達の和になっている場合は、ϑ'-関数はさらに Delsarte [2] の線型計画限界と一致する。

[2] なお、[8] の証明は部分集合族の場合 [6] にも適用できる。

Theorem 1 (Fishburn et. al [3]). *Let $\mu_{\boldsymbol{p}}$ be the product measure defined above, and assume that $p^{(1)} = \max\{p^{(\ell)} : \ell \in [n]\}$, and that $p^{(\ell)} \leqslant 1/2$ for $\ell \geqslant 2$. If $U \subset \Omega$ is intersecting, then $\mu_{\boldsymbol{p}}(U) \leqslant p^{(1)}$. Moreover, if $p^{(1)} > p^{(\ell)}$ for $\ell \geqslant 2$, then equality holds if and only if $U = \{x \in \Omega : 1 \in x\}$.*

本稿の主結果はこの定理の拡張である。Ω_1, Ω_2 を $2^{[n]}$ の異なるコピーとし、$\boldsymbol{p}_1 = (p_1^{(1)}, \dots, p_1^{(n)})$ 及び $\boldsymbol{p}_2 = (p_2^{(1)}, \dots, p_2^{(n)})$ を確率ベクトルとする。以下、次を仮定する：

$$p_i := p_i^{(1)} = \max\{p_i^{(\ell)} : \ell \in [n]\} \qquad (i = 1, 2) \tag{2}$$

各 $i = 1, 2$ について、$\mu_i := \mu_{\boldsymbol{p}_i}$ を $\boldsymbol{p}_i$ に関する Ω_i 上の積測度とする。二つの部分集合族 $U_1 \subset \Omega_1, U_2 \subset \Omega_2$ が **cross-intersecting** であるとは、$x \cap y \neq \emptyset$ $(\forall x \in U_1, \forall y \in U_2)$ が成り立つこととする。また、

$$U_i^{(\ell)} := \{x \in \Omega_i : \ell \in x\} \qquad (i = 1, 2;\ \ell \in [n])$$

とおく。明らかに $U_i^{(\ell)}$ は交叉族であり、$\mu_i(U_i^{(\ell)}) = p_i^{(\ell)}$ を満たす。また、$U_1^{(\ell)}, U_2^{(\ell)}$ が cross-intersecting であることも明らかである。

Theorem 2 ([9]). *Let μ_1, μ_2 be the product measures defined above, and assume that (2) holds, and that $p_1^{(\ell)}, p_2^{(\ell)} \leqslant 1/2$ for $\ell \geqslant 2$. If $U_1 \subset \Omega_1, U_2 \subset \Omega_2$ are cross-intersecting, then*

$$\mu_1(U_1)\mu_2(U_2) \leqslant p_1 p_2. \tag{3}$$

Moreover, unless $p_1 = p_2 = 1/2$ and $|w| \geqslant 3$, equality holds if and only if $U_1 = U_1^{(\ell)}, U_2 = U_2^{(\ell)}$ for some $\ell \in w$, where

$$w = w_{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2} := \big\{\ell \in [n] : (p_1^{(\ell)}, p_2^{(\ell)}) = (p_1, p_2)\big\}.$$

この定理は、一つの交叉族 $U \subset \Omega\,(\cong \Omega_1 \cong \Omega_2)$ に対して $U_1 = U_2 = U$ として適用した場合、定理 1 よりも強いことに注意されたい。また、定理 2 は [10, 1] 等の先行研究を全て含んだ、現時点で最も一般的なものになっている。なお、$p_1 = p_2 = 1/2$ かつ $|w| \geqslant 3$ の場合には、上界 (3) 自体は成立するが、等号の特徴付けについては反例が存在する。

実際、定理 2 の証明は半正定値計画の手法と組合せ的手法を組み合わせたものである。$p_1, p_2 \leqslant 1/2$ の場合には半正定値計画の手法が有効であり、$p_1 > 1/2$ もしくは $p_2 > 1/2$ の場合には組合せ的手法を用いて前者の場合に帰着する。本稿では、前者の場合 $(p_1, p_2 \leqslant 1/2)$ について基本的なアイディアを紹介したい。

まず記号の準備を行う。以下、$\widehat{\Omega} := \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ と書くことにする。$\widehat{\Omega}$ を頂点集合とするグラフ G を

$$E(G) = \Big\{\{x, y\} : (x, y) \in (\Omega_1 \times \Omega_2) \sqcup (\Omega_2 \times \Omega_1),\, x \cap y = \emptyset\Big\}$$

により定義する。このとき、$U_1 \subset \Omega_1, U_2 \subset \Omega_2$ が交差独立であることと、これらが cross-intersecting であることは同値である。行と列が $\widehat{\Omega}$ で添字付けられた実行列全体の集合を $\mathbb{R}^{\widehat{\Omega} \times \widehat{\Omega}}$ とし、座標が $\widehat{\Omega}$ で添字付けられた実列ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^{\widehat{\Omega}}$ で表す。$\mathbb{R}^{\Omega_i \times \Omega_j}$ や $\mathbb{R}^{\Omega_i}$ 等の記号も同様に定義する。$J_{i,j} \in \mathbb{R}^{\Omega_i \times \Omega_j}$ を全ての成分が 1 の行列とする。$x \in \Omega_i, y \in \Omega_j$ に対し、$E_{x,y} \in \mathbb{R}^{\Omega_i \times \Omega_j}$ を (x, y)-成分が 1、他の成分が全て 0 の行列とする。$\Delta_i \in \mathbb{R}^{\Omega_i \times \Omega_i}$ を (x, x)-成分が $\mu_i(\{x\})$ $(\forall x \in \Omega_i)$ で与えられる対角行列とする。また、$\mathbb{R}^{\widehat{\Omega} \times \widehat{\Omega}}$ の中の対称行列全体の集合を $S\mathbb{R}^{\widehat{\Omega} \times \widehat{\Omega}}$ と書くことにする。二つの行列 $Y, Z \in \mathbb{R}^{\widehat{\Omega} \times \widehat{\Omega}}$ に対し、その内積を $Y \bullet Z = \mathrm{trace}(Y^\top Z)$ で表す。

以後、$U_1 \subset \Omega_1, U_2 \subset \Omega_2$ は cross-intersecting、すなわち交差独立だとする。我々の目的は $\mu_1(U_1)\mu_2(U_2)$ の上界を与えることなので、$\mu_1(U_1) > 0$ 及び $\mu_2(U_2) > 0$ と仮定して一般性を失わない。$\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^{\Omega_i}$ を U_i の

特性ベクトルとし、

$$X = X_{U_1,U_2} := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mu_1(U_1)}}\boldsymbol{x}_1 \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_2(U_2)}}\boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mu_1(U_1)}}\boldsymbol{x}_1 \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_2(U_2)}}\boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \in S\mathbb{R}^{\widehat{\Omega}\times\widehat{\Omega}}$$

とおく。このとき X は、次の半正定値計画問題の、目的値 $\sqrt{\mu_1(U_1)\mu_2(U_2)}$ の実行可能解を与えることが直ちに確かめられる：

$$\begin{aligned}
\text{(P):}\quad & \text{maximize} && \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Delta_1 J_{1,2}\Delta_2 \\ \frac{1}{2}\Delta_2 J_{2,1}\Delta_1 & 0 \end{bmatrix} \bullet X \\
& \text{subject to} && \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} \bullet X = 1, \\
& && \begin{bmatrix} 0 & E_{x,y} \\ E_{y,x} & 0 \end{bmatrix} \bullet X = 0 \ \text{ for } \ x \in \Omega_1,\, y \in \Omega_2,\, x \sim y, \\
& && X \succcurlyeq 0,\ X \geqslant 0.
\end{aligned}$$

ここで $X \in S\mathbb{R}^{\widehat{\Omega}\times\widehat{\Omega}}$ が変数であり、また $X \succcurlyeq 0$, $X \geqslant 0$ はそれぞれ X が半正定値及び非負であることを意味する。この問題の双対問題は次で与えられる：

$$\begin{aligned}
\text{(D):}\quad & \text{minimize} && \alpha + \beta \\
& \text{subject to} && S := \begin{bmatrix} \alpha\Delta_1 & -\frac{1}{2}\Delta_1 J_{1,2}\Delta_2 \\ -\frac{1}{2}\Delta_2 J_{2,1}\Delta_1 & \beta\Delta_2 \end{bmatrix} + \sum_{x\sim y}\gamma_{x,y}\begin{bmatrix} 0 & E_{x,y} \\ E_{y,x} & 0 \end{bmatrix} - Z \succcurlyeq 0, \\
& && Z \geqslant 0.
\end{aligned}$$

ここで $\alpha, \beta, \gamma_{x,y} \in \mathbb{R}$ 及び $Z \in S\mathbb{R}^{\widehat{\Omega}\times\widehat{\Omega}}$ が変数であり、和は $x \sim y$ となる $x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_2$ 上で取る。実際、(P) と (D) の任意の実行可能解に対して、

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Delta_1 J_{1,2}\Delta_2 \\ \frac{1}{2}\Delta_2 J_{2,1}\Delta_1 & 0 \end{bmatrix} \bullet X &= \begin{bmatrix} \alpha\Delta_1 & -\frac{1}{2}\Delta_1 J_{1,2}\Delta_2 \\ -\frac{1}{2}\Delta_2 J_{2,1}\Delta_1 & \beta\Delta_2 \end{bmatrix} \bullet X \\
&\geqslant \left(-\sum_{x\sim y}\gamma_{x,y}\begin{bmatrix} 0 & E_{x,y} \\ E_{y,x} & 0 \end{bmatrix} + Z \right) \bullet X \\
&= Z \bullet X \\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

となる。特に、$(\alpha+\beta)^2$ は $\mu_1(U_1)\mu_2(U_2)$ の上界を与える。なお、(P) と (D) の実行可能解が両方とも最適であることと $S \bullet X = Z \bullet X = 0$ が同値であることも分かる。以上により、(3) を証明するためには、目的値が $p_1 p_2$ となる (D) の実行可能解を構成すれば良いことになる。

ここからは、$p_1, p_2 \leqslant 1/2$ に加え、$n = 1$ を仮定する。実際 $n = 1$ の場合定理 2 は自明に成立するのであるが、本稿で紹介した半正定値計画の手法の観点からは、面白いことに実はこの場合が本質的なのである。すなわち、[9] では Friedgut [4] のアイディアに従い、まず $n = 1$ の場合に (D) の "良い" 最適実行可能解を構成し、そのテンソル積として一般の場合の最適実行可能解が得られる。

各 $i = 1, 2$ に対し、$c_i := \sqrt{p_i/q_i}$ とする。次の 4 種類の行列を考える：

$$A_{i,j} := \begin{bmatrix} 1 - \frac{p_j}{q_i} & \frac{p_j}{q_i} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{i,j} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c_i c_j \end{bmatrix}, \quad V_i := \begin{bmatrix} 1 & c_i \\ 1 & -\frac{1}{c_i} \end{bmatrix}, \quad \Delta_i := \begin{bmatrix} q_i & 0 \\ 0 & p_i \end{bmatrix} \tag{4}$$

ただし、行と列は $\emptyset, \{1\}$ の順で並べている。これらの行列は

$$A_{i,j}V_j = V_i D_{i,j}, \qquad V_i^{\mathsf{T}}\Delta_i V_i = I \ \ (\text{単位行列}), \qquad (\Delta_i A_{i,j})^{\mathsf{T}} = \Delta_j A_{j,i} \tag{5}$$

を満たし、従ってさらに

$$V_i^{\mathsf{T}}(\Delta_i A_{i,j})V_j = D_{i,j} \tag{6}$$

が得られる。さて、次に以下の対称行列を考える：

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{p_1p_2}}{2}\Delta_1 - \varepsilon_1\Delta_1 A_{1,1} & \eta\Delta_1 A_{1,2} - \frac{1}{2}\Delta_1 J_{1,2}\Delta_2 \\ \eta\Delta_2 A_{2,1} - \frac{1}{2}\Delta_2 J_{2,1}\Delta_1 & \frac{\sqrt{p_1p_2}}{2}\Delta_2 - \varepsilon_2\Delta_2 A_{2,2} \end{bmatrix}$$

ここで $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \eta \in \mathbb{R}$ であり、さらに $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geqslant 0$ も要請する。すなわち、(D) に於いて変数を以下のように取る：

$$\alpha = \beta = \frac{\sqrt{p_1p_2}}{2}, \qquad \sum_{x\sim y}\gamma_{x,y}E_{x,y} = \eta\Delta_1 A_{1,2}, \qquad Z = \begin{bmatrix} \varepsilon_1\Delta_1 A_{1,1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\Delta_2 A_{2,2} \end{bmatrix}$$

これが実際 (D) の最適実行可能解になるための条件を求めよう。まず、仮定 $p_1, p_2 \leqslant 1/2$ 及び $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geqslant 0$ より $Z \geqslant 0$ である。さらに、(5) 及び (6) より

$$\begin{bmatrix} V_1^{\mathsf{T}} & 0 \\ 0 & V_2^{\mathsf{T}} \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{p_1p_2}}{2} - \varepsilon_1 & 0 & \eta - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{p_1p_2}}{2} + \varepsilon_1 c_1^2 & 0 & -\eta c_1 c_2 \\ \eta - \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{p_1p_2}}{2} - \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & -\eta c_1 c_2 & 0 & \frac{\sqrt{p_1p_2}}{2} + \varepsilon_2 c_2^2 \end{bmatrix}$$

となる。従って、条件 $S \succcurlyeq 0$ は以下の 2 条件と同値である：

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{p_1p_2}}{2} - \varepsilon_1 & \eta - \frac{1}{2} \\ \eta - \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{p_1p_2}}{2} - \varepsilon_2 \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \qquad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{p_1p_2}}{2} + \varepsilon_1 c_1^2 & -\eta c_1 c_2 \\ -\eta c_1 c_2 & \frac{\sqrt{p_1p_2}}{2} + \varepsilon_2 c_2^2 \end{bmatrix} \succcurlyeq 0$$

これはまたさらに以下の 3 条件と同値である：

$$0 \leqslant \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leqslant \frac{\sqrt{p_1p_2}}{2} \tag{7}$$

$$\left(\frac{\sqrt{p_1p_2}}{2} - \varepsilon_1\right)\left(\frac{\sqrt{p_1p_2}}{2} - \varepsilon_2\right) \geqslant \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^2 \tag{8}$$

$$\left(\frac{\sqrt{p_1p_2}}{2} + \varepsilon_1 c_1^2\right)\left(\frac{\sqrt{p_1p_2}}{2} + \varepsilon_2 c_2^2\right) \geqslant \eta^2 c_1^2 c_2^2 \tag{9}$$

$p_1 \geqslant p_2$ の場合、(7), (8), (9) は以下の 1-パラメータ解を持つことが容易に確かめられる ($p_1 \leqslant p_2$ の場合は単に p_1, p_2 及び $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ をそれぞれ入れ替えれば良い)：

$$\varepsilon_1 = \frac{p_2}{p_1}\varepsilon_2 + \frac{(p_1 - p_2)p_2}{2\sqrt{p_1p_2}}, \qquad \eta = \frac{p_2}{\sqrt{p_1p_2}}\varepsilon_2 + \frac{q_2}{2}, \qquad 0 \leqslant \varepsilon_2 \leqslant \frac{\sqrt{p_1p_2}}{2} \tag{10}$$

これより (D) の目的値 $\sqrt{p_1p_2}$ の実行可能解が構成でき、従って上界 (3) が示された。ちなみに、1-パラメータ解 (10) は (8) 及び (9) を等号で満たす。

$n = 1$ の場合は以上である。一般の場合は、$p_1 = p_1^{(1)}, p_2 = p_2^{(1)}$ についてパラメータ $\alpha, \beta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \eta$ を (10) のように取り、(4) の行列達については、各 $p_1^{(\ell)}, p_2^{(\ell)}$ ($\ell \in [n]$) に対して同様に定義した行列達を、4 種類それぞれについてテンソル積を取れば良い。なお、半正定値計画の手法の醍醐味は、単に良い上界を与えるのみならず、等号が成立する場合について多くの情報が得られる点にある。実際、$U_1 \subset \Omega_1, U_2 \subset \Omega_2$ が $\mu_1(U_1)\mu_2(U_2) = p_1p_2$ を満たす場合、既に述べたように $S \bullet X_{U_1,U_2} = Z \bullet X_{U_1,U_2} = 0$ が成立し、S の固有ベクトルや Z の成分を詳細に解析することで、多くの場合行列 X_{U_1,U_2} を特定することができるのである。

参考文献

[1] P. Borg, Cross-intersecting integer sequences, preprint; arXiv:1212.6965.

[2] P. Delsarte, An algebraic approach to the association schemes of coding theory, Philips Res. Rep. Suppl. No. 10 (1973).

[3] P. C. Fishburn, P. Frankl, D. Freed, J. C. Lagarias, and A. M. Odlyzko, Probabilities for intersecting systems and random subsets of finite sets, SIAM J. Algebraic Discrete Methods 7 (1986) 73–79.

[4] E. Friedgut, On the measure of intersecting families, uniqueness and stability, Combinatorica 28 (2008) 503–528.

[5] L. Lovász, On the Shannon capacity of a graph, IEEE Trans. Inform. Theory 25 (1979) 1–7.

[6] M. Matsumoto and N. Tokushige, The exact bound in the Erdős–Ko–Rado theorem for cross-intersecting families, J. Combin. Theory Ser. A 52 (1989) 90–97.

[7] A. Schrijver, A comparison of the Delsarte and Lovász bounds, IEEE Trans. Inform. Theory 25 (1979) 425–429.

[8] S. Suda and H. Tanaka, A cross-intersection theorem for vector spaces based on semidefinite programming, Bull. Lond. Math. Soc. 46 (2014) 342–348; arXiv:1304.5466.

[9] S. Suda, H. Tanaka, and N. Tokushige, A semidefinite programming approach to a cross-intersection problem with measures, preprint; arXiv:1504.00135.

[10] N. Tokushige, On cross t-intersecting families of sets, J. Combin. Theory Ser. A 117 (2010) 1167–1177.

The Terwilliger Algebra of the Incidence Graph of the Hypercube

石川工業高等専門学校　一般教育科
冨山　正人

1　はじめに

Γ を connected finite graph とする．Γ の Terwilliger algebra T は最初 Terwilliger [3] で定義された．Terwilliger algebra T は有限次元で semi-simple $\mathbb{C}$-algebra である．すべての T-module は irreducible T-module たちの直和で表される．そのため，irreducible T-module たちを知ることに興味がある．

今回 bipartite graph $\widetilde{\Gamma}$ の Terwilliger algebra $\widetilde{T}$ と $\widetilde{\Gamma}$ の bipartite half Γ の Terwilliger algebra T との関係が分かった．このことから，Go [1] の hypercube Q_D の irreducible T-module たちを決定した結果を使うことで，Q_D の incidence graph $\widetilde{\Gamma}$ の irreducible $\widetilde{T}$-module たちを決定することができた [4].

2　Completely regular code

$\Gamma = (X, R)$ を connected finite graph とする．ここで，X は Γ の点集合，R は辺集合である．2 点 x と x' が辺で結ばれているとき，xx' と書くことにする．つまり，$xx' \in R$ である．X の空でない部分集合 C を Γ の code と呼ぶ．C の異なる 2 点が辺で結ばれている時，C を clique と呼ぶ．2 点 $x, x' \in X$ の距離を $d_\Gamma(x, x')$ で表す．また，$d_\Gamma(x, C) = \min\{d_\Gamma(x, x')|x' \in C\}$ とし，$t = \max\{d_\Gamma(x, C)|x \in X\}$ を Γ における C の covering radius と呼ぶ.

$$\Gamma_i(C) = \{x \in X | d_\Gamma(C, x) = i\} \qquad (0 \leq i \leq t)$$

とする．今後，$C = \{x\}$ のときには，単に x と表すこともある．また，$x \in \Gamma_i(C)$ $(0 \leq i \leq t)$ に対して，

$$\beta_i(C, x) = |\Gamma_{i+1}(C) \cap \Gamma_1(x)| \qquad (0 \leq i \leq t-1),$$
$$\alpha_i(C, x) = |\Gamma_i(C) \cap \Gamma_1(x)| \qquad (0 \leq i \leq t),$$
$$\gamma_i(C, x) = |\Gamma_{i-1}(C) \cap \Gamma_1(x)| \qquad (1 \leq i \leq t)$$

とする.

定義 2.1

C を covering radius t の code とする．$\beta_i(C,x), \alpha_i(C,x), \gamma_i(C,x)$ の値が i のみで決まり，$x \in \Gamma_i(C)$ の取り方によらないとき，C を completely regular code と呼ぶ．このとき，これらの値を $\beta_i(C), \alpha_i(C), \gamma_i(C)$ と表し，C の paramters と呼ぶ．

点集合が空でない 2 つの集合 X と Y に分けられ，X や Y の中には辺がないとき，$\widetilde{\Gamma} = (X \cup Y, \widetilde{R})$ を分割 $X \cup Y$ の bipartite graph と呼ぶ．

定義 2.2

(1) $\Gamma = (X, R)$ において，すべての $x \in X$ が同じ parameters の completely regular code となるとき，Γ を distance-regular graph と呼ぶ．

(2) 分割 $X \cup Y$ の bipartite graph $\widetilde{\Gamma} = (X \cup Y, \widetilde{R})$ において，すべての $x \in X$ が同じ parameters の completely regular code となり，すべての $y \in Y$ に対して，$|\widetilde{\Gamma}_1(y)|$ が一定であるとき，$\widetilde{\Gamma}$ を X における distance-semiregular graph と呼ぶ．

定義 2.3 (Suzuki [2])

$\Gamma = (X, R)$ において，$\mathcal{C}$ を clique の集合とする．すべての $C \in \mathcal{C}$ が大きさ $|C| = s + 1 \geq 2$ の completely regular code となっており，すべての辺 $xy \in R$ に対して，$c = |\{C \in \mathcal{C} | x, y \in C\}| \geq 1$ を満たしているとき，Γ を $\mathcal{C}$ に関しての parameters (s, c) の completely regular clique graph と呼ぶ．

定理 2.4 (Suzuki [2])

Γ を $\mathcal{C}$ に関しての parameters (s, c) の completely regular clique graph とする．このとき，すべての $C \in \mathcal{C}$ は同じ parameters の completely regular code である．

例 2.5

E を e 点集合とし，$X = E^D$ $(D \geq 1)$ とする．$R = \{xy | x$ と y が 1 ヶ所のみ異なる成分である $\}$ とすると $\Gamma = (X, R)$ は distance-regular graph となる．この graph は Hamming graph $H(D, e)$ と呼ばれる．また，同じ場所の成分のみが異なる点を集めた大きさ e の clique の集合を $\mathcal{C}$ とすると Hamming graph $H(D, e)$ は $\mathcal{C}$ に関しての parameters $(e-1, 1)$ の completely regular clique graph となる．

定義 2.6

(1) $\Gamma = (X, R)$ において，$\mathcal{C}$ を clique の集合とする．点集合を $X \cup \mathcal{C}$ とし，辺集合を $\widetilde{R} = \{xC | x \in C, x \in X, C \in \mathcal{C}\}$ とする分割 $X \cup \mathcal{C}$ の bipartite graph $\widetilde{\Gamma} = (X \cup \mathcal{C}, \widetilde{R})$ を Γ の incidence graph と呼ぶ.

(2) 分割 $X \cup Y$ の bipartite graph $\widetilde{\Gamma} = (X \cup Y, \widetilde{R})$ に対して，点集合を X とし，辺集合を $R = \{xy | x, y \in X, d_{\widetilde{\Gamma}}(x, y) = 2\}$ とする graph $\Gamma = (X, R)$ を $\widetilde{\Gamma}$ の X における bipartite half と呼ぶ.

定理 2.7 (Suzuki [2])

(1) $\Gamma = (X, R)$ が distance-regular graph かつ completely regular clique graph とする．このとき，Γ の incidence graph $\widetilde{\Gamma}$ は distance-semi-regular graph となる.

(2) $\widetilde{\Gamma} = (X \cup Y, \widetilde{R})$ が X における distance-semiregular graph とし，異なる 2 点 $y, y' \in Y$ に対して，$\widetilde{\Gamma}(y) \neq \widetilde{\Gamma}(y')$ とする．また，$\mathcal{C} = \{\widetilde{\Gamma}(y) | y \in Y\}$ とする．このとき，$\widetilde{\Gamma}$ の X における bipartite half Γ は distance-regular graph かつ $\mathcal{C}$ に関しての completely regular clique graph となる.

3 Terwilliger Algebra

$\Gamma = (X, R)$ を connected graph とし，$C \subset X$ を covering radius t の code とする．$|X| \times |X|$ 行列 A を

$$(A)_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{if } xy \in R \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (x, y \in X)$$

とする．A を Γ の adjacency matrix と呼ぶ．また，$|X| \times |X|$ 行列 E_i^* $(0 \le i \le t)$ は対角行列で

$$(E_i^*)_{xx} = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \Gamma_i(C) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (x \in X)$$

とする．E_i^* を Γ の ith dual idempotent と呼ぶ.

定義 3.1

(1) T を A と E_i^* $(0 \le i \le t)$ で生成された algebra とする．T を Γ の C に関する Terwilliger algebra と呼ぶ.

(2) $V = \mathbb{C}^X$ とし，W を V の部分空間とする．すべての $S \in T$ に対して，$SW \subset W$ を満たすとき，W を T-module と呼ぶ.

(3) T-module W に対して，W が W でも 0 でもない T-module W' を含まないとき irrducible と呼び，すべての i について $\dim E_i^* W \leq 1$ を満たすとき thin と呼ぶ．

T-module W に対して，次のような分解がある．

$$W = E_0^*W + E_1^*W + \cdots + E_t^*W \qquad \text{(orthgonal direct sum)}$$

$x \in X$ に対して，$\hat{x} \in V$ を x 成分のみ 1 で他は 0 となるベクトルとする．また，$\mathbf{1}_i = \sum_{x \in \Gamma_i(C)} \hat{x}$ とする．

例 3.2

(1) C が completely regular code であれば，$\mathrm{Span}\{\mathbf{1}_0, \mathbf{1}_1, \ldots, \mathbf{1}_t\}$ は thin irreducible T-module となる．

(2) T を x に関する Hamming graph の Terwilliger algebra とすると，すべての irreducible T-module は thin である．

行列 L, F, R を

$$L = \sum_{i=1}^{t} E_{i-1}^* A E_i^*, \quad F = \sum_{i=0}^{t} E_i^* A E_i^*, \quad R = \sum_{i=0}^{t-1} E_{i+1}^* A E_i^*$$

とする．W を T-module とし，$w \in E_i^*W$ とすると，

$$Aw = Lw + Fw + Rw,$$

$$Lw \in E_{i-1}^*W, \quad Fw \in E_i^*W, \quad Rw \in E_{i+1}^*W$$

となる．W が irreducible であれば，$r \leq i \leq r+d$ のときに $\dim E_i^*W \geq 1$ となり，それ以外の i では $\dim E_i^*W = 0$ となる r と d が存在する．r を W の endpoint と呼び，d を W の diameter と呼ぶ．特に，W が thin irreducible であれば，basis $w_0, w_1, \ldots, w_d$ で $w_i \in E_{r+i}^*W$ $(0 \leq i \leq d)$ となるものがある．

4 Bipartite Graph

$\widetilde{\Gamma} = (X \cup Y, \widetilde{R})$ を分割 $X \cup Y$ の bipartite graph とし，$\Gamma = (X, R)$ を $\widetilde{\Gamma}$ の X における bipartite half とする．また，すべての $x \in X$ に対して $\widetilde{\Gamma}_1(x) = \widetilde{k}$ をみたし，$d_{\widetilde{\Gamma}}(x, x') = 2$ となるすべての $x, x' \in X$ に対し，$\widetilde{c} = |\widetilde{\Gamma}_1(x) \cap \widetilde{\Gamma}_1(x')|$ を満たすとする．

$\widetilde{A}$ を $\widetilde{\Gamma}$ の adjacency matrix とする．$|X| \times |Y|$ 行列 B の (x, y)-entry が

$$(B)_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{if } xy \in \widetilde{R} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (x \in X, y \in Y)$$

とすると

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} O & B \\ B^T & O \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A}^2 = \begin{pmatrix} BB^T & O \\ O & B^TB \end{pmatrix}$$

となり，$x, x' \in X$ に対して，$(BB^T)_{xx'} = |\widetilde{\Gamma}_1(x) \cap \widetilde{\Gamma}_1(x')|$ となる．

$C \subset X$ を $\widetilde{\Gamma}$ の covering radius $\widetilde{t}$ の code とすると，C は Γ の covering radius $[\frac{\widetilde{t}}{2}]$ の code となる．

$\widetilde{E}_i^*$ を $\widetilde{\Gamma}$ の ith dual idempotent とし，

$$\widetilde{E}_X^* = \sum_{i:\text{even}} \widetilde{E}_i^*$$

とおくと，

$$\frac{1}{\widetilde{c}}(\widetilde{A}^2\widetilde{E}_X^* - \widetilde{k}\widetilde{E}_X^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\widetilde{c}}(BB^T - \widetilde{k}I) & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

を満たす．$\widetilde{T}_X$ を $\widetilde{A}^2\widetilde{E}_X^*$ と $\widetilde{E}_{2i}^*$ $(0 \leq i \leq t)$ で生成された algbra とすると T と $\widetilde{T}_X$ は同型となる．よって，T と $\widetilde{T}_X$ を同一視し，$V = \mathbb{C}^X$ の部分空間 W と $\widetilde{V} = \mathbb{C}^{X\cup Y}$ の部分空間 $\begin{pmatrix} W \\ O \end{pmatrix}$ を同一視する．

定理 4.1

(1) $\widetilde{W}$ が $\widetilde{T}$-module であれば，$W = \widetilde{E}_X^*\widetilde{W}$ は T-module となる．

(2) $\widetilde{T}$-module $\widetilde{W}$ が irreducible で $W = \widetilde{E}_X^*\widetilde{W} \neq 0$ であれば，$W = \widetilde{E}_X^*\widetilde{W}$ は irreducible である．このとき，$\widetilde{W} = W + \widetilde{A}W$ となる．

(3) $\widetilde{T}$-module $\widetilde{W}$ が thin であれば，$W = \widetilde{E}_X^*\widetilde{W}$ は thin である．

(4) W が T-module であれば，$\widetilde{W} = W + \widetilde{A}W$ は $\widetilde{T}$-module である．このとき，$W = \widetilde{E}_X^*\widetilde{W}$ である．

(5) T-module W が irreducible であれば，$\widetilde{W} = W + \widetilde{A}W$ は irreducible である．

T-module W が thin であっても $\widetilde{W} = W + \widetilde{A}W$ は thin とは限らない．$\dim\widetilde{E}_{2i}^*\widetilde{W} = \dim E_i^*W \leq 1$ なので，$\widetilde{w} \in \widetilde{E}_{2i}^*\widetilde{W}$，$\widetilde{w}' \in \widetilde{E}_{2i+2}^*\widetilde{W}$ をとると，$\widetilde{E}_{2i+1}^*\widetilde{A}\widetilde{w} \in \widetilde{E}_{2i+1}^*\widetilde{W}$，$\widetilde{E}_{2i+1}^*\widetilde{A}\widetilde{w}' \in \widetilde{E}_{2i+1}^*\widetilde{W}$ をみたす．よって，$\widetilde{E}_{2i+1}^*\widetilde{W} = \text{Span}\{\widetilde{E}_{2i+1}^*\widetilde{A}\widetilde{w}, \widetilde{E}_{2i+1}^*\widetilde{A}\widetilde{w}'\}$，$\widetilde{E}_{2t+1}^*\widetilde{W} = \text{Span}\{\widetilde{E}_{2t+1}^*\widetilde{A}\widetilde{w}'\}$ となるので，$\dim\widetilde{E}_{2i+1}^*\widetilde{W} \leq 2$，$\dim\widetilde{E}_{2t+1}^*\widetilde{W} \leq 1$ となる．

5 Hypercube

Hamming graph $H(D,e)=(X,R)$ は $e=2$ のときには hypercube とも呼ばれる．このとき，$\mathcal{C}$ は辺集合 R となる．

ここでは，$\Gamma=(X,R)$ を hypercube Q_D，$\widetilde{\Gamma}=(X\cup R,\widetilde{R})$ を Q_D の incidence graph とし，$C=\{x\}\subset X$ とする．また，T を x に関する Γ の Terwilliger algebra，$\widetilde{T}$ を x に関する $\widetilde{\Gamma}$ の Terwilliger algebra とする．

定理 5.1 $\widetilde{W}$ を irreducible $\widetilde{T}$-module とし，$W=\widetilde{E}^*_X\widetilde{W}$ とする．また，$\widetilde{r}$ を $\widetilde{W}$ の endpoint，$\widetilde{d}$ を $\widetilde{W}$ の diameter とする．

(1) $W\neq 0$ であれば W は thin irreducible T-module となり，W の basis $w_0,w_1,\dots,w_d$ で $w_i\in E^*_{r+i}W$ となるものが存在する．ここで，r は W の endpoint で d は W の diameter である．さらに，次のどれかが成立する．

(1a) $\widetilde{W}$ が thin となり，$\widetilde{r}=0$, $\widetilde{d}=2D$, $\dim\widetilde{W}=2D+1$,
$\widetilde{W}=\mathrm{Span}\{\widetilde{\mathbf{1}}_0,\widetilde{\mathbf{1}}_1,\dots,\widetilde{\mathbf{1}}_{2D}\}$ である．
このとき, $r=0$, $d=D$ である．

(1b) $\widetilde{W}$ が thin となり，$D=2r$, $\widetilde{r}=D-1$, $\widetilde{d}=2$, $\dim\widetilde{W}=3$ であり，basis $\widetilde{L}\widetilde{w_0},\widetilde{w_0},\widetilde{R}\widetilde{w_0}$ で $\widetilde{L}\widetilde{w_0}\in\widetilde{E}^*_{D-1}\widetilde{W}$, $\widetilde{w}_0\in\widetilde{E}^*_D\widetilde{W}$, $\widetilde{R}\widetilde{w}_0\in\widetilde{E}^*_{D+1}\widetilde{W}$. となるものが存在する．
このとき, $r=\frac{D}{2}$, $d=0$ となる．

(1c) $\widetilde{W}$ は thin とはならず, $\widetilde{r}=2r-1$ $(1\le\widetilde{r}\le D-2)$, $\widetilde{d}=2(d+1)$, $\dim\widetilde{W}=3(d+1)$ であり，
basis $\widetilde{L}\widetilde{w}_0,\widetilde{w}_0,\widetilde{R}\widetilde{w}_0,\widetilde{L}\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_1,\widetilde{R}\widetilde{w}_1,\dots,\widetilde{L}\widetilde{w}_d,\widetilde{w}_d,\widetilde{R}\widetilde{w}_d$ で $\widetilde{L}\widetilde{w}_i\in\widetilde{E}^*_{2r+i-1}\widetilde{W},\widetilde{w}_i\in\widetilde{E}^*_{2r+i}\widetilde{W},\widetilde{R}\widetilde{w}_i\in\widetilde{E}^*_{2r+i+1}\widetilde{W}$ となるものが存在する．
このとき，$\dim\widetilde{E}^*_{2r+2i}\widetilde{W}=1$ $(0\le i\le d)$, $\dim\widetilde{E}^*_{2r-1}\widetilde{W}=1,\dim\widetilde{E}^*_{2r+2d+1}\widetilde{W}=1,\dim\widetilde{E}^*_{2r+2i+1}\widetilde{W}=2$ $(0\le i\le d-1)$ となる．

(2) $W=0$ であれば，$\widetilde{W}$ は thin となり，$\widetilde{r}=2i+1$ となる i $(0\le i\le D-1)$ がある．$\widetilde{d}=0$ である．$\dim\widetilde{W}=1$ となり，basis $\widetilde{w}$ で $\widetilde{w}\in\widetilde{E}^*_{2i+1}\widetilde{W}$ となるものが存在する．

参考文献

[1] Go, J. T.: The Terwilliger algebra of the hypercube, Europ. J. Conmbin. 23. 399–430 (2002).

[2] Suzuki, H.: Completely regular clique graphs, J. Algebraic Combin. 40 (2014), 233–244.

[3] Terwilliger, P: The subconstituent algebra of an association scheme, I. Journal of Combin. 1(4). 363-388 (1992).

[4] Tomiyama, M: The Terwilliger algebra of the incidence graph of the hypercube, preprint.

A complex Hadamard matrix in an odd orthogonal scheme

生田卓也（神戸学院大学）

概 要

クラス 3 の even orthogonal scheme は無限系列の複素アダマール行列を持つことが知られています。この講演の目的は、クラス 3 の odd orthogonal scheme に付随する複素アダマール行列を考察し、locally Petersen graph のみが複素アダマール行列を持つことを 2 種類の証明で示すことです。この研究は東北大学の宗政昭弘先生との共同研究です。

1 序論

X は位数 n の有限集合、$M_X(\mathbb{C})$ は行と列が X の元で添え字付けられた複素数を成分に持つ n 次正方行列全体の集合、$\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とします。

定義 1.1. 複素アダマール行列 $W \in M_X(\mathbb{C}^\times)$ は、すべての成分が絶対値 1 の複素数で直交関係式 $WW^* = nI$ を満たす行列である。但し、$*$ は Hermitian transpose、I は単位行列である。

有限アベール群の指標表は複素アダマール行列の例です。この講演では 1 の n 乗根のみでなく、複素平面の単位円周上のすべての複素数を扱うことに注意します。このように、複素アダマール行列はアダマール行列の一般化です。複素アダマール行列は位数についての制限もないので、アダマール行列より比較的存在しやすい状況です。“存在しやすい状況” なので、さらに私たちは正則性を持つ対称な複素アダマール行列の構成を目指しています。ここで言う “正則性” はアソシエーション・スキームであり、私たちはアソシエーション・スキームの枠組みで構成の興味を持っています。私たちの問題設定は次の通りです。

問題 1. $\mathfrak{X} = (X\{R_i\}_{i=0}^d)$ を対称アソシエーションとする。$\{A_i\}_{i=0}^d$ を $\{R_i\}_{i=0}^d$ に対する隣接行列とする。このとき

$$W = \sum_{i=0}^{d} w_i A_i,$$

が複素アダマール行列になる $\mathfrak{X} = (X\{R_i\}_{i=0}^d)$ を見つけよ。また、複素アダマール行列 W の性質を調べよ。

問題 1 の始まりは、Chan-Godsil ([4]) と Chan ([3]) の研究です。最初に Chan-Godsil は [4] で SRG に付随する複素アダマール行列を考察しています。その後、Chan は [3] で直径 3 の antipodal DRG に付随する複素アダマール行列を考察し、実際に 15 点の Petersen graph の Line graph に付随する複素アダマール行列の例を 3 つ構成しています。これら Chan の 3 つの例は、4 つの実在する無限系列の複素アダマール行列に一般化できます ([10])。これまでのところ、無限系列で複素アダマール行列を持つ対称アソシエーション・スキームは、クラス $d = 3, 4$ の even orthogonal scheme ([10, 11]) です。これらのスキームは imprimitive です。

一方、複素アダマール行列を持つクラス $d = 3$ の odd orthogonal scheme は、その最初の例である locally Petersen graph (65 点) のみが知られています。これ以外の存在の有無は未確認です。Odd orthogonal scheme は primitive です。このスキームに付随する複素アダマール行列が存在するかどうかは大切な研究テーマです。

Odd orthogonal scheme の first eigenmatrix P は次で与えられます：

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{q^3-4q^2+3q}{4} & \frac{q^3-q}{4} & q^2-1 \\ 1 & 0 & -q & q-1 \\ 1 & \frac{-q^2+2q+3}{4} & \frac{q^2-2q+1}{4} & -2 \\ 1 & q & 0 & -q-1 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

但し、q は 5 以上の奇数です。

この講演の目的は次の定理を証明することです。

定理 1.1. $\mathfrak{X} = (X\{R_i\}_{i=0}^3)$ を (1) の first eigenmatrix P を持つ任意のアソシエーション・スキームとする。このとき、$q \geq 7$ なら零と異なる任意の w_1, w_2, w_3 に対して

$$W = A_0 + w_1A_1 + w_2A_2 + w_3A_3 \tag{2}$$

は複素アダマール行列にならない。

注意 1. 任意の $q \geq 7$ に対して非自明な type-II 行列が存在することは、後に述べる第 4 章の (4) の第 2 項を解くことで確認できます。(4) の第 1 項の解は自明な type-II 行列に対応しています。

2 100 点以下の $d = 3$ の対称 AS に付随する複素アダマールの例

E. van Dam は [7, Appendix B] で 100 点以下のクラス 3 の対称アソシエーション・スキームで、成分がすべて整数である first eigenmatrix P を分類しています。そのような例は [7, Appendix B] によれば 94 個あります。これに対して問題 1 を解くと、複素アダマール行列を持つアソシエーション・スキームは次の 8 つに限ります。

	Graph	vertices
No.1	Petersen graph の Line graph	15
No.2	Hamming scheme $H(3,3)$	27
No.3	Johnson scheme $J(7,3)$	35
No.4	Strongly regular graph $(35,16,6,8)$ spread	35
No.5	$GH(2,2)$	63
No.6	Strongly regular graph $(63,30,13,15)$ spread	63
No.7	Locally Petersen graph	65
No.8	Strongly regular graph $(99,48,22,24)$ spread	99

表 1

表 1 に関する知られている情報は次のとおりです。

(i) No.1 は Chan が [3] で最初に複素アダマール行列を見つけたグラフです。その後、私たちは新しい複素アダマール行列の例を見つけ、さらに、No.1,4,6,8 を拡張して無限系列の複素アダマール行列を構成しています ([10])。

(ii) No.2,3 について、一般の $H(n,3)$ と $J(n,3)$ に付随する複素アダマール行列について、Chan はある一定以上の条件を満たせば $H(n,3)$ と $J(n,3)$ に付随する複素アダマール行列は存在しないことを証明しています。

(iii) No.5 が属するスキームの無限系列に付随する複素アダマール行列については未解決です。

(iv) [2, Chap.12.2] によれば、No.7 が属する対称アソシエーション・スキームは odd orthogonal scheme であり、このスキームの最初の例が No.7 であると書かれています。

3 odd orthogonal scheme に付随する type-II 行列の数値計算

(1) から $n = q(q^2+1)/2$ です。いくつかの q に対して、n の値は次のようになります：

q	5	7	9	...
n	65	175	369	...

表 2

表 1 は 100 点以下の対称アソシエーション・スキームに付随する複素アダマール行列の分類表です。表 2 で 65 点の次は 175 点ですから、odd orthogonal scheme に付随する複素アダマール行列は存在すると推測できそうです。

$X_{0,1} = w_1 + w_1^{-1}$ とおきます。$X_{0,1}$ は w_1 の実部の 2 倍の値なので、w_1 が絶対値 1 の複素数なら

$$-2 \leq X_{0,1} \leq 2 \tag{3}$$

でなければなりません。$q \leq 15$ の q に対して複素アダマール行列の存在を確認するための計算をすると次の表になります。

q	$X_{0,1}$ の実数解
5	-63, $-4.9064591277114950147401600107$1, $-1.79547002106489492180805113558$, $-0.99023314403972972808865210594$8, $0.28945885132555136940631853309$1, $0.9384912302078290403565493852$73
7	-173, $-6.0343811069546060067408296722$8
9	-367, $-7.6262939345876207527329075349$7
11	-669, $-9.4417014224655935323992722799$7
13	-1103, $-11.340488160165211890579034551$6
15	-1693, $-13.276997531492100789821661972$0

表 3

表 3 で (3) から $q = 5$ のときのみ複素アダマール行列は存在し、その他の q の値に対して存在しなさそうであることがわかります。このことを次の章で証明したいと思います。

4　定理 1.1 の証明

$$X_{i,j} = \frac{w_i}{w_j} + \frac{w_j}{w_i} \quad (0 \le i \le j \le 3)$$

とおきます。6 個の変数 $X_{i,j}$ に関して [13] と [10] に現れる 10 個の多項式を考えて、$X_{0,1}$ について elimination ideal を計算します。このとき、次の式を得ます：

$$\left(X_{0,1} + \frac{q^3 + q - 4}{2}\right)\left(X_{0,1}^7 + c_6 X_{0,1}^6 + c_5 X_{0,1}^5 + c_4 X_{0,1}^4 + c_3 X_{0,1}^3 + c_2 X_{0,1}^2 + c_1 X_{0,1} + c_0\right) = 0, \qquad (4)$$

但し、

$$\begin{aligned}
c_6 =& -\frac{q(q-3)(q+1)p_6}{2L},\\
c_5 =& \frac{p_5}{4L},\\
c_4 =& -\frac{p_4}{8L},\\
c_3 =& \frac{p_3}{16L},\\
c_2 =& \frac{p_2}{16L},\\
c_1 =& \frac{p_1}{4L},\\
c_0 =& \frac{p_0}{4L},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_6 =& 15q^{10} - 109q^9 + 153q^8 - 450q^7 + 324q^6 - 244q^5 - 672q^4 + 1602q^3 - 603q^2 + 225q + 15,\\
p_5 =& 17q^{15} - 240q^{14} + 992q^{13} - 1330q^{12} + 2693q^{11} - 544q^{10} - 5996q^9 + 13318q^8 - 30101q^7\\
&+ 32224q^6 - 944q^5 - 46246q^4 + 17023q^3 - 6416q^2 - 1092q + 18,\\
p_4 =& 9q^{17} - 183q^{16} + 1180q^{15} - 2419q^{14} + 588q^{13} - 259q^{12} - 32868q^{11} + 52661q^{10} - 151178q^9\\
&+ 157207q^8 - 228044q^7 + 164335q^6 + 144332q^5 - 277065q^4 + 110740q^3 - 14897q^2\\
&- 10647q + 492,\\
p_3 =& 2q^{19} - 59q^{18} + 560q^{17} - 1698q^{16} - 2142q^{15} + 18664q^{14} - 56378q^{13} + 199524q^{12} - 308786q^{11}\\
&+ 753114q^{10} - 784434q^9 + 1060848q^8 - 864650q^7 + 606336q^6 + 874322q^5 - 684420q^4\\
&+ 331800q^3 + 127225q^2 - 54550q + 5330,\\
p_2 =& 2q^{20} - 37q^{19} + 134q^{18} + 1269q^{17} - 11844q^{16} + 40652q^{15} - 107896q^{14} + 275524q^{13}\\
&- 456900q^{12} + 910522q^{11} - 1258204q^{10} + 1549494q^9 - 1321872q^8 + 1856700q^7 - 613368q^6\\
&- 196620q^5 + 21106q^4 + 92131q^3 - 472122q^2 + 82461q - 14300,\\
p_1 =& 3q^{20} - 71q^{19} + 648q^{18} - 2935q^{17} + 7962q^{16} - 19814q^{15} + 49400q^{14} - 81914q^{13} + 130402q^{12}\\
&- 222852q^{11} + 305496q^{10} - 306152q^9 + 371568q^8 - 551722q^7 + 277832q^6 - 382182q^5\\
&+ 227715q^4 - 207013q^3 + 147936q^2 - 19393q + 4750,\\
p_0 =& q^21 - 24q^{20} + 228q^{19} - 1092q^{18} + 2889q^{17} - 5220q^{16} + 10880q^{15} - 24416q^{14} + 36674q^{13}\\
&- 38368q^{12} + 85640q^{11} - 131368q^{10} + 66778q^9 - 296056q^8 + 229344q^7 - 306816q^6\\
&+ 316253q^5 - 196456q^4 + 163380q^3 - 66740q^2 + 9533q - 2500,\\
L =& q^2(q-1)(q^2+3)(5q^2-2q+1)(q+1)^2(q-3)^2.
\end{aligned}$$

(4) で

$$X_{0,1} + \frac{q^3+q-4}{2} = 0 \tag{5}$$

なら $X_{0,1} = -\frac{q^3+q-4}{2} < -2$ より (3) から複素アダマール行列になりません。これより、複素アダマール行列が存在するなら、すなわち、$X_{0,1} \in [-2,2]$ なら、$X_{0,1}$ は

$$f(X_{0,1}) = X_{0,1}^7 + c_6 X_{0,1}^6 + c_5 X_{0,1}^5 + c_4 X_{0,1}^4 + c_3 X_{0,1}^3 + c_2 X_{0,1}^2 + c_1 X_{0,1} + c_0 = 0 \tag{6}$$

の解であることになります。

表 4 を見ると、(6) の実数解は $q=5$ のとき 5 個あり、$q \geq 7$ の奇数のとき実数解は 1 個です。(6) は奇数次数の多項式なので、必ず 1 個は実数解を持つます。

$$f(-q) < 0, \qquad f(-q+2) > 0$$

より $f(X_{0,1})$ は必ず区間 $(-q,-q+2)$ に解を持つことがわかります。後は (6) が $q \geq 7$ の奇数に対して唯一つの実数解しか持たないことを示せばよいことがわかります。そのために、次の Strum の定理を使います：

定理 4.1.

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0 \ (b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}, b_n \neq 0)$$

を実 n 次多項式とする。$g(x)$ のスツルム列を

$$g_0(x) := g(x),\ g_1(x) := g'(x),\ g_k(x) := -\mathrm{Remainder}(g_{k-2}(x), g_{k-1}(x))(k=2,3,\ldots)$$

で定める。ここで、$g_k(x) := -\mathrm{Remainder}(g_{k-2}(x), g_{k-1}(x))$ は、$g_{k-2}(x)$ を $g_{k-1}(x)$ で割った余りを表す。スツルム列で、0 でない最後の多項式を $g_m(x)$ と書く。$g_i(x)$ の最高次の次数を d_i、最高次の係数を c_i とおく。このとき、$g(x) = 0$ の実数解の個数は、$(-1)^{d_0}c_0, (-1)^{d_1}c_1, \ldots, (-1)^{d_m}c_m$ の符号変化の回数から $c_0, c_1, \ldots, c_m$ の符号変化の回数を引いたものに等しい。

定理 4.1 を (6) に適用すると次を得ます：

(i) $f_0(x) = f(x)$, $c_0 = 1$, $d_0 = 7$,

(ii) $f_1(x) = f'(x)$, $c_1 = 7$, $d_1 = 6$,

(iii) $f_2(x) := -\mathrm{Remainder}(f_0, f_1)$ とおく。このとき

$$\begin{aligned}
c_2 =& \frac{c_{2_q}(q-9) + c_{2_r}}{(q(q-1)(q-3)(q+1)(q^2+3)(5q^2-2q+1))^2}, \\
c_{2_q} =& \frac{8}{245}q^{19} + \frac{143}{2450}q^{18} + \frac{1039}{1225}q^{17} + \frac{3078}{1225}q^{16} + \frac{126643}{2450}q^{15} + \frac{979653}{2450}q^{14} + \frac{1878487}{490}q^{13} \\
&+ \frac{16768949}{490}q^{12} + \frac{15429343}{50}q^{11} + \frac{6802452159}{2450}q^{10} + \frac{12244747791}{490}q^{9} + \frac{78715926451}{350}q^{8} \\
&+ \frac{4959105005497}{2450}q^{7} + \frac{1785277757919}{98}q^{6} + \frac{401687496555273}{2450}q^{5} + \frac{723037493708351}{490}q^{4} \\
&+ \frac{32536687217175637}{2450}q^{3} + \frac{20916441782464437}{175}q^{2} + \frac{2635471664590553499}{2450}q \\
&+ \frac{135538542750371301}{14}, \\
c_{2_r} =& \frac{106736602415917400064}{1225}.
\end{aligned}$$

このとき、c_{2_q} の係数はすべて >0、かつ、$c_{2_r}>0$ です。これより $q\geq 9$ なら $c_2>0$ です。さらに、

$$\begin{aligned} q =&5 \text{ なら } c_2<0,\\ q =&7 \text{ なら } c_2>0 \end{aligned}$$

が成り立ちます。

(iv) $f_3(x) := -\mathrm{Remainder}(f_1, f_2)$ とおく。このとき

$$\begin{aligned} c_3 =&\frac{c_{3_q}(q-29)+c_{3_r}}{c_{3_d}},\\ &c_{3_q} \text{ の係数はすべて } >0,\\ &c_{3_r}>0,\\ &c_{3_d}>0 \end{aligned}$$

を得ます。これより $q\geq 29$ なら $c_3>0$ です。さらに、

$$\begin{aligned} q =&5,\ldots,11 \text{ なら } c_3<0,\\ q =&13,\ldots,27 \text{ なら } c_3>0 \end{aligned}$$

が成り立ちます。

(v) $f_4(x) := -\mathrm{Remainder}(f_2, f_3)$ とおく。このとき

$$\begin{aligned} c_4 =&\frac{c_{4_q}(q-69)+c_{4_r}}{c_{4_d}},\\ &c_{4_q} \text{ の係数はすべて } >0,\\ &c_{4_r}>0,\\ &c_{4_d}>0 \end{aligned}$$

を得ます。これより $q\geq 69$ なら $c_4>0$ です。さらに、

$$q = 5,\ldots,67 \text{ なら } c_4<0$$

が成り立ちます。

(vi) $f_5(x) := -\mathrm{Remainder}(f_3, f_4)$ とおく。このとき

$$\begin{aligned} c_5 =&\frac{c_{5_q}(q-137)+c_{5_r}}{c_{5_d}},\\ &c_{5_q} \text{ の係数はすべて } >0,\\ &c_{5_r}>0,\\ &c_{5_d}>0 \end{aligned}$$

を得ます。これより $q\geq 137$ なら $c_5>0$ です。さらに、

$$\begin{aligned} q =&5,7,9 \text{ なら } c_5<0,\\ q =&10,\ldots,43 \text{ なら } c_5>0,\\ q =&45,\ldots,135 \text{ なら } c_5<0 \end{aligned}$$

が成り立ちます。

(vii) $f_6(x) := -\mathrm{Remainder}(f_4, f_5)$ とおく。このとき

$$\begin{aligned} c_6 =& \frac{c_{6_q}(q-133)+c_{6_r}}{c_{6_d}}, \\ & c_{6_q} \text{ の係数はすべて} > 0, \\ & c_{6_r} > 0, \\ & c_{6_d} > 0 \end{aligned}$$

を得ます。これより $q \geq 133$ なら $c_6 > 0$ です。さらに、

$$\begin{aligned} q =& 5 \text{ なら } c_6 < 0, \\ q =& 7, \ldots, 131 \text{ なら } c_6 > 0 \end{aligned}$$

が成り立ちます。

(viii) $f_7(x) := -\mathrm{Remainder}(f_5, f_6)$ とおく。このとき

$$\begin{aligned} c_7 =& \frac{c_{7_q}(q-67)+c_{7_r}}{c_{7_d}}, \\ & c_{7_q} \text{ の係数はすべて} > 0, \\ & c_{7_r} > 0, \\ & c_{7_d} > 0 \end{aligned}$$

を得ます。これより $q \geq 67$ なら $c_7 > 0$ です。さらに、

$$q = 5, \ldots, 65 \text{ なら } c_7 < 0$$

が成り立ちます。

以上の計算を表にまとめると、次のようになります。

q	$-c_0$	c_1	$-c_2$	c_3	$-c_4$	c_5	$-c_6$	c_7	符号変化の回数
5	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	1
$7, 9$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	3
11	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	3
$13, \ldots, 43$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	3
$q \geq 45$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	3
q	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	符号変化の回数
5	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	6
$7, 9$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	4
11	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	4
$13, \ldots, 43$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	4
$q \geq 45$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	4

この表から $q \geq 7$ なら (6) は定理 4.1 を用いて $4-3=1$ 個の実数解しか持たないことがわかります。

5　定理 1.1 の別証明

(6) は $X_{0,1}$ に関する多項式でしたが、分母を払って q に関する多項式を見ると次のようになります。但し、$Z = X_{0,1}$ とおいています。

定数項	$72Z^5 - 984Z^4 + 5330Z^3 - 14300Z^2 + 19000Z - 10000$
q の係数	$360Z^6 - 4368Z^5 + 21294Z^4 - 54550Z^3 + 82461Z^2 - 77572Z + 38132$
q^2 の係数	$-432Z^7 + 5640Z^6 - 25664Z^5 + 29794Z^4 + 127225Z^3 - 472122Z^2 + 591744Z - 266960$
q^3 の係数	$720Z^7 - 10992Z^6 + 68092Z^5 - 221480Z^4 + 331800Z^3 + 92131Z^2 - 828052Z + 653520$
q^4 の係数	$-1344Z^7 + 27000Z^6 - 184984Z^5 + 554130Z^4 - 684420Z^3 + 21106Z^2 + 910860Z - 785824$
q^5 の係数	$-1728Z^7 + 14328Z^6 - 3776Z^5 - 288664Z^4 + 874322Z^3 - 196620Z^2 - 1528728Z + 1265012$
q^6 の係数	$2528Z^7 - 29424Z^6 + 128896Z^5 - 328670Z^4 + 606336Z^3 - 613368Z^2 + 1111328Z - 1227264$
q^7 の係数	$352Z^7 + 9248Z^6 - 120404Z^5 + 456088Z^4 - 864650Z^3 + 1856700Z^2 - 2206888Z + 917376$
q^8 の係数	$-320Z^7 - 3664Z^6 + 53272Z^5 - 314414Z^4 + 1060848Z^3 - 1321872Z^2 + 1486272Z - 1184224$
q^9 の係数	$576Z^7 - 6120Z^6 - 23984Z^5 + 302356Z^4 - 784434Z^3 + 1549494Z^2 - 1224608Z + 267112$
q^{10} の係数	$-432Z^7 + 3432Z^6 - 2176Z^5 - 105322Z^4 + 753114Z^3 - 1258204Z^2 + 1221984Z - 525472$
q^{11} の係数	$80Z^7 - 2608Z^6 + 10772Z^5 + 65736Z^4 - 308786Z^3 + 910522Z^2 - 891408Z + 342560$
q^{12} の係数	$1112Z^6 - 5320Z^5 + 518Z^4 + 199524Z^3 - 456900Z^2 + 521608Z - 153472$
q^{13} の係数	$-120Z^6 + 3968Z^5 - 1176Z^4 - 56378Z^3 + 275524Z^2 - 327656Z + 146696$
q^{14} の係数	$-960Z^5 + 4838Z^4 + 18664Z^3 - 107896Z^2 + 197600Z - 97664$
q^{15} の係数	$68Z^5 - 2360Z^4 - 2142Z^3 + 40652Z^2 - 79256Z + 43520$
q^{16} の係数	$366Z^4 - 1698Z^3 - 11844Z^2 + 31848Z - 20880$
q^{17} の係数	$-18Z^4 + 560Z^3 + 1269Z^2 - 11740Z + 11556$
q^{18} の係数	$-59Z^3 + 134Z^2 + 2592Z - 4368$
q^{19} の係数	$2Z^3 - 37Z^2 - 284Z + 912$
q^{20} の係数	$2Z^2 + 12Z - 96 = 2(Z+3)^2 - 144 \geq -112$
q^{21} の係数	4

変数 Z の値は $-2 \leq Z \leq 2$ なので、例えば

$$-Z^4 \text{なら最小値は} -16,$$
$$Z^4 \text{ なら最小値は } 0,$$
$$-Z^3 \text{ なら最小値は} -8,$$
$$Z^3 \text{ なら最小値は} -8$$

と入れ替えます。q は正の値なので、(6) は次の $h(q)$ を用いて下から評価されます。

$$
\begin{aligned}
h(q) =& 4q^{21} - 120q^{20} + 180q^{19} - 10024q^{18} - 16692q^{17} - 145536q^{16} - 172064q^{15} - 1104480q^{14} \\
&- 1113112q^{13} - 4790720q^{12} - 4432400q^{11} - 15837248q^{10} - 9690472q^{9} - 24941824q^{8} \\
&- 14311584q^{7} - 22344192q^{6} - 14534140q^{5} - 14174424q^{4} - 10175256q^{3} - 5233280q^{2} \\
&- 693188q - 165888 \\
=& (q-33)(4q^{20} + 12q^{19} + 576q^{18} + 8984q^{17} + 279780q^{16} + 9087204q^{15} + 299705668q^{14} \\
&+ 9889182564q^{13} + 326341911500q^{12} + 10769278288780q^{11} + 355386179097340q^{10} \\
&+ 11727743894374972q^{9} + 387015548504683604q^{8} + 12771513100629617108q^{7} \\
&+ 421459932320763052980q^{6} + 13908177766585158404148q^{5} + 458969866297310212802744q^{4} \\
&+ 15146005587811237008316128q^{3} + 499818184397770821264256968q^{2} \\
&+ 16494000085126437101715246664q + 544302002809172424356602446724) \\
&+ 17961966092702690003767880576004.
\end{aligned}
$$

従って、$q \geq 33$ なら (6) は正であるから区間 $[-2, 2]$ に解を持たないことがわかります。$q = 7, \ldots, 31$ なら具体的計算により、$[-2, 2]$ に解を持たないことがわかります。

参考文献

[1] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics I: Association Schemes*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, 1984.

[2] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, and A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.

[3] A. Chan, *Complex Hadamard matrices and strongly regular graphs*, arXiv:1102.5601.

[4] A. Chan and C. Godsil, *Type-II matrices and combinatorial structures*, Combinatorica, **30** (2010), 1–24.

[5] A. Chan and R. Hosoya, *Type-II matrices attached to conference graphs*, J. Algebraic Combin. **20** (2004), 341–351.

[6] R. Craigen, *Equivalence classes of inverse orthogonal and unit Hadamard matrices*, Bull. Austral. Math. Soc. **44** (1991), no. 1, 109–115.

[7] E. van Dam, *Three-class association schemes*, J. Algebraic Combin. **10** (1999), 69–107.

[8] U. Haagerup, *Orthogonal maximal Abelian $*$-subalgebras of $n \times n$ matrices and cyclic n-roots*, Operator Algebras and Quantum Field Theory (Rome), Cambridge, MA, International Press, (1996), 296–322.

[9] R. Hosoya and H. Suzuki, *Type II matrices and their Bose-Mesner algebras*, J. Algebraic Combin. **17** (2003), 19–37.

[10] T. Ikuta and A. Munemasa, *Complex Hadamard matrices contained in a Bose–Mesner algebra*, Spec. Matrices, **3** (2015), 91–110.

[11] T. Ikuta and A. Munemasa, *Complex Hadamard matrices coming from* 4*-class association scheme*, in preparation.

[12] F. Jaeger, M. Matsumoto, and K. Nomura, *Bose-Mesner algebras related to type II matrices and spin models*, J. Algebraic Combin. **8** (1998), 39–72.

[13] 宗政昭弘, *Complex Hadamard matrices and 3-class association schemes*, 第 30 回代数的組合せ論シンポジウム報告集, 125–132.

Self-orthogonal designs

Akihiro Munemasa
(joint work with Masaaki Harada and Tsuyoshi Miezaki)

June 22, 2015
The 32nd Algebraic Combinatorics Symposium
Kanazawa

Definition 1. A t-(v, k, λ) design is a pair $(X, \mathcal{B})$, where

- X is a finite set, $|X| = v$,
- $\mathcal{B} \subset \binom{X}{k} = \{k\text{-element subsets of } X\}$,
- $\forall T \in \binom{X}{t}$,
$$\lambda = |\{B \in \mathcal{B} \mid B \supset T\}|.$$

Elements of X are called "points", elements of $\mathcal{B}$ are called "blocks". According to [3], the existence of a 3-$(16, 7, 5)$ design is unknown. Recently, Nakić [4] showed that such a design cannot have an automorphism of order 3. In this talk, we give constructions of 3-$(16, 8, 3\mu)$ designs for $1 \le \mu \le 5$.

Definition 2. A design $(X, \mathcal{B})$ is *self-orthogonal* if

$$|B \cap B'| \equiv 0 \pmod 2 \quad (\forall B, B' \in \mathcal{B}).$$

In particular, in a self-orthogonal design, $k \equiv 0 \pmod 2$ holds. Let M be the block-point incidence matrix. Then

$$\text{self-orthogonal} \iff MM^\top = 0 \text{ over } \mathbb{F}_2.$$

We call the row space C of M the code of the design. Then $C \subset C^\perp$.

Example 1. The row space of the matrix $\begin{bmatrix} I_4 & J_4 - I_4 \end{bmatrix}$ over $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ contains 14 vectors of weight 4, forming a self-orthogonal 3-$(8, 4, 1)$ design.

More generally, if H is a Hadamard matrix of order $8n$, i.e., H is a $8n \times 8n$ matrix with entries in $\{\pm 1\}$ satisfying $HH^\top = 8nI$, then one obtains a self-orthogonal 3-$(8n, 4n, 2n-1)$ design.

Fundamental problem in combinatorial design theory is:

Problem 1. Given t, v, k, λ, does there exist a t-(v, k, λ) design?

The main interest was to show that t-design exists for an arbitrary large t. Before Teirlinck [9] showed that this is the case in 1987, only a few t-designs with $t \geq 5$ were known. We suspect that, however, self-orthogonal designs are very restricted subclass of designs, the corresponding problem might have an opposite answer.

Note that the 5-$(24, 8, 1)$ design by Witt [11] is self-orthogonal, and the Assmus-Mattson theorem [1] gives why one obtains a 5-design: every extremal binary self-dual code of length multiple of 24 gives 5-designs. In our work we only consider orthogonality mod 2. For example, the 5-$(12, 6, 1)$ design of Witt [11] is not self-orthogonal. It is, however, self-orthogonal in some other sense.

The Assmus–Mattson theorem [1] implies that every binary doubly even self-dual $[24m, 12m, 4m+4]$ code supports a 5-$(24m, 4m+4, \lambda)$ design.

- $m = 1$: Witt design; related designs were characterized by Tonchev [10].
- $m = 2$: Harada–Munemasa–Tonchev [7].

For $m \geq 3$, existence is unknown:

- $m = 3$ by Harada–Munemasa–Kitazume [6], $m = 4$ by Harada [5], $m \geq 5$ by de la Cruz and Willems [2].

For a systematic study for a more general case, we refer Lalaude-Labayle [8]. In this talk, however, instead of considering the problem:

> given a self-dual code C of length v and minimum weight k, what is the maximum t such that
>
> $$\mathcal{B} = \{\text{supp}(x) \mid x \in C,\ \text{wt}(x) = k\}$$
>
> is a t-design?

we take a design-theoretic viewpoint and aim for a classification of designs, not of codes. This problem is more general in the following sense. Let C be the code of a self-orthogonal design. Identifying subsets with their characteristic vectors, we have

$$\mathcal{B} \subset \{x \in C \mid \mathrm{wt}(x) = k\} \subset C \subset C^{\perp}, \quad 0 < k \leq \text{minimum weight of } C.$$

In the previously considered situation of Lalaude-Labayle [8],

$$\mathcal{B} = \{x \in C = C^{\perp} \mid \mathrm{wt}(x) = k\},$$

which we call “saturated”.

In the unsaturated case, the situation could be different in three ways:

(i) $C \subsetneqq C^{\perp}$

(ii) $\mathcal{B} \subsetneqq \{x \in C \mid \mathrm{wt}(x) = k\}$

(iii) $k > \min\{\mathrm{wt}(x) \mid x \in C,\ x \neq 0\}$

Out main tool for the investigation is so-called the Mendelsohn equations. Let $(X, \mathcal{B})$ be a t-(v, k, λ) design, $S \subset X$.

$$n_j = |\{B \in \mathcal{B} \mid j = |B \cap S|\}|.$$

Then

$$\sum_{j \geq 1} \binom{j}{i} n_j = \lambda_i \binom{|S|}{i} \quad (i = 1, \dots, t), \tag{1}$$

is a system of t linear equations in unknowns $n_1, n_2, \dots$ (at most $\min\{k, |S|\}$). The number of unknowns can be reduced if

- $S \in C^{\perp}$, then $n_j = 0$ for j odd.
- $k = \min C^{\perp}$, then $n_j = 0$ for $j > k/2$.

Clearly, the dual code $C^{\perp}$ of the code C of a t-design has minimum weight at least $t + 1$. Moreover, if equality holds with $t = 3$, then we have the following consequence.

Lemma 1. If $(X, \mathcal{B})$ is a self-orthogonal 3-(v, k, λ) design, and the dual code of its code has minimum weight 4, then $v = 2k$.

Proof. There are $t = 3$ Mendelsohn equations (1) for 2 unknowns n_2, n_4. Existence of a solution gives $v = 2k$. □

We now consider self-orthogonal 3-$(2k, k, \lambda)$ designs. Recall 3-$(8, 4, 1)$ design exists, since this is nothing but the unique Hadamard 3-designs.

Note that the 5-$(12, 6, 1)$ design of Witt [11] which is 3-$(12, 6, 12)$ design is not self-orthogonal. Let $(X, \mathcal{B})$ be a 3-$(12, 6, \lambda)$ design. Divisibility implies $\lambda \equiv 0 \pmod 2$, and $|\mathcal{B}| = 11\lambda$. Moreover, if $(X, \mathcal{B})$ is self-orthogonal, then its code C is contained in the unique self-dual $[12, 6, 4]$ code which has 32 vectors of weight 6, so $\lambda \leq 2$, hence $\lambda = 2$. Since a 3-$(12, 6, 2)$ design is an extension of a symmetric 2-$(11, 5, 2)$ design, it cannot be self-orthogonal. Alternatively, Mendelsohn equations (1) with respect to a block leads to a contradiction for all λ.

Now let $(X, \mathcal{B})$ be a self-orthogonal 3-$(16, 8, \lambda)$ design. Divisibility implies $\lambda \equiv 0 \pmod 3$. The largest number of vectors of weight 8 in a self-orthogonal codes of length 16 gives an upper bound $\lambda \leq 18$.

For $\lambda = 3$, we have Hadamard 3-designs, so $(X, \mathcal{B})$ comes from the known classification of Hadamard matrices of order 16.

Theorem 1. Let $\lambda = 3\mu \geq 6$, where μ is an integer. The following are equivalent:

(i) there exists a self-orthogonal 3-$(16, 8, \lambda)$ design,

(ii) there exists an equitable partition of the folded halved 8-cube with quotient matrix

$$\begin{bmatrix} 4(\mu - 1) & 4(8 - \mu) \\ 4\mu & 4(7 - \mu) \end{bmatrix},$$

(iii) $\mu \in \{2, 3, 4, 5\}$.

In particular, there is no self-orthogonal 3-$(16, 8, 18)$ design.

Proof. Let $(X, \mathcal{B})$ be a self-orthogonal 3-$(16, 8, \lambda)$ design, where $\lambda = 3\mu \geq 6$. Then there exists a doubly even self-dual code C containing the code of $(X, \mathcal{B})$. From the classification of doubly even self-dual codes of length 16, C has minimum weight 4. Let S be a codeword of C with weight 8. Then the Mendelsohn equations (1) give

$$(n_0, n_2, n_4, n_6, n_8) = (1, 4(\mu - 1), 22\mu + 6, 4(\mu - 1), 1) \text{ or } (0, 4\mu, 22\mu, 4\mu, 0).$$

In particular, $n_2 \geq 4(\mu - 1) > 0$. One of the doubly even self-dual $[16, 8, 4]$ code, i.e., $e_8 \oplus e_8$ cannot be C, since there exists a codeword x of weight 8 in C such that $|\operatorname{supp}(x) \cap \operatorname{supp}(y)| \neq 2$ for any codeword y of weight 8 in C. This is impossible since $n_2 > 0$ as shown above.

Now we conclude that C is isomorphic to the other doubly even self-dual $[16, 8, 4]$ code, d_{16}. The following gives a construction of a 3-$(16, 8, 12)$ design. Let $\mathcal{P} = \{1, \dots, 16\}$, and

$$X = \{\{\operatorname{supp}(x), \mathcal{P} \setminus \operatorname{supp}(x)\} \mid x \in C,\ \operatorname{wt}(x) = 8\}.$$

Then $|X| = 99$. Let $\mathcal{O}_1$ and $\mathcal{O}_2$ be the orbits of length 35 and 64, respectively, on X under $\operatorname{Aut} C$. Suppose that $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ is a 3-$(16, 8, 3\mu)$ design. Set

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{B}} &= \{\{B, \mathcal{P} \setminus B\} \mid B \in \mathcal{B}\}, \\ \overline{\mathcal{B}}_i &= \overline{\mathcal{B}} \cap \mathcal{O}_i \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

We define a graph $\Gamma = (X, E)$, where E consists of pairs $\{\{B_1, \mathcal{P} \setminus B_1\}, \{B_2, \mathcal{P} \setminus B_2\}\}$ such that $|B_1 \cap B_2| \in \{2, 6\}$. Then Γ has two connected components $\mathcal{O}_1$ and $\mathcal{O}_2$. The induced subgraphs on $\mathcal{O}_1$ and $\mathcal{O}_2$ are regular of valency 16 and 28, respectively. From the solution of the Mendelsohn equations, we see that $\mathcal{O}_i$ admits an equitable partition $\overline{\mathcal{B}}_i \cup (\mathcal{O}_i \setminus \overline{\mathcal{B}}_i)$ whose collapsed adjacency matrices are

$$\begin{bmatrix} 4(\mu - 1) & 4(5 - \mu) \\ 4\mu & 4(4 - \mu) \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} 4(\mu - 1) & 4(8 - \mu) \\ 4\mu & 4(7 - \mu) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

respectively. Moreover, we have

$$\begin{aligned} 4(5 - \mu)|\overline{\mathcal{B}}_1| &= 4\mu(|\mathcal{O}_1| - |\overline{\mathcal{B}}_1|), \\ 4(8 - \mu)|\overline{\mathcal{B}}_2| &= 4\mu(|\mathcal{O}_2| - |\overline{\mathcal{B}}_2|). \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{B}}_1| &= 7\mu, \\ |\overline{\mathcal{B}}_2| &= 8\mu. \end{aligned}$$

The induced subgraph on $\mathcal{O}_1$ is isomorphic to the Grassmann graph $J_2(4, 2)$, and an equitable partition with quotient matrix (2) exists. Indeed, for $\mu = 1$,

it is simply the set of all lines through a point in $PG(3,2)$. For $\mu = 2$, it is the set of all lines through a point p and all lines on an plane $\pi \not\ni p$. For $\mu = 3$ and 4, we simply take the complementary set for $\mu = 2$ and 1, respectively. For $\mu = 5$, the partition is trivial. Therefore, the existence of a self-orthogonal 3-$(16, 8, 3\mu)$ design for $\mu \in \{2, 3, 4, 5\}$ is equivalent to the existence of an equitable partition of the subgraph induced by $\mathcal{O}_2$ with quotient matrix (3). It turns out that the subgraph induced by $\mathcal{O}_2$ is isomorphic to the folded halved 8-cube, and the existence of an appropriate equitable partition can be verified easily by computer. □

Comparing the solution of the Mendelsohn equations with the weight distribution of the self-dual codes of length 20 whose classification is already known, we obtain the following theorem.

Theorem 2. There is no self-orthogonal 3-$(20, 10, \lambda)$ design.

Regarding a self-orthogonal 3-$(24, 12, \lambda)$ design, the Assmus-Mattson theorem implies that there is a 5-$(24, 12, 48)$ design which is 3-$(24, 12, 280)$ design. Does there exist other self-orthogonal 3-$(24, 12, \lambda)$ designs?

References

[1] E.F. Assmus and H.F. Mattson, New 5-designs, J. Combin. Theory 6 (1969), 122–151.

[2] J. de la Cruz and W. Willems, 5-designs related to binary extremal self-dual codes of length $24m$, Theory and applications of finite fields, 75–80, Contemp. Math., 579, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.

[3] J. Dinitz and C. Colbourn, eds., The CRC Handbook of Combinatorial Designs, 2nd ed., Chapman & Hall/CRC Press, 2006.

[4] A. Nakić, Non-existence of a simple 3-$(16, 7, 5)$ design with an automorphism of order 3, Discrete Math. 338 (2015), 555–565.

[5] M. Harada, Remark on a putative extremal doubly-even self-dual code of length 96 and its 5-design, Designs, Codes and Cryptography 37 (2005), 355–358.

[6] M. Harada, M. Kitazume and A. Munemasa, On a 5-design related to an extremal doubly-even self-dual code of length 72, J. Combin. Theory, Ser. A 107 (2004), 143–146.

[7] M. Harada, A. Munemasa and V.D. Tonchev, A characterization of designs related to an extremal doubly-even self-dual code of length 48, Annals of Combinatorics 9 (2005), 189–198.

[8] M. Lalaude-Labayle, On binary linear codes supporting t-designs, IEEE Trans. Inform. Theory 47 (2001), 2249–2255.

[9] L. Teirlinck, Non-trivial t-designs without repeated blocks exist for all t, Discrete Math. 65 (1987), 301–311.

[10] V.D. Tonchev, A characterization of designs related to the Witt system $S(5,8,24)$, Math. Z. 191 (1986), 225–230.

[11] E. Witt, Über Steinersche systeme, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 12 (1938), 265–275.

SELF 2-DISTANCE GRAPHS WITH A FORBIDDEN STRUCTURE

A. AZIMI AND M. FARROKHI D. G.

Abstract. All finite simple self 2-distance graphs with no squares, diamonds, or triangles with a common vertex are determined. Utilizing these results, it is shown that there is no cubic self 2-distance graph.

1. Introduction

Let (X,ρ) be a metric space and D be a set of positive real numbers. The *distance graph* $G(X,D)$ of X with respect to a distance set D is the graph whose vertex set is X and two distinct vertices x and y are adjacent if $\rho(x,y)\in D$.

The well-known unit distance graph $G(\mathbb{R}^2,\{1\})$ is the first instance of a distance graph arising from a question of Edward Nelson about its chromatic number in 1950 (see [11, Chapter 3]). It is shown by Nelson and Isbell [5], Moser and Moser [8] and Hadwiger, Debrunner and Klee [4] that the chromatic number of this graph is between 4 and 7. Unit distance graphs are also investigated on any of the sets $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}^n$ and $\mathbb{Z}^n$ as well (see [11] for a detailed history). The other well-studied sort of distance graphs are the distance graphs $G(\mathbb{Z},D)$ introduced by Eggleton, Erdös and Skiltons in [3], where D is a set of positive integers. Clearly, every graph Γ with associated distance function d defines a metric space (Γ,d). Hence, we may define the distance graphs of the graph Γ with respect to a set of positive integer distances. For example, the nth power of a graph Γ is defined simply as the distance graph $G(\Gamma,\{1,\ldots,n\})$. We refer the interested reader to the survey articles [2, 7, 6] for further details concerning the mentioned three kinds of distance graphs, respectively.

The *nth distance graph* (or *n-distance graph*) of a graph Γ is defined simply as $\Gamma_n := G(V(\Gamma),\{n\})$. The study of nth distance graph initiated by Simić [10] while solving the graph equation $\Gamma_n\cong L(\Gamma)$, where $L(\Gamma)$ is line graph of Γ. Regarding the same problem, we have classified of all graphs whose 2-distance graphs are path or cycle in [1].

A graph is said to be *self n-distance graph* if it is isomorphic to its n-distance graph. The aim of this paper is to investigate self 2-distance graphs under some conditions. More precisely, we will show that self 2-distance graphs with no squares or disjoin triangles are either odd cycles of order ≥ 5 or the edge product $C_5|C_3$. Also, we show that a self 2-distance graph with no diamond is either an odd cycle of order ≥ 5, the edged product $C_5|C_3$, or it is isomorphic to one of graphs in Figures 5.1.1 or 5.1.2. One note that our knowledge about n-distance graphs can be used to answer/pose some problems in groups through their Cayley graphs. Indeed, we

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 05C12; Secondary 05C60, 05C76.
Key words and phrases. Distance graph, regular graph, forbidden subgraph.

may observe that the nth distance graph of a Cayley graph $\mathrm{Cay}(G, S)$ of G equals $\mathrm{Cay}(G, S^n \setminus S)$ and hence it is itself a Cayley graph. Any isomorphism between $\mathrm{Cay}(G, S)$ and $\mathrm{Cay}(G, S^n \setminus S)$ give the constraint $|S^n| < 2|S|$ on S, the problem which is the subject of resent research. On the other hand, such an isomorphism brings us the question whether $S^n \setminus S$ and S are conjugate via an automorphism of G, which is a central problem in the theory of Cayley graphs. In case $S^n \setminus S = S^\theta$ for some $\theta \in \mathrm{Aut}(G)$, we have obviously $\mathrm{Cay}(G, S^n \setminus S) \cong \mathrm{Cay}(G, S)$, that is, $\mathrm{Cay}(G, S)$ is a self nth distance graph.

Throughout this paper, we use the following notations: The maximum valency of vertices of a graph Γ is denote by $\Delta(\Gamma)$ and $N_\Gamma(v)$ illustrates the set of all neighborhoods of the vertex v in Γ. Also, $\nabla(\Gamma)$ denotes the number of triangles in a graph Γ. All graphs in this papers are finite simple graphs with no multiple edges. Remind that a *diamond* is the edge product $\mathcal{D} = C_3|C_3$, where the *edged product* of two edge-transitive graphs Γ_1 and Γ_2 is obtained by identification of an edge from Γ_1 and Γ_2.

2. Preliminary results

We begin with a simple query about the existence of self 2-distance graphs. Clearly, any odd cycle of length ≥ 5 is a self 2-distance graph. As we shall see later, odd cycles are exceptional examples in the class of all self 2-distance graphs. We note that the class of self 2-distance graphs is broad as Propositions 2.2 and 2.3 provide ample of them. The following simple key lemma plays an important role in our study.

Lemma 2.1. *Let* Γ *be a graph. Then* $\mathrm{diam}(\Gamma) = 2$ *if and only if* $\Gamma_2 = \Gamma^c$.

Proposition 2.2. *Let* Γ *be a self-complementary graph with diameter two. Then* $\Gamma_2 \cong \Gamma$.

Proposition 2.3. *Every graph is an induced subgraph of a self* 2*-distance graph.*

Proof. Let Γ be an arbitrary graph. Consider two disjoint copies Γ_1 and Γ_2 of Γ and two disjoint copies Γ_3 and Γ_4 of Γ^c, and let v be a new vertex. Then the graph with vertex set

$$V(\Gamma_1) \cup V(\Gamma_2) \cup V(\Gamma_3) \cup V(\Gamma_4) \cup \{v\}$$

and edge set

$$E(\Gamma_1) \cup E(\Gamma_2) \cup E(\Gamma_3) \cup E(\Gamma_4) \cup E,$$

where

$$E = \{\{v, v_1\}, \{v, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\} : v_i \in V(\Gamma_i), i = 1, 2, 3, 4\}$$

is a self 2-distance graph containing Γ as a subgraph (see Figure 2.3.1). □

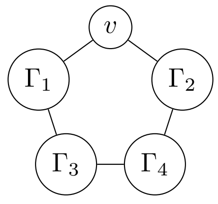


Figure 2.3.1

Lemma 2.4. *If Γ is a self 2-distance graph which is not an odd cycle, then* $\mathrm{gr}(\Gamma) = 3$.

Proof. Since $\Delta(\Gamma) > 2$, we may choose a vertex v of valency ≥ 3. If $N_\Gamma(v)$ is not empty, then Γ has a triangle. Thus we may assume that $N_\Gamma(v)$ is empty. But then $N_\Gamma(v)^c$ is a subgraph of $\Gamma_2 \cong \Gamma$, which implies that Γ has a triangle. Therefore $\mathrm{gr}(\Gamma) = 3$. □

The following lemma will be used in the next section.

Lemma 2.5. *Let Γ be a graph. Then*

$$|E(L(\Gamma))| = |E(\Gamma_2)| + |E(\Gamma)| + 3\nabla(\Gamma) - \binom{|V(\Gamma)|}{2} + \sum_{u \not\sim v} |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)|.$$

In particular,

$$|E(L(\Gamma))| = |E(\Gamma_2)| + 3\nabla(\Gamma)$$

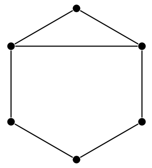
whenever Γ has no square as subgraph.

Proof. It is straightforward. □

3. Graphs with no forbidden subgraphs

In this section, we shall consider several constraints on subgraphs of a self 2-distance graph in order to obtain the structure of these graphs. To achieve this goal, we use the local analysis of the graphs by looking at the neighbor of vertices as well as small subgraphs. The proof of our first result uses the notion of distance between two subgraphs of a graph as the length of the shortest path connecting a vertex of the first subgraph to a vertex of the second subgraph.

Theorem 3.1. *Let Γ be a self 2-distance graph with no square. Then either Γ is an odd cycle or it is the edged product $C_5|C_3$.*



$C_5|C_3$

Proof. Suppose G a self 2-distance graph with no square that is neither an odd cycle nor the edge product $C_5|C_3$. We proceed in several steps in order to find a contradiction.

Step 1. $\Delta(\Gamma) = 3$.
Since neither Γ nor Γ_2 have squares and $N_\Gamma(v)^c$ is a subgraph of Γ_2 for all $v \in V(\Gamma)$, it follows that $\Delta(\Gamma) \leq 3$. Now, the fact that Γ is not a cycle, implies that $\Delta(\Gamma) \geq 3$ so that $\Delta(\Gamma) = 3$.

Step 2. Γ has no subgraphs isomorphic to $C_5|C_3$.
Suppose on the contrary that $S \subset V(\Gamma)$ induces a subgraph of Γ isomorphic to $C_5|C_3$ (see Figure 3.1.1). Then there exists a vertex $v \in V(\Gamma)$ adjacent to some vertex of S. Clearly, v is not adjacent to the temples for $\Delta(\Gamma) = 3$.

First suppose that v is adjacent to the forehead. If v is adjacent to any of the jaws, then we get a square, which is a contradiction. Thus $N_S(v) = \{a\}$ or $\{a, d\}$, which imply that $\{v, b, d, f\}$ is a square in Γ_2, which is again a contradiction. Therefore v

is not adjacent to the forehead. Next assume that v is adjacent to the chin. Clearly, v is not adjacent to both c and d, say c, for otherwise we have a r-cycle $\{c, d, e, v\}$. Bu then $\{a, f, e, v\} \subseteq N_{\Gamma_2}(c)$, that is, $\Delta(\Gamma_2) > 3$, which is a contradiction. Finally, assume that v is adjacent to any of the jaws. Then v is adjacent to exactly one of the jaws, say c, for otherwise $\{v, c, d, e\}$ is a square. Since $(S \cup \{v\})_2 \ncong S \cup \{v\}$, there exists yet another vertex $u \in V(\Gamma) \setminus S \cup \{v\}$ adjacent to some vertex of $S \cup \{v\}$. If u is adjacent to v, then either $N_{\Gamma_2}(c)$ contains $\{a, e, f, u\}$ as u is cannot be adjacent to c, which is a contradictions. Thus u is not adjacent to v and by the same arguments as before u is adjacent to one of the jaws. Since u and c are not adjacent, u and e must be adjacent, which implies that $\{b, f, u, v\} \subseteq N_{\Gamma_2}(d)$, a contradiction.

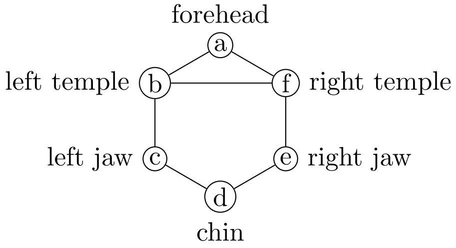


Figure 3.1.1

Step 3. Γ has no pentagon.
Assume Γ has a pentagon S. Since $\Gamma \ncong C_5$, there exist a vertex $v \in V(\Gamma) \setminus S$ adjacent to some vertex u of S. Clearly, S is an induced subgraph of Γ. Let a, b be two vertices adjacent to u in S and c, d be the other two vertices. Since Γ has no square it follows that v is not adjacent to c, d. Now, it is easy to see that either Γ or Γ_2 has a subgraph isomorphic to $C_5|C_3$ contradicting step 2.

Step 4. Γ has no hexagon.
Let $S \subset V(\Gamma)$ denote a 6-cycle a, b, c, d, e, f, a in Γ. Clearly, S is an induced subgraph of Γ. Since $S_2 \ncong S$, we have a vertex $u \in V(\Gamma) \setminus S$ adjacent to some vertex a of S. Clearly, u is adjacent to exactly one of b, f, say b, for otherwise either $\{b, d, f, u\}$ is a square in Γ_2, or $\{b, a, f, u\}$ is a square in Γ, which are both impossible. Again, the fact that Γ has no square implies that u is not adjacent to c, d, e, f. Moreover, u is the unique vertex adjacent to both a, b. Now, we have three cases:

(1) If Γ has a subgraph T as drawn in Figure 3.3.3, then T is an induced subgraph and a simple verification shows that T is a connected component of Γ, which implies that $\Gamma = T$. But then $\Gamma_2 \ncong \Gamma$, which is a contradiction.
(2) If Γ has a subgraph T as drawn in Figure 3.3.2, then since $T_2 \ncong T$, Γ has a vertex w' adjacent to some vertex of T. If w' is adjacent to any of the vertices a', b', c', d', u', v', then we get a vertex of valency ≥ 4 in Γ or Γ_2, which is impossible. Thus w' is adjacent to e' or f' and by the previous argument it follows that w' is adjacent to both e' and f', which is impossible by case (1).
(3) Γ has no subgraphs isomorphic to that of Figure 3.3.2. Then u is the only vertex of Γ adjacent to S (see Figure 3.3.1). Since $(S \cup \{u\})_2 \ncong S \cup \{u\}$, there exists a vertex $v \in V(\Gamma) \setminus S \cup \{u\}$ adjacent to u. But then $(S \cup \{u, v\})_2$

is an induced subgraph of $\Gamma_2 \cong \Gamma$ isomorphic to the graph in Figure 3.3.4, from which it follows that $\deg_{(\Gamma_2)_2}(u) \geq 4$, a contradiction.

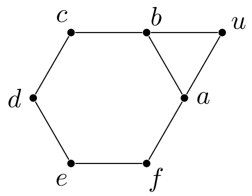


Figure 3.3.1

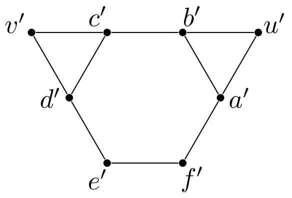


Figure 3.3.2

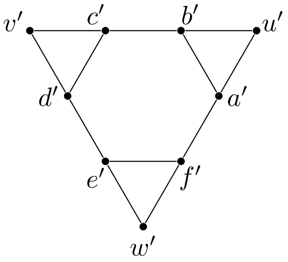


Figure 3.3.3

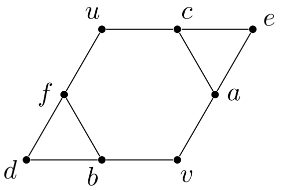


Figure 3.3.4

Step 5. Γ has no cycles of length exceeding three.
We know that Γ has no cycles of lengths 4, 5 and 6. We proceed by induction to show that Γ has no cycles of lengths ≥ 4. Suppose Γ has no cycles of lengths $4, 5, \ldots, n$ for some $n \geq 6$. If Γ has an $(n+1)$-cycle C, then C is an induced subgraph of Γ. If $n+1$ is even, then clearly Γ_2 has two $(n+1)/2$-cycles, which is a contradiction. Thus $n+1$ is odd. Since Γ is not an odd cycle, there exists a vertex $v \in V(\Gamma)$ adjacent to some vertex $a \in V(C)$. Let $N_C(a) = \{b, c\}$. If v is adjacent to some vertex in $C \setminus \{a, b, c\}$, then we obtain a cycle of length l $(4 \leq l \leq n)$, which is a contradiction. If v is not adjacent to b, c, then $\Gamma \cong \Gamma_2$ has a subgraph isomorphic to $(C \cup \{v\})_2$ that is an $|C|$-cycle with two adjacent vertices having a common neighbor. Hence, we may assume that v is adjacent b or c, say b. Since Γ has no square, v is not adjacent to c. Let $N_C(b) = \{a, d\}$. Then c, v, d is a path of length two in Γ_2. On the other hand, since C_2 is a subgraph of Γ_2, there is a path of length at most $n/2$ from c to d disjoint from c, v, d. Hence Γ_2 has a cycle of length l such that $4 \leq l \leq n/2 + 2 \leq n$, which is a contradiction.

Step 6. Triangles in Γ have disjoint vertices.
If two triangles of Γ have some vertices in common, then either Γ or Γ_2 has a square, which is a contradiction.

Step 7. Γ has exactly three pendants.
Let Γ' be the graph obtained from Γ by contracting all triangles into single vertices. Then Γ' is a tree. Let v and v' (e and e') be the number of vertices (edges) of Γ and Γ', respectively. Also, let n_i be the number of vertices of valency i in Γ for $i = 1, 2, 3$. Clearly, $v' = v - 2\nabla(\Gamma)$ and $e' = e - 3\nabla(\Gamma)$. Since Γ' is a tree, we have $e' = v' - 1$, which implies that $\nabla(\Gamma) = e - v + 1$. On the other hand, by Lemma 2.5, $e_L - e = 3\nabla(\Gamma)$, where e_L is the number of edges of $L(\Gamma)$, the line graph of Γ.

Now, we have

$$\begin{aligned}
|V(\Gamma)| &= n_1 + n_2 + n_3, \\
|E(\Gamma)| &= \frac{1}{2}\sum_{v\in V(\Gamma)} \deg_\Gamma(v) = \frac{n_1 + 2n_2 + 3n_3}{2}, \\
|E(L(\Gamma))| &= \sum_{v\in V} \binom{\deg_\Gamma(v)}{2} = n_2 + 3n_3,
\end{aligned}$$

from which it follows that $n_1 = 3$.

Step 8. Γ has no triangle with of vertices of valency > 2.
If Γ has such a triangle, then Γ_2 must have a hexagon, which contradicts step 4.

Step 9. Γ has a triangle with two vertex of valency two.
Suppose all triangles in Γ have a unique vertex of valency 2. Then we have no induced claws with two pendants, which implies that Γ has only one induced claw along with only one triangle as drawn in Figure 3.7.1, where $a, b, d \geq 1$ and $c \geq 0$. Clearly, $c \neq 1$ for otherwise $\deg_{\Gamma_2}(u) = 4$, which is impossible. A simple verification shows that $d_\Gamma(\text{triangle}, \text{claw}) = c$ and

$$d_{\Gamma_2}(\text{triangle}, \text{claw}) = \begin{cases} \frac{c+4}{2}, & c \text{ is even}, \\ \\ \frac{c-3}{2}, & c \text{ is odd}. \end{cases}$$

Since $\Gamma \cong \Gamma_2$, this implies that $c = 4$. On the other hand, we know that

$$|E(\Gamma)| = a + b + c + d + 4$$

and

$$|E(\Gamma_2)| = a + b + c + d + 5 - [\frac{1}{d}]$$

when $c \geq 2$. But then $d = 1$ and $a \pm 1, b \mp 1 = 2, 3$, from which it follows that $\Gamma_2 \ncong \Gamma$, a contradiction.

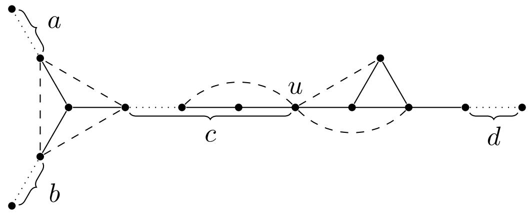


Figure 3.7.1

Now, we obtain the final contradiction. We have shown that Γ has a triangle with two vertex of valency two. Such a triangle arises from an induced claw with two pendants in Γ. Since Γ has exactly three pendants, it can be drawn in the plane (see Figure 3.7.2) with one further triangle having an edge in the dotted areas, where $a, b \geq 0$ and $c \geq 1$ denote the number of vertices in the corresponding dotted areas. We note that every triangle in Γ_2 arises from an induced claw in Γ. A simple verification shows that

$$|E(\Gamma)| = a + b + c + 9$$

and

$$|E(\Gamma_2)| = a + b + c + 8 + [\frac{1}{a+1}] + [\frac{1}{b+1}],$$

which implies that $ab = 0$. Clearly, $c = 1$ for otherwise $\deg_{\Gamma_2}(o) \geq 4$, which is impossible.

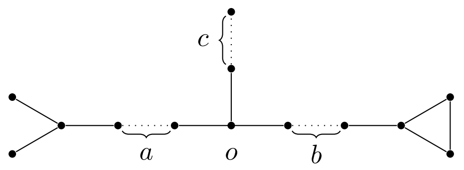


Figure 3.7.2

First assume that $a = 0$. Then the graph Γ can be drawn as in Figure 3.7.3. Note that $|A| \geq 3$ for otherwise A has a vertex of valency ≥ 4 in Γ_2, which is impossible. This implies that two triangles in Γ_2 are at distance at least five and so we must have $|B| \geq 4$. But then we obtain three induced claws in Γ_2 as drawn in Figure 3.7.3 with dashes, which is a contradiction.

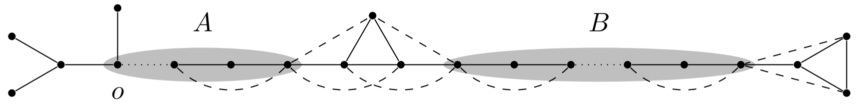


Figure 3.7.3

Finally assume that $b = 0$. If $|A| = 1$, then two induced claws are connected with two triangles with distance zero while it is not true in Γ_2. Hence, $|A| \geq 2$. If $|A| = 2$, then A has a vertex of valency four in Γ_2, which is impossible. Thus $|A| \geq 3$. Similarly, $|B| \geq 3$ for otherwise it has a vertex of valency four in Γ_2, a contradiction. But then we obtain three induced claws in Γ_2 as drawn in Figure 3.7.4 with dashes, which is a contradiction.

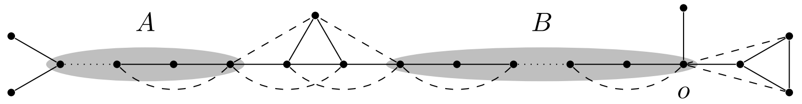


Figure 3.7.4

The proof is complete. □

It is obvious that in a self 2-distance graph with no squares all triangles are disjoint. Indeed, the converse to this observation is also valid whence self 2-distance graphs with disjoint triangle are described.

Theorem 3.2. *Let Γ be a self 2-distance graph with disjoint triangles. Then Γ has no square and hence it is either an odd cycle or the edged product $C_5|C_3$.*

Proof. The proof of the result is very similar to that of Theorem 3.1, so we only give an sketch of the proof here. First we show that the graph under consideration has maximum valency three. Next we show that the graph does not have any subgraph isomorphic to $C_5|C_3$, a hexagon, a pentagon, a heptagon and an octagon, respectively. Finally, since every square in 2-distance graph arises from a hexagon or an octagon, it follows that the graph has no square, as required. □

The above theorem has an interesting consequence as follows:

Corollary 3.3. *There is no cubic self 2-distance graph.*

Proof. Assume Γ is a cubic self 2-distance graph. By Theorem 3.2 and the fact that Γ is not the complete graph on four vertices, it follows that Γ has an induced subgraph as in Figure 4.8.1. Then $\deg_{\Gamma_2}(u)$ is two, which is a contradiction. $\square$

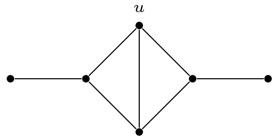


Figure 4.8.1

We conclude this section with considering another forbidden structure in a self 2-distance graph, namely the forbidden diamonds.

Theorem 3.4. *Let Γ be a self 2-distance graph with no diamond as subgraph. Then either Γ is an odd cycle, it is the edged product $C_5|C_3$, or it is isomorphic to one the following graphs:*

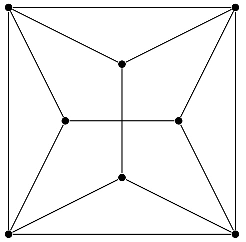


Figure 5.1.1

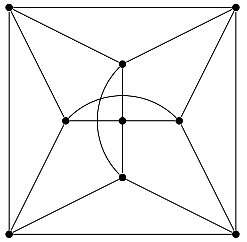


Figure 5.1.2

4. Open problems

We devote the last section of this paper to some open problems arising in our study of self 2-distance graphs. The following conjecture, if it is true, can be applied to shorten our proofs, and also will be useful while studying self 2-distance graphs with other forbidden subgraphs.

Conjecture 1. *Every self 2-distance graph is 2-connected.*

A graph Γ with v vertices is *strongly regular* of valency k if there are integers λ and μ such that every two adjacent vertices have λ common neighbors and every two non-adjacent vertices have μ common neighbors. The numbers v, k, λ, μ are the parameters of the corresponding graph.

Theorem 4.1. *Every strongly regular self 2-distance graphs is a self-complimentary graph and has parameters $(4t+1, 2t, t-1, t)$ where the number of vertices is a sum of two squares.*

Proof. The result follows from [9] and the fact that every strongly regular graph has diameter at most two. $\square$

We have shown, in Corollary 3.3, that there is no self 2-distance cubic graph. Indeed, we believe that the same result also holds for regular graphs with odd valency while it is not the case for regular graphs of even valency by the above theorem.

Conjecture 2. *There are no regular self 2-distance graphs of odd valency.*

References

[1] A. Azimi and M. Farrokhi D. G., Simple graphs whose 2-distance graphs are paths or cycles, *Matematiche (Catania)* **69**(2) (2014), 183–191.

[2] K. B. Chilakamarri, The unit-distance graph problem: a brief survey and some new results, *Bull. Inst. Combin. Appl.* **8** (1993), 39–60.

[3] R. B. Eggleton, P. Erdös and D. K. Skilton, Colouring the real line, *J. Combin. Theory, Ser. B*, **39**(1) (1985), 86–100.

[4] H. Hadwiger, H. Debrunner and V. Klee, *Combinatorial Geometry in the Plane*, New York, Holt, Rinehart and Winston, 1964.

[5] J. Isbell and E. Nelson, *Unpublished*.

[6] F. Kramer and H. Kramer, A survey on the distance-colouring of graphs, *Discrete Math.* **308**(2–3) (2008), 422–426.

[7] D. D. Liu, From rainbow to the lonely runner: a survey on coloring parameters of distance graphs, *Taiwanese J. Math.* **12**(4) (2008), 851–871.

[8] L. Moser and W. Moser, Solution to problem 10, *Canad. Math. Bull.* **4** (1961), 187–189.

[9] J. J. Seidel, A survey of two-graphs in *Proc. Int. Coil. Teorie Combinatorie*, **I** (1973), Acad. Naz. Lincei (1976), 481–511.

[10] S. K. Simić, Graph Equations for line graphs and n-distance graphs, *Publ. Inst. Math. (Beograd)* **33**(47) (1983), 203–216.

[11] A. Soifer, *The Mathematical Coloring Book: Mathematics of Coloring and the Colorful Life of Its Creators*, Springer, New York, 2009.

Department of Pure Mathematics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.
E-mail address: ali.azimi61@gmail.com

Mathematical Science Research Unit, College of Liberal Arts, Muroran Institute of Technology, 27-1, Mizumoto, Muroran 050-8585, Hokkaido, Japan.
E-mail address: m.farrokhi.d.g@gmail.com

The units of a partial Burnside ring relative to the Young subgroups of a symmetric group

近畿大学・理工学部　小田文仁 (Fumihito Oda)*
Faculty of Science and Engineering, Kindai University
室蘭工業大学大学院・工学研究科　竹ヶ原裕元 (Yugen Takegahara)
Muroran Institute of Technology
北星学園大学・経済学部　吉田知行 (Tomoyuki Yoshida)
Graduate School of Economics, Hokusei Gakuen University

1 はじめに

G は有限群，$C(G)$ は G のすべての部分群の族の G 共役類の集合とする．部分群 $H \leq G$ に対し，G/H は H の G におけるすべての左剰余類 gH，ただし，$g \in G$，の集合とする．G の Burnside 環 $\Omega(G)$ は，G/H，ただし，$(H) \in C(G)$，に対応するシンボル $[G/H]$ の形式的 $\mathbb{Z}$ 線形結合全体に

$$[G/H] \cdot [G/U] = \sum_{HgU \in [H \backslash G/U]} [G/(H \cap {}^gU)]$$

ただし，$(H), (U) \in C(G)$，${}^gU = gUg^{-1}$，$[G/(H \cap {}^gU)] = [G/K]$，$(K) = (H \cap {}^gU) \in C(G)$，で与えられる積が定義された可換環である (たとえば，[CR81, §80], [Yo90b, §2.1] を参照)．$\Omega(G)$ の単位元は $[G/G]$ である．簡略のため $1 = [G/G]$ と書く．$\Omega(G)$ の単元群は可換 2 群 (cf. §2) であり，$\Omega(G)$ の単元の解析は非常に興味深い問題である．

S_n は n 文字の集合 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ 上の対称群，$\mathfrak{Y}_n$ は S_n の Young 部分群全体の族とする．シンボル $[S_n/Y]$，ただし，$Y \in \mathfrak{Y}_n$，の $\mathbb{Z}$ 線形結合全体を $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ ([BBTH92] 参照) と書く．$\mathfrak{Y}_n$ は共役と共通部分をとる操作で閉じているので，$\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ は $\Omega(S_n)$ の部分環である (簡略のため，その部分環は対称群の Young 部分群に関する partial Burnside 環と呼ばれている)．S_n の指標環を $R(S_n)$ と書く．このとき環同型 $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n) \cong R(S_n)$ が成立すること (たとえば，[Yo90b, Proposition 7.2] を参照)，また，$R(S_n)$ の単元群が $\pm 1_{S_n}$，$\pm \nu_n$，ただし，1_{S_n} は S_n の自明な指標，ν_n は交代指標である (たとえば，[Ya91] を参照)，で構成されることがよく知られている．特に，$\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の単元群は，Klien の 4 群と同型である．

最近，[IO15] で Idei と Oda は，$\mathfrak{Y}_n$ の包含関係 $\leq$ に関するポセット $(\mathfrak{Y}_n, \leq)$ の Möbius 関数 $\mu_{\mathfrak{Y}_n}$ を用いて $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の非自明な単元の公式を与えた．そのような単元は，また，$\Omega(S_n)$ の単元でもあり，$\Omega(S_n)$ の単元の何らかの特徴付けを与えているようである．しかしながら，一般に，$\Omega(S_n)$ の単元はもっとたくさん存在する ([BP07])．本稿の目的は，$\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の非自明な単元の tom Dieck 準同型 (詳細は §2 を参照) を用いた特徴付けを与えた論文 [OTY] の要旨を報告することである．結果的に，我々は，その論文で $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の単元群が tom Dieck 準同型の像に含まれることを証明することに成功した．ν_n は，S_n 集合 S_n/Y，ただし，$Y \in \mathfrak{Y}_n$，が与える置換指標の $\mathbb{Z}$ 線形結合として具体的に表される (cf. Theorem 4.4)．それらの事実を証明するために，任意の左 G 集合が与える置換指標の tom Dieck 準同型による像が，G ポセットの被約 Lefschetz 不変量であること，それは，本質的に [Th87] で与えられた，がわかる．

2 tom Dieck 準同型

部分群 $H \leq G$ と有限左 G 集合 X に対し，

$$\mathrm{inv}_H(X) = \{x \in X \mid hx = x \text{ for all } h \in H\}$$

* supported by JSPS KAKENHI Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 25400003.

とおく．[Di79, Proposition 1.2.2] により，

$$[G/U] \mapsto (\sharp \mathrm{inv}_H(G/U))_{(H)\in C(G)}$$

で与えられる写像 $\varphi : \Omega(G) \to \widetilde{\Omega}(G) := \prod_{(H)\in C(G)} \mathbb{Z}$，ただし，$(U) \in C(G)$，は単射環準同型であり，Burnside 準同型，または，マーク準同型と呼ばれている．明らかに $\widetilde{\Omega}(G)$ の単元群は $\prod_{(H)\in C(G)} \langle -1\rangle$ であり，したがって，$\Omega(G)$ の単元群は基本可換 2 群である．

$R_{\mathbb{R}}(G)$ は G の実表現環，$\Omega(G)^\times$ は $\Omega(G)$ の単元群とする．任意の元 $x \in \Omega(G)$ は，$\varphi(x) = (x_H)_{(H)\in C(G)}$ であるとき，$x = \varphi^{-1}((x_H)_{(H)\in C(G)})$ と書く．[Di79, Proposition 5.5.9] により，任意の左 $\mathbb{R}G$ 加群 M に対し，群準同型 $u = u_G : R_{\mathbb{R}}(G) \to \Omega(G)^\times$ で

$$M \mapsto \varphi^{-1}(((-1)^{\dim M^H})_{(H)\in C(G)})$$

ただし，M^H は M の H 不変部分空間，をみたすものが存在する．

$H \le G$ とする．$W_G(H) = N_G(H)/H$，ただし，$N_G(H)$ は H の G における正規化群，とおく．有限生成左 $\mathbb{C}G$ 加群 M は，$\mathbb{C}$ 指標 χ を与えるとする．部分群 $H \le G$ に対し，M^H は $\mathbb{C}W_G(H)$ 加群とみなすことが可能であり，任意の $gH \in W_G(H)$ に対し

$$\overline{\chi}(gH) = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\chi(gh)$$

で定義される $W_G(H)$ の $\mathbb{C}$ 指標 $\overline{\chi}$ を与える (たとえば，[ACNT13, Lemma 3.1] を参照)．特に，$\dim M^H$ は，$\mathbb{C}$ 指標 χ の H への制限 $\chi|_H$ と H の自明な指標 1_H との H における内積 $\langle \chi|_H, 1_H\rangle_H$ に等しい．

[Yo90b, Corollary 4.3] より任意の $\chi \in \overline{R}_{\mathbb{R}}(G)$ に対し

$$\overline{u}(\chi) = \sum_{(U)\in C(G)} \frac{1}{|W_G(U)|}\left(\sum_{H\le G}\mu(U,H)(-1)^{\langle \chi|_H, 1_H\rangle_H}\right)[G/U], \tag{2.1}$$

ただし，μ は G のすべての部分群の族 $S(G)$ の包含関係 $\le$ に関するポセット $(S(G), \le)$ の Möbius 関数，を得る．

Example 1. 明らかに，$\overline{u}(1_G) = -1$ が成り立つ．

Example 2. A_n は $[n]$ 上の交代群とする．$1 - [S_n/A_n]$ は $\Omega(S_n)$ の単元であり，ν_n の tom Dieck 準同型による像である．

Remark 1. G が可解でないならば，[Ma82, Theorem 5.4] により $u : R_{\mathbb{R}}(G) \to \Omega(G)^\times$ は全射ではない．特に，$n \ge 4$ ならば $\overline{u} : \overline{R}_{\mathbb{R}}(S_n) \to \Omega(S_n)^\times$ は全射ではない：しかし，$\overline{u_{S_2}}$，$\overline{u_{S_3}}$ は全射である ([Ma82] を参照) ($2|\mathrm{Im}\overline{u_{S_4}}| = |\Omega(S_4)^\times| = 2^6$ が成り立つことを注意する)．

3 $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の単元

$R(G)$ は G の指標環とする．左 G 集合 X が与える置換指標 π_X は，任意の元 $g \in G$ に対し

$$\pi_X(g) = \sharp\{x \in X \mid gx = x\}$$

で定義される．環準同型 $\mathrm{char}_G : \Omega(G) \to R(G)$ を，任意の左 G 集合に対し

$$[X] \mapsto \pi_X$$

で定める (cf. [Yo90a, §6])．[Yo90b, Proposition 7.2] により，環準同型 $\mathrm{char}_{S_n} : \Omega(S_n) \to R(S_n)$ は環同型写像

$$\overline{\mathrm{char}}_{S_n} : \Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n) \to R(S_n)$$

([JK81, 2.3] 参照) を誘導する．従って，$\overline{\mathrm{char}}_{S_n}(\alpha) = \nu_n$ を満たすただ一つの元 $\alpha \in \Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ が存在する．$\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の単元群のすべての元は，± 1, $\pm\alpha$ であり，また，$\Omega(S_n)$ の単元でもある．

部分群 $H \le S_n$ に対し，Young 部分群 Y_H を，H を保存する S_n のすべての Young 部分群の共通部分として定める．n の分割 $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ に対応する Young 部分群 $Y \le S_n$ は，互いに非交和な n_i サイクル，ただし，$i = 1, 2, \ldots, r$，の積 σ_Y で $Y = Y_{\langle \sigma_Y\rangle}$ を満たすものを含む．以下の補題 (cf. [Yo90b, §7.1]) を示す．

Lemma 3.1. *If $\varphi(\alpha) = (\alpha_H)_{(H)\in C(S_n)}$, then $\alpha_H = \alpha_{Y_H}$, $(H) \in C(S_n)$ and $\alpha_Y = \nu_n(\sigma_Y)$, $Y \in \mathfrak{Y}_n$, where $\sigma_Y \in S_n$ with $Y = Y_{\langle\sigma_Y\rangle}$.*

[Yo90b, Corollary 4.3] と Lemma 3.1 を用いて α は

$$\alpha = \sum_{(Y)\in C(\mathfrak{Y}_n)} \frac{1}{|W_{S_n}(Y)|} \left(\sum_{H\in\mathfrak{Y}_n} \mu_{\mathfrak{Y}_n}(Y,H)\nu_n(\sigma_H) \right) [S_n/Y], \tag{3.1}$$

ただし，$\sigma_H \in S_n$，$Y = Y_{\langle\sigma_H\rangle}$，$C(\mathfrak{Y}_n)$ は $\mathfrak{Y}_n$ の S_n 共役類，と表される．この公式は，[IO15, Corollary 5.2] で表されている．

α が，tom Dieck 準同型像に含まれることを示す．S_n 集合 $[n]$ が与える置換指標 $\pi_{[n]}$ は，任意の $\sigma \in S_n$ に対し，

$$\sigma \mapsto \sharp\{k \in [n] \mid \sigma(k) = k\}$$

として定義される．部分群 $H \leq S_n$ に対し，$\mathrm{Orb}_H([n])$ を $[n]$ の H-軌道とする．Cauchy-Frobenius の補題 (たとえば，[Yo90b, Lemma 2.7] 参照) により，任意の部分群 $H \leq S_n$ に対し，$\langle \pi_{[n]}|_H, 1_H\rangle_H = \sharp\mathrm{Orb}_H([n])$ である．$\chi_n = \pi_{[n]} - 1_{S_n}$ とおく．このとき，χ_n は S_n の既約 $\mathbb{C}$ 指標であることがわかる．明らかに，$\chi_n \in \overline{R}_{\mathbb{R}}(G)$ が成り立つ．$\Omega(S_n)$ の単元 β を

$$\varphi(\beta) = ((-1)^{\sharp\mathrm{Orb}_H([n])})_{(H)\in C(S_n)} = ((-1)^{\langle\pi_{[n]}|_H, 1_H\rangle_H})_{(H)\in C(S_n)} = -((-1)^{\langle\chi_{[n]}|_H, 1_H\rangle_H})_{(H)\in C(S_n)},$$

と定めると，β は $\pi_{[n]}$ の tom Dieck 準同型による像である．$\alpha = (-1)^n\beta$ (cf. Theorem 3.4) が，Lemma 3.1 と次の補題を組み合わせる事により得られる．

Lemma 3.2. *For each $H \leq S_n$, $\sharp\mathrm{Orb}_H([n]) = \sharp\mathrm{Orb}_Y([n])$. In particular, for each $Y \in \mathfrak{Y}_n$, $\sharp\mathrm{Orb}_Y([n]) = \sharp\mathrm{Orb}_{\sigma_Y}([n])$, where $\sigma_Y \in S_n$ with $Y = Y_{\langle\sigma_Y\rangle}$.*

Lemma 3.3. *For each $\sigma \in S_n$, $(-1)^{\sharp\mathrm{Orb}_\sigma([n])} = (-1)^n\nu_n(\sigma)$.*

以下の定理が，$\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の単元の tom Dieck 準同型による特徴付けである．

Theorem 3.4. *The unit group of $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ is included in the image by the tom Dieck homomorphism. In particular, $\alpha = (-1)^n\beta$.*

Proof. $-1 = \overline{u}(1_{S_n})$ が成り立つから，$\alpha = (-1)^n\beta$ が成り立つことを示せば十分である．$\varphi(\alpha) = (\alpha_H)_{(H)\in C(S_n)}$ と $\varphi(\beta) = (\beta_H)_{(H)\in C(S_n)}$ が成り立つと仮定する．$\alpha_Y = (-1)^n\beta_Y$，$Y \in \mathfrak{Y}_n$，とすると Lemma 3.1 と Lemma 3.2 により任意の部分群 $H \leq S_n$ に対し $\alpha_H = (-1)^n\beta_H$ が成り立つから，$\alpha = (-1)^n\beta$ を得る．$Y \in \mathfrak{Y}_n$ とする．このとき，Lemma 3.1 より，$Y = Y_{\langle\sigma_Y\rangle}$ を満たす $\sigma_Y \in S_n$ に対し $\alpha_Y = \nu_n(\sigma_Y)$ が成り立つ．従って Lemma 3.2 と Lemma 3.3 より

$$\alpha_Y = (-1)^{\mathrm{Orb}_{\langle\sigma_Y\rangle}([n])+n} = (-1)^{\mathrm{Orb}_Y([n])+n} = (-1)^n\beta_Y$$

が従う． □

4 The reduced Lefschetz invariant of a G-poset

Theorem 3.4 のよい応用がある．ν_n の置換指標 $\pi_{S_n/Y}$，ただし，$Y \in \mathfrak{Y}_n$，の $\mathbb{Z}$ 線形結合としての表現は，非明示的に等式 (3.1) で表されているが，一方，明示的に表す事は価値のあることである．

順序 $\leq$ が定められた任意の有限左 G 集合 P は，$\leq$ が G の作用で不変であるとき G **ポセット**と呼ばれる．P を G ポセット，$Sd_i[P]$ を基数 $i+1$ の P の元からなる鎖 $x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_i$ 全体の集合とする．P の **Lefschetz 不変量** Λ_P は

$$\Lambda_P = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i [Sd_i(P)] \in \Omega(G),$$

P の**被約 Lefschetz 不変量** $\widetilde{\Lambda}_P$ は $\widetilde{\Lambda}_P = \Lambda_P - 1$ と定める (cf. [Bo00], [Th87])．有限左 G 集合 X に対し，$\overline{P}(X)$ は包含関係に関する X のすべての部分集合の G ポセットとする．$P(X)$ は G ポセット $\overline{P}(X) - \{\emptyset, X\}$

とする．このとき，部分群 $K \leq G$ に対し，$\varphi(\widetilde{\Lambda}_{P(X)})$ の (K) 成分は，$P(X)^K (= \mathrm{inv}_K(P(X)))$ の被約 Euler-Poincaré 標数に等しい：

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i|Sd_i(P(X)^K)| - 1.$$

次に，本質的には [Th87, Proposition 5.1] で証明された以下の命題の組合せ論的な証明を与える．

Proposition 4.1. *Let X be a finite left G-set. The reduced Lefschetz invariant $\widetilde{\Lambda}_{P(X)}$ of $P(X)$ is the image of π_X by the tom Dieck homomorphism.*

Proposition 4.1 の組合せ論的な証明のためには，以下の補題が必要である．

Lemma 4.2. *For each positive integer j, set*

$$c_j = \sum_{i=0}^{j}(-1)^i \sum_{(n_1,n_2,\dots,n_i)\in A(i,j)} \binom{j}{n_1, n_2, \dots, n_i},$$

where $A(i,j) = \{(n_1, n_2, \dots, n_i) \mid \sum_k n_k = j$ and $n_1, n_2, \dots, n_i \in \mathbb{N}\}$ and

$$\binom{j}{n_1, n_2, \dots, n_i} = \frac{j!}{n_1!n_2!\cdots n_i!} \quad (\textit{multinomial coefficients}).$$

Then $c_j = (-1)^j$ for any positive integers j.

β の明示的な表現の計算に戻る (cf. 等式 (4.1))．

Corollary 4.3. *The reduced Lefschetz invariant $\widetilde{\Lambda}_{P([n])}$ of $P([n])$ coincides with β.*

与えられた部分群 $H \leq G$ に対し，H の自明な指標 1_H を G に誘導した $\mathbb{C}$ 指標を 1_H^G と書く．1_H^G は置換指標 $\pi_{G/H}$ と同値である．

$[n]$ の任意の置換のサイクル型 $\lambda = (1^{m_1}, \dots, n^{m_n})$ に対し，$S_1^{(m_1)} \times \cdots \times S_n^{(m_n)}$，ただし，各 $S_j^{(m_j)}$ は対称群 S_j の m_j 個の直積，と同型な S_n の Young 部分群を S_λ と書く．ν_n を $1_Y^{S_n}$，ただし，$Y \in \mathfrak{Y}_n$，の $\mathbb{Z}$ 線形結合として詳細に表す準備が整った．この結果は，[JK81, Theorem 2.3.15] における ν_n の表現の簡易化である．

Theorem 4.4. *The alternating character ν_n of S_n is expressed explicitly in the form*

$$\nu_n = \sum_{\lambda=(1^{m_1},\dots,n^{m_n})} (-1)^{n+m_1+\cdots+m_n}\frac{(m_1+\cdots+m_n)!}{m_1!\cdots m_n!}1_{S_\lambda}^{S_n},$$

where the sum runs over all cycle types of permutations on n-letters.

Proof. Theorem 3.4 より $\beta = (-1)^n\alpha$ が示され $\nu_n = \overline{\mathrm{char}}_{S_n}(\alpha)$ が成り立つから，定理の主張は等式

$$((-1)^n\alpha) = \beta = \sum_{\lambda=(1^{m_1},\dots,n^{m_n})} (-1)^{n+m_1+\cdots+m_n}\frac{(m_1+\cdots+m_n)!}{m_1!\cdots m_n!}[S_n/S_\lambda] \tag{4.1}$$

と同値である．i を非負整数とする．このとき，$[Sd_i(P([n]))] = \sum_t [O_t]$，ただし，$O_t$ は $Sd_i(P([n]))$ の S_n 軌道，となる．S_n 軌道 O_t の任意の代表 $x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_i$ は，部分集合 $\{y_0, y_1, \dots, y_i, y_{i+1}\} \subset P([n])$ で，$k = 0, 1, \dots, i$ に対し $x_k = \dot\bigcup_{j=0}^{k} y_j$ と $[n] = \dot\bigcup_{j=0}^{i+1} y_j$ を満たすもの，— それは，$\ell = 1, \dots, n$ に対し，$m_\ell = \sharp\{k \mid y_k = \ell\}$ を満たすサイクル型 $(1^{m_1}, \dots, n^{m_n})$ に対応する —, を定める．逆に，$\lambda = (1^{m_1}, \dots, n^{m_n})$ が，$\sum_\ell m_\ell = i + 2 \geq 2$ を満たす $[n]$ の置換のサイクル型であるならば，$Sd_i(P([n]))$ の

$$\frac{(m_1+\cdots+m_n)!}{m_1!\cdots m_n!}$$

個の S_n 軌道，それは，S_n/S_λ と同型な S_n 集合である，を構成することができる．ゆえに，等式 (4.1) は Corollary 4.3 より従う． □

Remark 2. Frobenius の相互律 (たとえば，[CR81, (10.9)] 参照) により，任意の部分群 $H \leq G$ に対し，$\langle 1_H^G, 1_G \rangle_G = \langle 1_H, 1_H \rangle_H = 1$ を得る．Theorem 4.4 から，等式

$$\sum_{\lambda=(1^{m_1},\ldots,n^{m_n})} (-1)^{m_1+\cdots+m_n} \frac{(m_1+\cdots+m_n)!}{m_1!\cdots m_n!} = (-1)^n \langle \nu_n, 1_{S_n} \rangle_{S_n} = 0$$

が従う．

Example 3. 等式 (4.1) により，$G = S_n$ かつ $\chi = \pi_{[n]}$ のとき，等式 (2.1) の $[S_n/U]$ の係数と等式 (3.1) における $[S_n/Y]$ の係数は完全に決定される．$n = 3$ のときは，

$$\alpha = [S_3/S_{(1^3)}] - 2[S_3/S_{(1^1,2^1)}] + [S_3/S_{(3^1)}].$$

([JK81, pp. 41–42 and Theorem 2.3.15] も参照)．$n = 4$ のときは，

$$\alpha = [S_4/S_{(1^4)}] - 3[S_4/S_{(1^2,2^1)}] + [S_4/S_{(2^2)}] + 2[S_4/S_{(1^1,3^1)}] - [S_4/S_{(4^1)}]$$

が成り立つ．

5 Concluding remarks

e が，$2e \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ を満たす $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ のべき等元であるならば，$1-2e$ と $-1+2e$ は $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の単元である．α は $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の単元だから $(1-\alpha)/2$ は $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ のべき等元である．しかし，$(1_{S_n} - \nu_n)/2 \notin R(S_n)$ だから，$(1-\alpha)/2 \notin \Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ である．したがって，以下の命題を得る．

Proposition 5.1. *The idempotents of* $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ *are only* 0, 1.

Proposition 5.1 の S_n 集合を用いた *Proof* はどうなるだろうか? もちろん，等式 (4.1) において，$[S_n/S_{(1^n)}]$ の係数はいつでも $(-1)^n$ だから，$(1-\alpha)/2 \notin \Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ である．この事実は，Theorem 3.4 の結論でもある．なぜなら，それは [Ma82, (5.4.1)] — e が非自明なべき等元，すなわち，$e \neq 0, 1$ である $\Omega(S_n)$ のべき等元，ならば，単元 $1-2e$ は tom Dieck 準同型による像には含まれない — から従うからである．

以下の補題は，[Yo90a, Lemma 2.1] (また，[Di79, Proposition 1.3.5] 参照) であり，[Yo90a] において tom Dieck 準同型の存在性の証明に用いられた．

Lemma 5.2. *An element* $(x_H)_{(H)\in C(G)}$ *of* $\widetilde{\Omega}(G)$ *is included in the image* $\mathrm{Im}\varphi$ *by the Burnside homomorphism if and only if*

$$\sum_{gU\in W_G(U)} x_{\langle g\rangle U} \equiv 0 \pmod{|W_G(U)|}$$

for all $(U) \in C(G)$.

$(1-\alpha)/2 \notin \Omega(S_n)$ の直接的な証明を与えてこの報告を終える．

Proof of Proposition 5.1 $\varphi(\alpha) = (\alpha_H)_{(H)\in C(G)}$ とする．Lemma 3.3 および Theorem 3.4 (あるいは，α の定義) より

$$\sum_{\sigma\in S_n} \frac{1-\alpha_{\langle\sigma\rangle}}{2} = \sum_{\sigma\in S_n} \frac{1-\nu_n(\sigma)}{2} = |A_n| \not\equiv 0 \pmod{|S_n|},$$

ここで，σ が $\tau \in S_n$ と共役で $(\langle\tau\rangle) \in C(G)$ を満たすならば，$\alpha_{\langle\sigma\rangle} = \alpha_{\langle\tau\rangle}$ である，が成り立つ．これと，Lemma 5.2 は，$((1-\alpha_H)/2)_{(H)\in C(S_n)} \notin \mathrm{Im}\varphi$ を示す．ゆえに，$(1-\alpha)/2 \notin \Omega(S_n)$ を得る． □

参考文献

[ACNT13] Asai, T.; Chigira, N.; Niwasaki, T.; Takegahara, Y.: *On a theorem of P. Hall*, J. Group Theory **16** (2013), 69–80.

[BBTH92] Bergeron, F.; Bergeron, N.; Howlett, R.B.; Taylor, D.E.: *A Decomposition of the Descent Algebra of a Finite Coxeter Group*, J. Algebraic Combinatorics **1** (1992) 23–44.

[BP07] Boltje, R.; Pfeiffer, G.: *An algorithm for the unit group of the Burnside ring of a finite group* In: Groups St. Andrews 2005. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press (2007).

[Bo00] Bouc, S.: Burnside rings, Handbook of algebra, **2**, 739–804, North-Holland, Amsterdam, 2000.

[CR81] Curtis, C.W.; Reiner, I.: Methods of Representation Theory, **I**, **II**, Wiley- Interscience, New York, 1981, 1987.

[Di79] tom Dieck, T.: Transformation Groups and Representation Theory, Lecture Notes in Mathematics, **766**, Springer, Berlin, 1979.

[IO15] Idei, H.; Oda, F.: *The table of marks, the Kostka matrix, and the character table of the symmetric group*, J. Algebra **429** (2015), 318–323.

[JK81] James, G.D.; Kerber, A.: The Representation Theory of the Symmetric Group, Encyclopedia of mathematics and its applications, **16**, Addison–Wesley, Reading, MA, 1981.

[Ma82] Matsuda, T.: *On the unit groups of Burnside rings*, Japan. J. Math. (N.S.) **8** (1982), 71–93.

[OTY] Oda, F.; Takegahara, Y.; Yoshida, T.:*The units of a partial Burnside ring relative to the Young subgroups of a symmetric group*, submitted.

[Th87] Thévenaz, J.:*Permutation representations arising from simplicial complexes*, J. Combin. Theory Ser. A **46** (1987), 121–155.

[Ya91] Yamauchi, K.: *On the units in a character ring*, Hokkaido Math. J. **20** (1991), 477–479.

[Yo90a] Yoshida, T.: *On the unit groups of Burnside rings.* J. Math. Soc. Japan **42** (1990) no. 1, 31–64.

[Yo90b] Yoshida, T.: *The generalized Burnside ring of a finite group*, Hokkaido Math. J. **19** (1990), 509–574.

グラフと有限群の再構成予想
Reconstruction Conjecture for graphs and finite groups

吉田 知行 (YOSHIDA, Tomoyuki) *;
北星学園大学
email:t-yoshida@hokusei.ac.jp
小田文仁 (ODA, Fumihito) †;
近畿大学
email:odaf@math.kindai.ac.jp
竹ヶ原祐元 (TAKEGAHARA, Yugen)
室蘭工業大学
email:yugen@mmm.muroran-it.ac.jp

概要: グラフの再構成予想は，グラフ理論における有名な未解決予想である．これはある条件の下で，二つのグラフが同型であることを予想する，グラフの同型の判定問題のひとつである．同様の予想は，有限群につても考えられる．

キーワード： reconstruction conjecture, Thompson's conjecture, arithmetic equivalence, universal zeta function of finite groups, Yoneda's lemma

1 グラフの再構成予想

1.1 Ulam-Kelly 予想

$G = (V(G), E(G))$ と $H = (V(H), E(H))$ を二つのグラフとする．頂点集合に

$$V(G) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, V(H) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

と番号を付けておく．各 i に対し，グラフ同型

$$G - \{u_i\} \cong H - \{v_i\}$$

があるとき，G と H は **hypomorphic** であるという．ここで，$G - \{u\}$ は，グラフ G から，頂点 u とそれにつながる辺をすべて削除して得られたグラフである．

再構成予想 (The reconstruction conjecture, RC). $n \geq 3$ とする．このとき G と H が hypomorphic なら，G と H はグラフ同型である．

この予想は S.M.Ulam が数学パズルの本に発表して知られるようになった (1960)．そのため Ulam 予想と呼ばれる．しかし，Ulam の師匠の P.J.Kelly が 1942 に非公式に発表しており，また 1957 の論文で，tree に対する弱い形の RC(二つの tree が hypomorphic なら同型) を証明している．そのため，この予想は Kelly 予想とか Ulam-Kelly 予想とも呼ばれる．

1.2 RC に関する解説記事

・O'Neil, Peter V., Ulam's conjecture and graph reconstructions. *AM Monthly*, **77** (1970), 35—43.
・Harary, F., A Survey of the RC, in "Graphs and Combinatorics", Springer LNM **406**, (1974), 18—28.

* supported by JSPS KAKENHI Grant #25400001
† supported by JSPS KAKENHI Grant #25400003

・Bondy, J.A., A graph reconstructor's manual, in "Surveys in Combinatorics", (Proc. 13th British Combin. Conf.), ed by Guildford, London MS. LN **166** (1991), 221-252.
・Lauri, J., The Reconstruction Problems, in "Handbook of Graph Theory" Chapman and Hall (2007, 2014)
・Wikipedia, "Reconstruction Conjecture".

1.3 解決済みのグラフ

グラフ G に hypomorphic なグラフは G に限るとき，G は**再構成可能** (reconstructible, RC) であるという．

RC は，3 点以上の頂点を持つすべてのグラフが再構成可能であることを予想している．再構成可能なグラフがいくつか知られている．

1. 木 (tree). Kelly(1957), Harary(1974).
2. 正則グラフ． Harary(1974).
3. 不連結グラフ．Harary(1974).
4. 頂点数 $n \leq 11$ のグラフ．Mackay(1997).
5. 不連結な補グラフを持つグラフ．

そのほか，2 連結グラフが再構成可能なら，すべてのグラフに対し RC は正しい (Yang 1988).

1.4 再構成可能なグラフの性質

グラフ G から，グラフの重複集合 (multiset)

$$D(G) := \{\{G - \{u\}\}\}$$

ができる．RC は $D(G) \cong D(H)$ () から $G \cong H$ がしたがうことを主張している．

$D(G)$ から導かれるグラフの性質 (不変量) を**再構成可能** (reconstractible, recognizable, RP) であるという．たとえばグラフの位数 $n = |V(G)|$ は，$D(G)$ に含まれるグラフの個数に等しいので，RP である．位数 3 以上のグラフのどんな不変量も RP であるというのが RC である．

Harary による次の定理は，基本的かつ重要なグラフ不変量が再構成可能であることを示す．

定理 1.1 二つのグラフ G, F について，$|V(F)| < n = |V(G)|$ なら次が成り立つ．

(1) $|\mathrm{Sub}(F,G)|$ は RP である．ここで $\mathrm{Sub}(F,G)$ は，F に同型な G の部分グラフの集合である．
(2) $|\mathrm{Hom}(F,G)|$ は RP である．ここで $\mathrm{Hom}(F,G)$ はグラフ準同型の集合である．

(Proof) (1) 集合

$$\{(F', u) \mid F \cong F' \subset G, u \in V(G) - V(F')\}$$

の大きさを二通りの方法で数えることによって

$$|\mathrm{Sub}(F,G)| = \frac{1}{n - |V(F)|} \sum_{u \in V(G)} |\mathrm{Sub}(F, G-u)|$$

が得られる．よって $|\mathrm{Sub}(F,G)|$ は RP である．
(2) グラフのカテゴリー **grph** は一意的 epi-mono 分解を持つので

$$|\mathrm{Hom}(F,G)| = {\sum_{|V(F')|<n}}' |\mathrm{Epi}(F,F')| s(F', G).$$

となる．よって $|\mathrm{Hom}(F,G)|$ は RP である，■

この定理から，辺の個数 $|E(G)|$ も RP である．そのほかにも，Tutte 多項式，彩色多項式，平面性，結合行列 A の固有値，一般化固有多項式 $\det(A - \lambda I - \mu J)$ が RP である．Bass の行列式公式により，伊原ゼータ関数も RP となる:

$$Z_G^I(u) = (1-u^2)^{1-q+n} \det(I - uA + u^2(D-I))^{-1}.$$

同じ伊原ゼータ関数を持つ 2 つのグラフは同型であるという予想は反例がある．したがって伊原ゼータの RP が示されてもまだ RC には届かない．

1.5 同型判定問題

Harary の研究では表だってカテゴリーの言葉を使っていないが，カテゴリーとの関わりを示唆する内容である．たとえば RC は，次のように書き換えられる．

RC の書き換え; $|V(F)| < n = |V(G)|$ を満たすすべてのグラフ F に対する $|\mathrm{Hom}(F,G)|$ から，グラフ G が一意的に決まる．

Hom を Sub にしても同じである．これはグラフの RC がグラフのカテゴリーと深く関わってい

ることを示唆する．つまり $|\mathrm{Hom}(-,G)|$ のサイズからグラフを一意的に再構成できるかという問題である．

グラフの同型判定問題はグラフ理論の重要な研究分野である．これについては次の本がある．

戸田誠之助『グラフ同型性判定問題』(日本大学文理学部叢書) 日本大学文理学部 (2001/11)

グラフのカテゴリーの持つ一意的 epi-mono 分解の可能性が定理 1.1 の証明に効いている．抽象バーンサイド環との関係は後で述べることにして，同型判定に関する古典的な結果をいくつか挙げる．

(1) Burnside の同型判定定理 (1897).

定理 1.2 有限 G-集合 X,Y について

$$X \cong_G Y \iff |X^H| = |Y^H| \quad (\forall H \le G)$$

ここで X^H は H による固定点集合で，次の全単射がある:

$$\mathrm{Hom}(G/H, X) \cong X^H; f \mapsto f(H)$$

そうなると，グラフの再構成問題も Burnside の定理も同じタイプの同型判定問題となる．この定理は Burnside 環の理論において，Burnside homomorphism φ の単射性を示すのに使われる．

(2) 群環の同型と群の同型.

定理 1.3（Wiles 1970） 有限ベキ零群 G, H に対して，

$$\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}H \quad \Longrightarrow \quad G \cong H.$$

この G.Higman(1940) の予想で，ベキ零群の整群環の単数群に関する Zassenhaus 予想の解決と同時に証明された.

(3) 米田の補題.

定理 1.4 $\mathscr{C}$ をカテゴリー，$[\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ を反変関手のカテゴリーとする．$X, Y \in \mathscr{C}$ に対し，$[\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ において

$$\mathrm{Hom}(-,X) \cong \mathrm{Hom}(-,Y)$$

なら $X \cong Y$.

このような Hom を使って同型を判定する例は，グラフの RC だけでなく，様々な組合せ論や代数系においても見られる.

2 有限群

2.1 有限群の再構成予想

再構成予想を準同型写像の個数による同型判定問題ととらえ直せば，グラフ以外の代数系でも再構成予想が考えられる.

有限群の再構成予想 (RC) 有限群 G, H は hypomorphic なら同型である.

肝心の hypomorphic は，何らかの有限群の族 $\mathscr{A}$ について

$$|\mathrm{Hom}(A,G)| = |\mathrm{Hom}(A,H)| \quad \forall A \in \mathscr{A}$$

であることとして定義するのが自然である．ここでは $\mathscr{A}$ として，主に有限アーベル群全体の族 **abgp** を使って定義する．巡回群やベキ零群の族についても同様の議論ができる.

グラフの場合と同様に，群についても

$h(A,G) := |\mathrm{Hom}(A,G)|$ (準同型写像の個数),
$s(A,G) := |\mathrm{Sub}(A,G)|$ (A に同型な部分群の個数)

と置く.

有限群 G と H が (有限アーベル群に関して) **hypomorphic** であることを，次の 3 つのたがいに同値な条件のどれか (したがってすべて) が成り立つことと定義する.

(H) $h(A,G) = h(A.H)$ が任意の有限アーベル群に対して成り立つ.

(H_∞) $h(A,G) = h(A.H)$ が任意の有限生成アーベル群に対して成り立つ.

(S) $s(A,G) = s(A.H)$ が任意の有限アーベル群に対して成り立つ.

2.2 有限群の Hom と Sub

定理 2.1（反転公式） 有限アーベル群 A と有限群 G に対し次が成り立つ:

(1) $h(A,G) = \sum_{B \le A} |\mathrm{Aut}(B)| s(B,G)$.

(2) $s(A,G) = \dfrac{1}{|\mathrm{Aut}(A)|} \sum_{B \le A} \mu(B,A) h(B,G)$.

ここで $\mu(B,A)$ は A の部分群束のメビウス関数である．この関数は次のように計算出来る．

(a) A/B が素数位数の巡回群の直積でなければ $\mu(B,A) = 0$.

(b) $A/B \cong \prod_p (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r(p)}$ なら

$$\mu(B,A) = \mu(1, A/B) = \prod_p (-1)^{r(p)} p^{\binom{r(p)}{2}}.$$

これによって hypomorphic の条件の (H) と (S) の同値性が分かる．

またこの定理の証明には有限アーベル群の双対性: $h(A,B) = h(B,A)$ などを使っている．

2.3　再構成可能な群の性質

$(h(A,G))_A$ だけで決まる群 G の性質を**再構成可能な性質**という．

定理 2.2　以下の性質は再構成可能である．

(1) $|G|$.

(2) $|G_n|$. ここで $G_n := \{x \in G \mid x^n = 1\}$.

(3) 位数 n の元の個数.

(4) 正規 Hall 部分群の存在.

(5) 素グラフ $\pi(G)$.

(6) 共役類の個数 $k(G)$.

(7) p-rank.

(8) ベキ数.

たとえば (1) と (6) は次の式から証明できる:

$$|G| = h(\mathbb{Z}, G),$$
$$k(G) = \frac{1}{|G|} h(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, G)$$

(4) は Frobenius 予想の解決からしたがう:

定理 2.3（飯寄-八牧）　$|G_n| = n$ なら G_n は G の (正規) 部分群である．

2.4　再構成可能性に関するたぶん未解決の問題.

(1) 群 G が単純群 (あるいは可解群，べき零群) であるという性質は再構成可能か?

(2) 群 G の中心 $Z(G)$, 交換子群による剰余群が自明かどうかは再構成可能か?

(3) 有限群 G の再構成可能性と部分群・剰余群の再構成可能性の関係を見いだせ?

(4) 類等式は再構成可能か?

(5) シロー群は再構成可能か?

(6) 巡回群の族に関して再構成可能な性質は何か?

(4) の類等式の再構成可能性は重要な問題である．おそらく正しいであろう．(6) に関しては, たとえば Hall 正規部分群の存在は巡回群から再構成可能である．つまり，数列 $\{|G_n|\}_{n=1,2,\ldots}$ から判定できる．

2.5　再構成可能な群

ある群 G が**再構成可能** (reconstructible) であるとは，G に hypomorphic な群が G に限ることをいう．

例 2.1　アーベル群に対し RC は正しい．より強い結果も成り立つ: G, H を位数 n のアーベル群とする．$r \le \sqrt{n}$ を満たす n の任意の約数 r に対し $h(C_r, G) = h(C_r, H)$ が成立すれば，G と H は同型である．

つまり有限アーベル群については，巡回群に関する再構成予想が成立する．

例 2.2　Frobenius 群は再構成可能である．

例 2.3　extra-special p-群は再構成可能である．

2.6　Thompson 予想

有限群の同型問題のひとつに Thompson 予想がある．有限単純群の再構成予想と密接に関係している．

G を有限群，$N(G)$ を G の共役類のサイズの集合とする:

$$N(G) := \{(G : C_G(x)) \mid x \in G\}.$$

Thompson 予想 (TC) L を非可換有限単純群と

する．このとき $Z(G)=1$ かつ $N(G)=N(L)$ なる有限群 G は L に同型である．

Thompson 予想の難しさは，片方の群 G が単純群であるとは限らないところにある．思ったよりむずかしい問題である．

TC はこれまで，いくつかの単純群 (とくにすべての散在型単純群に対して正しいことが証明されている．

Chen Guiyun, On Thompson's Conjecture, *J.Algebra*, **185** (1996), 184—193.

有限単純群 L に対する再構成予想 (RC) は次のような方針で解決できる．.

(ステップ 1) 一般の有限群 G に対し，類等式が再構成可能であることを示す．
(ステップ 2) 有限単純群 L に対する Thompson 予想を解決する．

この 2 つが示されれば，L に対する RC は正しい．

Thompson 予想の強化版もある．

強化版 Thompson 予想 (STC) L を非可換有限単純群とし，あるサイズ n の共役類を持つとする．さらに G を L と同じ位数でサイズ n の共役類を持つとする．このとき G は L に同型である．

たとえば $L_2(p)$ は STC を満たす．

Chen, Y/Chen G., Recognizing $L_2(p)$ by its order and one special conjugacy class size, *J. Inequalities and Applications,* 2012:310, 1–10.

Thompson 予想にしても，その強化版にしても，証明はきわめて煩雑である．さらに STC を満たす単純群はきわめて珍しいようだ．

なお有限群 G の位数と共役類の個数 k との関係について次の不等式がある (Landou 1903).

$$|G| \le 2^{2^{k-2}} \prod_{i=2}^{k} i^{2^{i-2}} \approx (2k)^{2k-3} \exp(2^k \log_2 k)$$

(最後の漸近式は吉田の昔の結果)．つまり与えられた共役類の個数を持つ有限群は有限個しかない! *1

*1 原田耕一郎先生からの指摘.

3 ゼータ関数の一致と再構成予想

3.1 体の算術同値 (ZIP)

Dedekind のゼータ関数が等しい

$$\zeta_K(s) = \zeta_L(s)$$

二つの代数体 K，L のことを**算術同値** (arithmetically equlivalent) であるという．黒川重信氏は，算術同値から体の同型を問う問題をゼータ識別問題 (zeta identification problem, **ZIP**) と呼んでいる．

黒川重信氏「リーマン予想の 150 年」岩波書店 (2009) の 6.7 節．

しかし Dedekind ゼータの ZIP には反例がある．

Perlis, R., On the Equation $\zeta_K(s) = \zeta_{K'}(s)$, JNT **3**, 342–360 (1977).

Perlis の論文では Gassmann 同値の概念を使っている．有限群 G の部分群 H, H' が **Gassmann 同値**であるであるとは，G の任意の共役類に対し

$$|C \cap H| = |C \cap H'|$$

が成り立つことをいう．

どのような場合に Gassmann 同値から部分群の共役がしたがうかは群論的にも興味深い．

ゼータ関数が定義されれば当然 ZIP が考えられる．そのような例として，有限力学系 (X, σ) を考える．ここで X は有限集合で，$\sigma : X \to X$ は X 上の全単射である．このとき Artin-Mazur のゼータ関数が

$$67\ Z_X^{\mathrm{AM}}(u) := \exp\left(\sum_{m \ge 1} \frac{|\mathrm{Fix}_X(\sigma^m)|}{m} u^m\right)$$

で定義される．ここで

$$\mathrm{Fix}_X(\sigma^m) = \{x \in X \mid \sigma^m(x) = x\}$$

は固定点集合である．

有限力学系では ZIP が成り立っている．

$$Z_X^{\mathrm{AM}}(u) = Z_Y^{\mathrm{AM}}(u) \implies X \cong Y.$$

3.2　有限群の Hom-set 行列

A, B, G を有限群とする．

$$\begin{aligned} h(A,B) &:= |\mathrm{Hom}(A,B)|, \\ q(A,B) &:= \sharp\{A_1 \trianglelefteq A \mid A/A_1 \cong B\}, \\ d(A,B) &:= |\mathrm{Aut}(A)|\delta_{A,B}, \\ s(A,B) &:= \sharp\{A_1 \le B \mid A_1 \cong A\} \end{aligned}$$

と置く．

$|\mathrm{Aut}(A)|s(A,B)$ は A から B への単射準同型写像の個数に等しい．$q(A,B)|\mathrm{Aut}(B)|$ は A から B への全射準同型写像の個数に等しい．

$\mathscr{A}$ を有限群の同型類の集合で，部分群と剰余群に関して閉じているとし次の無限次行列を考える．

$$\begin{aligned} H &= (h(A,G))_{A,G}, \\ Q &= (q(A,B))_{A,B}, \\ D &= (|\mathrm{Aut}(A)|\delta_{A,B}|)_{A,B}, \\ S &= (s(A,G))_{A,G}. \end{aligned}$$

ここで，A, B は $\mathscr{A}$ に属する有限群の同型類であり，G は任意の有限群である..

考えている群がすべて有限アーベル群の場合，次の双対性が成り立つ：

$$h(A,B) = h(B,A), q(A,B) = s(B,A).$$

すなわち ${}^tH = H$ かつ ${}^tQ = S$ (ここで S の添え字は有限アーベル群に制限する) である．

定理 3.1（Hom-set 行列の LDU 分解）

(1) 有限群 A, G に対し次が成り立つ:

$$\begin{aligned} h(A,G) &= \sum_C{}' q(A,C)\cdot|\mathrm{Aut}(C)|\cdot s(C,G) \\ &= \sum_{B\trianglelefteq A} |\mathrm{Aut}(A/B)|\cdot s(A/B,G) \end{aligned}$$

ここで最初の和における C は有限群の同型類の全体を亘る．

(2) $H = QDS$.

(1) は群の準同形定理からしたがう．その行列による表現が (2) である．

3.3　Möbius 反転公式

群を位数の小さい順番に並べれば Q はベキ単三角行列，D は対角行列，S はベキ単上三角行列である．とくに Q は逆行列を持つ．Q の逆行列は順序集合の Möibius 関数で表せる．

μ_A と μ_A^n を群 A のそれぞれ部分群束と正規部分群の束の Möbius 関数とする．このとき

$$Q^{-1}(A,B) = \mu_B^n(B,A), S^{-1}(B,A) = \mu_A(B,A)$$

である．これより

定理 3.2（反転公式）

$$s(A,G) = \frac{1}{|\mathrm{Aut}(A)|}\sum_{B\trianglelefteq A}\mu_A^n(1,B)h(A/B,G).$$

正規部分群の束の Möbius 関数 $\mu_A^n(1,B)$ の計算が問題になる．ここではもっとも簡単な A が有限アーベル群の場合を扱う．この場合

$$\mu_A^n(1,B) = \mu_A(1,B) =: \mu(B)$$

と普通の Möbius 関数で表せる．

$\mu(B)$ の計算法 (B がアーベル群の場合).

(i) B_p が B の Sylow p-部分群とすれば

$$\mu(B) = \prod_p \mu(B_p).$$

(ii) B_p が基本可換 p-部分群でなければ $\mu(B_p) = 0$.

(iii) B_p が階数 r の基本可換 p-群なら

$$\mu(B_p) = (-1)^r p^{\binom{r}{2}}.$$

例 3.1　$\mathscr{A} = \mathbf{cyc}$ を有限巡回群全体の族とする．C_n を位数 n の巡回群とする．このとき

$$\begin{aligned} h_n^{\mathrm{cyc}} &:= h(C_n,G) = \sharp\{x\in G \mid x^n = 1\}, \\ s_n^{\mathrm{cyc}} &:= s(C_n,G), \\ h_n^{\mathrm{cyc}} &= \sum_{r|n}\varphi(r)s_r^{\mathrm{cyc}}, \\ s_n^{\mathrm{cyc}} &= \sum_{r|n}\mu(n/r)\varphi(r)s_r^{\mathrm{cyc}}. \end{aligned}$$

$\varphi(r)s_r^{\mathrm{cyc}}$ は G の位数 r の元の個数に等しい．$\varphi(n)$ は Euler 関数，$\mu(n)$ は Möbius 関数である．

3.4 有限群のゼータ関数

(有限群の族 $\mathscr{A}$ に関する) 有限群 G の **Frobenius 型**，および **Sylow 型のゼータ関数**を次で定義する:

$$H_G^{\mathscr{A}}(z) := \sum_A{}' \frac{h(A,G)}{|\mathrm{Aut}(A)|}|A|^{-z},$$
$$S_G^{\mathscr{A}}(z) := \sum_A{}' s(A,G)|A|^{-z}.$$

ここで，A は $\mathscr{A}$ に含まれる群の同型類全体を亘る．

例 3.2 $\mathscr{A}$**cyc** (有限巡回群全体) に対し，

$$H_G^{\mathrm{cyc}}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^{\mathrm{cyc}}}{n^z},$$
$$S_G^{\mathrm{cyc}}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)s_n^{\mathrm{cyc}}}{n^z} = \sum_{g\in G}\frac{1}{|g|^z},$$
$$H_G^{\mathrm{cyc}}(z) = \zeta(z)S_G^{\mathrm{cyc}}(z)$$

となる．

なお 最後の等式は次の円分恒等式と同値である:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-t^n}\right)^{a_n/n} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n}{n}t^n\right).$$

ここで

$$a_n := \sharp\{g \in G \mid |g| = n\},$$
$$h_n := \sharp\{g \in G \mid g^n = 1\}.$$

・吉田「シローおよびフロベニウスの定理を結ぶゼータ関数」RIMS 講究録 **768** (1991), 1–19.

・「$|\mathrm{Hom}(A,G)$ (III)」ASPM **32**(2001), 465–475.

とくに $G = C_N$ (位数 N の巡回群) の場合，左辺の積は

$$\prod_{n|N}\left(\frac{1}{1-t^n}\right)^{\varphi(n)/n}$$

となる．

$t = e^{-s}$ と置けば，これは "1-元体" $\mathbb{F}_1$ (!) 上の代数 $\mathbb{F}_1^N$ のヴェイユゼータ関数

$$\zeta_{\mathbb{F}_1^N}^{\mathrm{Weil}} = \prod_{n|N}(1-e^{-ns})^{\varphi(n)/n}$$

となる．前出黒川「150 年」定理 7.4.1．不思議な関係である．

$\mathscr{A}$ が部分群と剰余群に関して閉じている場合，同様の議論ができる．とくにべき零群からなるの場合は簡単で，中心拡大に依存する量でゼータ因子 $H_G^{\mathscr{A}}(z)/S_G^{\mathscr{A}}(z)$ が決まる．以下では簡単のため，$\mathscr{A}$ が有限アーベル群全体の族 **abgp** の場合に考える．

まず，反転公式より次の恒等式が示される．

定理 3.3

$$H_G(z) = S_G(z)\zeta(z)\zeta(2z)\zeta(3z)\cdots$$

右辺のゼータ因子について

$$\zeta(z)\zeta(2z)\zeta(3z)\cdots = \sum_A{}' \frac{1}{|\mathrm{Aut}(A)|}|A|^{-z}$$

である．

これは P.Hall(1938) による研究，特に奇妙な恒等式

$$\sum_A{}' \frac{1}{|\mathrm{Aut}(A)|} = \sum_A{}' \frac{1}{|A|}$$

を連想させる．ここで A は有限アーベル p-群の同型類を亘る．

かくて有限群のアーベル群に関する再構成予想 (RC) はつぎのような ZIP になる:

有限群のゼータ関数版再構成予想 (ZIP)． 有限群 G, H に対し次は同値である:

(a) $H_G(z) = H_H(z)$.

(b) $S_G(z) = S_H(z)$.

(c) $G \cong H$.

すでに述べたように，この予想は間違っている．しかしべき零群に関するゼータ関数なら予想が成り立つかもしれない．

4 米田の埋め込み関手と同型判定問題

4.1 米田の補題

各対象 $X \in \Gamma$ に反変 Hom 関手

$$h_X := \mathrm{Hom}(-,X) : \Gamma \to \mathbf{Set}; A \mapsto \mathrm{Hom}(A,X)$$

を，射 $f : X \to Y$ に関手間の射 (自然変換)

$$\begin{array}{cccc} h_f : & h_X & \longrightarrow & h_Y \\ ; & (\alpha : A \to X) & \longmapsto & (f\circ\alpha : A \to Y) \end{array}$$

を対応させる．これによって $\varGamma$ から前層のカテゴリーへの関手

$$\mathbf{y} : \widehat{\varGamma} := \varGamma \to [\varGamma^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]; X \mapsto h_X$$

が得られる．この関手を**米田の埋め込み関手**いう．

定理 4.1（米田の補題）
(i) $\mathrm{Hom}(h_X, h_Y) \cong \mathrm{Hom}(X, Y)$ (自然同型).
(ii) $X \cong Y \Leftrightarrow h_X \cong h_Y$.

4.2　カテゴリー論的再構成予想・問題

$\varGamma$ をカテゴリー，$\varLambda$ をその部分カテゴリーとする．

カテゴリー論的再構成予想 (CRC). 米田の埋め込みの $\varLambda$ への制限

$$\mathbf{y}_{|\varLambda} : \varLambda \subseteq \varGamma \xrightarrow{\mathbf{y}} \widehat{\varGamma}$$

は同型を reflect する．

すなわち $X, Y \in \varGamma$ に対し

$$\mathrm{Hom}(A, X) \cong \mathrm{Hom}(A, Y) \quad (A \in \varLambda \text{ に関して自然})$$

のとき X, Y は **hypomorphic** であるとよぶ．hypomorphic なら同型というのが CRC である．

例 4.1　G を有限群とする．
(i) $\varGamma = \mathbf{set}^G$ を有限 G-集合のカテゴリーとする．$\varLambda = \mathbf{trans}^G$ を可移 G-集合の成す充満部分カテゴリーとする．このとき米田の補題により CRC がなりたつ．すなわち

$$X^H \cong Y^H \quad (H \leq G \text{ に関して自然})$$

なら $X \cong_G Y$ である．これは $\mathrm{Map}_G(G/H, X) \cong X^H$ と，すべての有限 G-集合は有限個の可移 G-集合の直和であることによる．
(ii) 同様に $\varLambda' = (\mathbf{trans}^G)^{\mathrm{disc}}$ を可移 G-集合の成す離散部分カテゴリーとする．このとき CRC もなりたつ．つまり $|X^H| = |Y^H|$ $(\forall H \leq G)$ なら $X \cong_G Y$ である．これは Burnside 環の理論で，Burnside 準同形 φ が単射であることからしたがう．後述．

4.3　カテゴリー論的に再構成可能な関手

前と同様，$\varGamma$ をカテゴリー，$\varLambda$ をその部分カテゴリーとする．このとき，関手 $F : \varGamma \to \mathbf{Set}$ が $\varLambda$ に関して**再構成可能な関手**であるとは，任意の $X, Y \in \varGamma$ に対し，

$$h_{X|\varLambda} \cong h_{Y|\varLambda} \quad \Longrightarrow \quad F(X) \cong F(Y)$$

であることをいう．

カテゴリー論で **Kan** 構成と呼ばれる関手がある．これを制限関手 $\mathrm{Res} : \widehat{\varGamma} \to \widehat{\varLambda}$ に使うと随伴列 $\mathrm{Lan} \dashv \mathrm{Res} \dashv \mathrm{Ran}$ が得られる．

たとえば，$\varGamma$ が有限群 G (対象がひとつだけのカテゴリー)，$\varLambda$ がその部分群 H の場合，$\mathrm{Res} : \widehat{\varGamma} \to \widehat{\varLambda}$ は有限 G-集合の作用の H への制限である:$\mathbf{Set}^G \to \mathbf{Set}^H$．さらに $\mathrm{Lan}(Y) = \mathrm{Ind}^G(Y) = G \times_H Y$ は誘導 G-集合，$\mathrm{Ran}(Y) = \mathrm{Jnd}^G(Y) = \mathrm{Map}_H(G, Y)$ は乗法的 G-集合である．

$X, Y \in \varGamma$ が CRC の仮定を満たすとする．これは $\mathrm{Res}(h_X) \cong \mathrm{Res}(h_{|}Y)$ を意味する．このとき Kan 構成から次の図式を得る．

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Lan} \circ \mathrm{Res}(h_X) & \longrightarrow & h_X & \longrightarrow & \mathrm{Ran} \circ \mathrm{Res}(h_X) \\
{\scriptstyle\cong}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle\cong} \\
\mathrm{Lan} \circ \mathrm{Res}(h_Y) & \longrightarrow & h_Y & \longrightarrow & \mathrm{Ran} \circ \mathrm{Res}(h_Y)
\end{array}$$

これだけでは $h_X \cong h_Y$ (したがって $X \cong Y$) や $F(X) \cong F(Y)$ を言うのに遠すぎる．しかし少なくとも $\mathrm{Ran} \circ \mathrm{Res}(h_X)$ の中で作業できる．

4.4　有限群のカテゴリー論的再構成問題

有限群のカテゴリー **fgp** で考える．部分カテゴリーとして，有限アーベル群のカテゴリー **abgp** や有限巡回群のカテゴリー **cyc**，べき零群のカテゴリー **np** を取る．

例 4.2　$\varGamma = \mathbf{fgp}$，$\varLambda := \mathbf{abgp}$ で考える．このとき有限群 G, H が categorically hypomorphic であるとは，自然同型 $\theta : h_G \cong h_H$ が存在して，次の条件が成り立つことである:

(a) 任意の有限アーベル群 A に対して全単射

$$\theta_A : \mathrm{Hom}(A, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, H)$$

が存在する．
(b) 有限アーベル群の間の任意の準同形写像 $f: A \to B$ と $\beta: B \to X$ に対し，

$$\theta_A(\beta \circ f) = \theta_B(\beta) \circ f.$$

なお，(a) (b) の条件は，**局所的に同型写像** $\theta: G \to H$

$$\theta(xy) = \theta(x)\theta(y), \quad \forall x, y \in G \text{ s.t. } xy = yx$$

の存在に同値である．

結局，有限群に対するカテゴリー論的再構成予想は次のようになる:

(CRC) 二つの有限群が局所的に同型なら群としても同型である．

例 4.3 有限アーベル群の族の代わりに有限巡回群の族を採用すれば，局所同型の条件は，

$$\theta(x^k) = \theta(x)^k \quad (\forall x \in G, k \in \mathbb{Z})$$

となる．

Hall 正規部分群をはこの局所同型写像によって保存される．

巡回群にしても，アーベル群にしても，群に関するどのような性質が catgorically moromorphic (局所同型) で保たれるかが問題である．また，写像 $f: G \to H$ で条件

$$ab = ba \Rightarrow f(ab) = f(a)f(b)$$

を満たす写像を (有限アーベル群に関する) **局所準同形写像**と定義する．

たとえば整数 m に対し，$f_m(x) = x^m$ で定義される写像，局所自己準同形写像である．

有限群と局所準同型写像のなすカテゴリー **lgp** は普通の有限群のカテゴリー **fgp** とどのくらい違うのだろうか．たとえ CRC が正しいとしても，この二つのカテゴリーは同値なのだろうか．

5 抽象 Burnside 環との関係

5.1 有限カテゴリーの同型判定

補題 5.1 有限カテゴリー Γ が一意的全単射分解を持つとする．このとき次は同値である:

(A) $X \cong Y$.
(B) $\widehat{X} \cong \widehat{Y}$.
(C) $|\mathrm{Hom}(A, X)| = |\mathrm{Hom}(A, Y)|$ for any $A \in \Gamma$.
(D) $|\mathrm{Epi}(A, X)| = |\mathrm{Epi}(A, Y)|$ for any $A \in \Gamma$.
(E) $|\mathrm{Hom}(X, B)| = |\mathrm{Hom}(Y, B)|$ for any $B \in \Gamma$.
(F) $|\mathrm{Mon}(X, B)| = |\mathrm{Mon}(Y, B)|$ for any $B \in \Gamma$.

証明は Hom-set 行列の LDU-分解 $H = QDS$ や米田の補題を使えばよい．

例 5.1 G を有限群，$\mathbf{set}^G$ を有限 G-集合のカテゴリーとする．このとき有限 G-集合 X, Y に対し，

$$|X^H| = |Y^H| \ (\forall H \leq G) \Rightarrow X \cong Y.$$

ここで X^H は H-固定点の集合である．上の補題を使うときは，サイズが $\max(|X|, |Y|)$ 以下の G-集合のカテゴリー Γ としてそれに上の補題を使えば良い．

例 5.2 同様の判定は 有限力学系 (無限巡回群の作用する有限集合) のカテゴリーでも同様の議論ができる．つまり

$$|\mathrm{Fix}_X(\sigma^m)| = |\mathrm{Fix}_Y(\sigma^m)| \ (\forall m \in \mathbb{Z})$$

なら $(X, \sigma) \cong (Y, \sigma)$ である．これは Artin-Mazur のゼータ関数について，ZIP が正しいことを意味する．

5.2 抽象 Burnside 環

$\mathbb{Z}\Gamma$ を Γ の同型類の集合 $\Gamma/\cong$ 上の自由有限カテゴリー Γ が一意的 epi-mono 分解を持ち，さらに次の性質を持つとする:

(C) 任意の $X \in \Gamma$ と $\sigma \in \mathrm{Aut}(X)$ に対し $1: X \to X$ と $\sigma: X \to X$ の余等化 $eq: X \to X/\sigma$ が存在する．

また $\mathrm{Gh}(\Gamma) = \mathbb{Z}^\Gamma$ を $\Gamma/\cong$ 上の整数値関数の成す環とする (**ghost ring**).

$$\mathrm{Obs}(\Gamma) := \prod_{A \in \Gamma/\cong} (\mathbb{Z}/|\mathrm{Aut}(A)|\mathbb{Z})$$

を **obstruction** の群という．さらに二つの線形写像 (**Burnside 準同型**と Cauchy-Frobenius 写像)

を次で定義する:

$$\varphi; \mathbb{Z}\Gamma \to \mathrm{Gh}(\Gamma); [X] \mapsto (|\mathrm{Hom}(A, X)|)_A,$$

$$\psi(\chi) = \left(\sum_{\sigma \in \mathrm{Aut}(A)} \chi(A/\sigma) \mod |\mathrm{Aut}(A)| \right)_A .$$

定理 5.2（ABR の基本定理） 次は完全系列:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}\Gamma \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^{\Gamma} \xrightarrow{\psi} \mathrm{Obs}(\Gamma) \longrightarrow 0,$$

定理 5.3 $\mathbb{Z}\Gamma$ は唯一の環構造を持ちそれによって φ は環準同型写像となる．

こうして得られた環 $\mathbb{Z}\Gamma$ を抽象 **Burnside 環** (ABR) という．

5.3 Reconstrution conjectures revised

Γ を前と同様，一意的 epi-mono 分解を持ち，条件 (C) を満たす有限カテゴリーとする．さらに Λ を Γ の充満部分カテゴリー，任意の同型射 $\sigma \in \mathrm{Aut}(X)$ に対し，X/σ が Λ に属すると仮定する．このとき次の可換図式が得られる．

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}\Gamma & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Gh}(\Gamma) & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{Obs}(\Gamma) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \rho & \searrow^{\varphi'} & \downarrow \rho & & \downarrow \rho & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}\Lambda & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Gh}(\Lambda) & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{Obs}(\Lambda) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

ここで 中央の ρ は射影で，左右の ρ はそれから誘導された線形写像である．中央と左側の ρ は環準同型である．φ' は $\varphi : \mathbb{Z}\Gamma \to \mathrm{Gh}(\Gamma)$ の Λ への制限である．

こうして再構成予想は次のように表せる．

(RC) $X, Y \in \Gamma$ に対し，$[X] - [Y] \in \mathrm{Ker}(\varphi')$ なら $X \cong Y$ である．

この $[X] - [Y] \in \mathrm{Ker}(\varphi')$ という条件は

$$|\mathrm{Hom}(A, X)| = |\mathrm{Hom}(A, Y)|, \ \forall A \in \Lambda$$

に同値である．

$\Gamma = \Lambda$ の場合，上の (RC) は自明である．その場合，基本定理により $\varphi' = \varphi$ は単射だからである．

例 5.3 $\Gamma = \mathbf{grph}_{\leq n}$ が位数が高々 n のグラフ，$\Lambda = \mathbf{grph}_{<n}$ を位数が n 小さいグラフのカテゴリーとする．この場合，上の RC は古典的なグラフの RC に外ならない．

講演後の注釈． 実は，有限群の RC には簡単な反例がある．hypomorphic だが同型でない位数 16 の群が存在する (東北大の宗政氏より)．

実は著者の一人 (吉田) は，小さな群は RC の反例にならないと思っていた．そうなると，同様の方法を使った類等式の再構成可能性の証明も間違っていたことになる．結局，—bf 類等式の再構成問題は成否不明である．単純群に対する RC が TC に帰着できるかも分からない．有限アーベル群に関する CRC も自信がなくなってきた．(文責 吉田)

Burnside 環，母関数，関係の論文追加

Z・N. Chigira, Y. Takegahara, and T. Yoshida, On the number of homomorphisms from a finite group to a general linear group, *J.Algebra*, **232**(2000), 236-254.

・H. Ishihara, H. Ochiai, Y. Takegahara, and T. Yoshida, p-divisibility of the number of solutions of $x^p = 1$ in a symmetric group, **Ann. Comb.**, **5** (2001), 197-210. ・小田/中岡 「有限群に関連した圏論的構成」『数学』**67** (2015), 55-81.

・F.Oda/M.Sawabe, A collection of subgroups for the generalized Burnside ring. *Adv. in Math.* **222** (2009), 307-317.

・F.Oda, The generalized Burnside ring with respect to p-centric subgroups, *J. Algebra* **320** (2008), 3726-3732 .

・Takegahara, Generating functions for permutation representations, *J.Algebra*, **281** (2004), 68-82.

・Y. Takegahara, The number of homomorphisms from a finite abelian group to a symmetric group (II), *Comm. Algebra*, to appear.

3 元体上の自己双対な極値的符号から構成される自己双対格子の数論的、組合せ論的問題についての考察、(Some notes on arithmetical and combinatorial problems concerning even unimodular lattices constructed from ternary self-dual extremal codes)

Michio Ozeki *

1　いくつかの基礎事項

1.1　格子の諸定義

$\mathbb{Z}$ を有理整数環とし、$\mathbb{Q}$ を有理数体とする。正定値な計量を持つ $\mathbb{Q}^g$ 内の有限生成自由 $\mathbb{Z}$　加群 L のことを正定値な２次格子群という。本講演では、 正定値な２次格子群のみを扱うので、以後このような格子のことを単に格子と呼ぶことにする。格子 L は、条件: 全ての $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$ に対して $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}$ を満たすとき、整数格子という。ここで、(,)　は格子の計量から定義される双一次形式を指す。
２つの格子 L_1、L_2 は L_1 を L_2 に写す計量を保存する全単写線形写像があるとき、計量同型であるという。
$L = L_1 = L_2$ のとき、そのような計量同型は自己同型と呼ばれる。 L の自己同型全体は写像の積により群を成すがこれを $Aut(L)$ と書く。
If L_1 と L_2 が計量同型ならば $Aut(L_1)$ と $Aut(L_2)$ は同型である。 従って $Aut(L)$ は L の同型類の代数的不変量になる。
L 内のヴェクトル達で $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立なものの最大個数を L の階数という。格子 L の双対格子 $L^{\#}$ は

$$L^{\#} = \{\mathbf{y} \in L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}, \forall \mathbf{x} \in L\}.$$

によって定義される。格子 L はその任意の元 $\mathbf{x}$ が偶数ノルム $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ を持つとき、偶格子という。.
偶格子 L 内でのヴェクトル $\mathbf{x}$ は条件 $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 2m$ (m は非負の整数) を満たすとき、$2m$-ヴェクトル (注:現在ではノルム $2m$-ヴェクトルと呼ばれることが多い) と呼ばれる.$\Lambda_{2m}(L)$ は

(2.1) $$\Lambda_{2m}(L) = \{\mathbf{x} \in L \mid (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 2m\}.$$

により定まる格子 L は条件 $L = L^{\#}$ を満たすときユニモデユラー格子という。偶であるユニモデユラー格子は $n \equiv 0 \pmod 8$ のときに限り存在する。格子 L の最小ノルムは $\mathrm{Min}(L) = \min_{\mathbf{x} \in L \setminus \{0\}} (\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

*Emeritus Professor at the Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science, Yamagata University

によって定義される非負の整数である。L が階数 n の偶であるユニモデユラー格子のとき、次の不等式が成り立つ (conf. [18])。

$$\mathrm{Min}(L) \leq 2\left[\frac{n}{24}\right] + 2.$$

特に等号が成り立つような L は極値的な格子と呼ばれる。
次元が n の偶整な自己双対な極値格子計量同型類の全体を Ext_n で表す。

1.2　３元体上の符号

$\mathbb{F}_3 = GF(3) = \{0, 1, 2\}$ を 3 元体とする。$V = \mathbb{F}_3^n$ を 3 元体上の n 次元ヴェクトル空間とする。線型 $[n, k]$ 符号 $\mathbf{C}$ とは次元が k の V の部分ヴェクトル空間のことである。符号 $\mathbf{C}$ の元 $\mathbf{x}$ を符号語という。V, 内で自然に内積が定義されるがこれを $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ で表す。2 つの 3 元符号は一方がモノミアル変換 (各行各列に 3 元体のゼロでない要素が 1 つだけ出現するような正方行列で定まる 1 次変換) により他方に移るとき、同値であるという。3 元符号 $\mathbf{C}$ の双対符号 $\mathbf{C}^{\perp}$ of $\mathbf{C}$ は

$$\mathbf{C}^{\perp} = \{\mathbf{u} \in V \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{C}\}.$$

によって定義される。符号 $\mathbf{C}$ は $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{C}^{\perp}$ をみたすとき自己直交的であるといい、さらに強い条件 $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{\perp}$ を満たすとき、自己双対的であるという。. 自己双対 $[n, k]$ 符号 $n \equiv 0 \pmod 4$ のときに限り存在しかつ $k = \dfrac{n}{2}$ となる。
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を V のヴェクトルとするとき $\mathbf{x}$ のハミング式重み $wt(\mathbf{x})$ とは $x_i \neq 0$ となる i の個数のことである。V の上でのハミング式距離は $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = wt(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ により定義される。$\mathbf{C}$ を 3 元符号とするとき、$\mathbf{C}$ の最小距離は

$$\begin{aligned} d(\mathbf{C}) &= \mathrm{Min}_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{C}, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \mathrm{Min}_{\mathbf{x} \in \mathbf{C}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}} wt(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

により定義される。
$\mathbf{C}$= $[n, \dfrac{n}{2}]$ を自己双対な 3 元符号とするとき、$\mathbf{C}$ の符号語 $\mathbf{x}$ の $wt(\mathbf{x})$ は 3 の倍数になる。$\mathbf{C}$ が自己双対な 3 元符号のとき不等式

$$d(\mathbf{C}) \leq 3\left[\frac{n}{12}\right] + 3.$$

が成り立つことが知られている (conf. [17])。
上の不等式で等号を満たすような自己双対な 3 元符号 $\mathbf{C}$ を極値的符号という。
$\mathbf{C}$ を長さ n の自己双対な 3 元符号とし、$\mathbf{u}^1 = (u_1^1, u_2^1, \cdots, u_n^1), \cdots, \mathbf{u}^g = (u_1^g, u_2^g, \cdots, u_n^g)$ を g 個の $\mathbf{C}$ の符号語とする。$\mathbb{F}_3^g$ の各元 $(t_1, \cdots, t_g)$ に対して

$$w_{t_1, \cdots, t_g}(\mathbf{u}^1, \cdots, \mathbf{u}^g) = \#\{1 \leq i \leq n | u_1^i = t_1, \cdots, u_g^i = t_g\}$$

を一般化された重み系とするとき、多項式

$$CMW(x_{00\cdots0}, \cdots, x_{22\cdots2}) = \sum_{\mathbf{u}^1, \cdots, \mathbf{u}^g \in \mathbf{C}} \prod_{(t_1, \cdots, t_g) \in \mathbb{F}_3^g} x_{t_1, \cdots, t_g}^{w_{t_1, \cdots, t_g}(\mathbf{u}^1, \cdots, \mathbf{u}^g)}$$

を 3 元符号 $\mathbf{C}$ の次数 g の完全重み枚挙多項式という。
例 1 $g = 1$ のときは通常の 3 元符号 $\mathbf{C}$ の完全重み枚挙多項式である。

$$\mathcal{CW}_{\mathbf{C}}(x, y, z) = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbf{C}} x^{w_0(\mathbf{u})} y^{w_1(\mathbf{u})} z^{w_2(\mathbf{u})}.$$

4 節で 3 元 $[32, 16, 9]$ 符号の完全重み枚挙多項式を 2 つ与えている。
例 2 $g = 2$ のときは complete biweight enumerator ともいうべき多項式である。

$$\mathcal{CBW}_{bfC}(x_{00}, x_{01}, \cdots, x_{22}) = \sum_{\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{C}} \prod_{i,j \in \mathbb{F}_3^2} x_{i,j}^{w_{ij}(\mathbf{u},\mathbf{v})}.$$

これらの多項式は 3 元符号から構成される格子の数論的解析には必要になって来る。

1.3 ジーゲルテータ級数

格子 L に付随した次数 g $(g \geq 2)$ のジーゲルテータ級数は

$$\Theta_g(Z, L) = \sum_{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_g \in L} \exp(\pi i \sigma([\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_g] Z)),$$

によって定義される。ここで Z は次数 g のジーゲル上半空間上の変数で $[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_g]$ は $g \times g$ の正方行列で (i, j) 行列要素が $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ で定まるもので、σ は行列のトレースを意味する。

次数 g $(g \geq 2)$ のジーゲルテータ級数は

$$\Theta_g(Z, L) = \sum_{T \in \hat{\mathcal{P}}_g^s(\mathbb{Z})} a(T, L) e^{2\pi i \sigma(TZ)}$$

と展開される。ここで $\hat{\mathcal{P}}_g^s(\mathbb{Z})$ は半正値半整な g 次対称行列全体の集合で、 $a(T, L) = |\{\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_g \rangle \in L^g \mid [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_g] = 2T\}|$ で $|X|$ は集合 X の基数を表す.
ジーゲルテータ級数についての基本的事実: 階数 (次元)$2k$ ($2k$ は 8 の倍数) の偶整なユニモジュラー格子 L から定まる 次数 g のジーゲルテータ級数は重みが k のジーゲル保型形式になる。また同値な偶整なユニモジュラー格子は同一のジーゲルテータ級数を定める。これは格子の一つの解析的不変量である。

1.4 ヤコビテータ級数

L を次元が n の偶整なユニモジュラー格子 とし、$\mathbf{y} \in \Lambda_{2k}(L)$ に対してインデックスが k の ヤコビテータ級数は

$$\theta_{\mathbf{y},L}(\tau) = \sum_{\mathbf{x} \in L} exp(\pi i \tau(\mathbf{x}, \mathbf{x})) exp(\pi i z(\mathbf{x}, \mathbf{y})),$$

によって定義される。ここで τ は虚数部分が正の複素変数で z は制限なしの複素変数である。
ヤコビテータ級数についての基本的事実:次元 n の偶整なユニモジュラー格子 L に対するインデック

スが k の ヤコビテータ級数は重みが $n/2$, インデックスが k のヤコビ形式になる。また同値な偶整なユニモジュラー格子は $\mathbf{y} \in \Lambda_{2k}(L)$ も自然な仕方で対応させれば同一のヤコビ形式を引き起こす。これも格子の一つの解析的不変量である。なおヤコビ形式の詳細については Eichler-Zagier [4] をご覧あれ。

2 極値的格子

現在知られている偶整な極値的自己双対的格子を表にして見た。大半は N.J.A. Sloane と G. Nebe のホームページからの引用である。勿論見落としがあることも知れないことをお断りしておく。

dimensions	constructive method	how many	how to distinguish	who constructed it
32	binary coes	$\geq 5+10$	$Aut(L)$	Conway-Sloane,
				Koch-Venkov
40	Hadamard matrix and others	≥ 1000	$Aut(L)$	J. MacKay,others
48	ternary codes and others	≥ 4	$Aut(L)$	Thompson,Leech- -Sloane, Nebe
56	ternary codes and others			O,
56 56				Harada-Kitazume-O, Gaborit
64	ternary code and others			Quebbemann, O, Harada-Kitazume-O, Nebe
72		≥ 1		G. Nebe
80				Bachoc-Nebe,Watkins
88	unknown?			
96	unknown			

3 同値性の判定

1つ以上の偶整な極値的格子の構成法が知られているとき、第一に問題になることはそれらが果たして同値であるか否かということである。この問題ですら判っていることが少ない。私も含めて皆様攻めあぐねておられる方も多いのではないかと愚考する次第です。以下比較的によく用いられている手段は次の代数的手段である。

3.1 代数的手段

もっとも多用されている判定法は格子の自己同型群の群構造や位数を調べることである。この方法はもし構成された格子が自明な自己同型群しか持たない場合にはお手上げになる。あるいは2つの格子の自己自己同型群が互いに同型であるとしても格子が同値となる保証もない。

3.2 解析的手段

3.2.1 ジーゲルテータ級数

Salvati Manni [29] はその Theorem 3 に於いて次の結果を示した。

Theorem 3.1 (Salvati Manni). 格子 L の次元を $N = 32, 48$ とするとき、極値的な格子に付随したジーゲルテータ級数について次のことが成り立つ。

(i) それらは次数 3 では一意的で,
(ii) 次数 4 では 2 つの格子のジーゲルテータ級数についてその差を取ると定数倍を除いてショットキーの保型形式 J *(*重みが 8 で 4 次のジーゲル尖点形式*)* の冪に等しい。

Theorem 3.2 (Salvati Manni). *56 (resp. 72)* 次元の偶整な極値的自己双対的格子ではそのような格子達に付随したジーゲルテータ級数は次数が 3 のときはそれら級数の差は定数倍 *(0* になることも含めて*)* を除けば χ_{28} *(resp.* χ_{36}*)* と一致する。

40 次元の偶整な極値的自己双対的格子では、2 つの格子に付随したジーゲルテータ級数は次数が 2 のときは常に一致し、次数が 3 のときはそれらの差は定数倍 *(0* になることも含めて*)* を除けば χ_{20} と一致する。

上の定理に於いて χ_{28} (resp. χ_{36}, χ_{20}) はそれぞれ重みが 28 (resp. 36, 20) で次数が 3 のジーゲル尖点形式で χ_{28} と χ_{20} は露峰氏が [35] で導入し研究したもので、ジーゲル尖点形式 χ_{18} は井草氏が [10] で考察した対象で、$\chi_{36} = \chi_{18}^2$ である。
Salvati Manni は同じ論文で次の問題群を提示した。
２つの４０次元の偶整な極値的自己双対的格子 L_1、L_2 でそれらの 2 次のジーゲルテータ級数が一致しかつ 3 次のジーゲルテータ級数が異なるものの例を見つけよ。
Salvati Manni は同様の問題を 32,56,48,72 等の次元でも提示している。
[26] に於いて講演者は極値的 2 元自己双対的 $[40, 20, 8]$ 符号の 2 つから構成される 40 次元の偶整な極値的自己双対的格子があってそれらに付随する 2 次のジーゲルテータ級数は一致し、3 次のジーゲルテータ級数は異なるものの例を示した。さらに同じ論文で別の 2 つの 40 次元の偶整な極値的自己双対的格子で 3 次のジーゲルテータ級数までもが一致するものの例も挙げた。この 2 つの格子が同値でないことは北詰-近藤-宮本の結果 [13] から判っている。
このことから重要な問題が出て来る。すなわち 40 次元の偶整な極値的自己双対的格子のクラスではどの次数までのジーゲルテータ級数を採れば同値でない格子が区別できるか?
[21] , [21] Oura-O は格子 $L \in Ext_{32}$ のジーゲルテータ級数はのフーリエ係数は次数が 3 までは原理的には計算できることを示し、次数 4 のジーゲルテータ級数については 2 元自己双対符号 $[32, 16, 8]$ から来る極値的自己双対的格子ならば互いに異なることを示した。
この次元の格子についてもどの次数までを考えればジーゲルテータ級数で区別できるかという問題は残っている。
もう一つ浮かび上がる予測はジーゲルテータ級数のフーリエ係数は何処まで決めれば級数が一意的に定まるかという疑問に対する一つの提案である。
予測: 偶整な極値的自己双対的格子のジーゲルテータ級数はそのフーリエ展開を

$$\Theta_g(Z, L) = \sum_{T \in \hat{\mathcal{P}}_g^s(\mathbb{Z})} a(T, L) e^{2\pi i \sigma(TZ)}$$

とするとき展開のインデックス T をミンコウスキーの意味で簡約されている (reduced) として $2T$ の対角要素を次の形のものの $a(T,L)$ までを求めれば充分である。
偶整な極値的自己双対的格子のノルムのなるべく小さいヴェクトルを格子の生成元に採るとき、$2T$ の対角要素が高々ノルムの半分になるものを採ればよい。
関連した結果:
(1) B. Venkov [37] $L \in Ext_{32}$ のとき、L は $\Lambda_4(L)$ で生成される。
(2) M. Ozeki [24] $L \in Ext_{40}$ のとき、L は $\Lambda_4(L), Lambda_6$ で生成される。
(3) M. Ozeki [23] $L \in Ext_{48}$ のとき、L は $Lambda_6$ で生成される。
結果 (1) と上記予測を結びつければ $L \in Ext_{32}$ のジーゲルテータ級数についてはそのフーリエ展開の係数 $a(T,L)$ に関して, ミンコウスキーの意味で簡約されている T の対角要素が 2 までのものを計算すればジーゲルテータ級数が決まる。
(2),(3) についても同様の推測がなされる。これらは現在証明しようもない大胆な設定であるが、言明するだけの価値はあると思う。

3.2.2 ヤコビテータ級数

ジーゲルテータ級数に於ける Salvati Manni の結果に相当するヤコビテータ級数での結果は見当たらない。ジーゲルテータ級数とヤコビテータ級数にはある種の類比性があることを考慮して以下の命題を作業仮説として提案してみる。仮説の裏づけとなる証明済みの事実は皆無ではないが多くもない。
作業仮説 1 Let $L \in Ext_{32}$ とするときインデックスが 3 までのヤコビテータ級数は一意的でインデックスが 4 のヤコビテータ級数は L の計量同型類に依存する。
実例. 5 つの非同値な 2 元 $[32,16,8]$ 符号から構成される 5 つの計量非同型な偶整な極値的自己双対的格子についてはインデックスが 3 までのヤコビテータ級数は一意的でインデックスが 4 のヤコビテータ級数は L の計量同型類に依存することが知られているが、それらの格子から隣接法で得られる１２個の格子 (c.f. [14]) についてはインデックスが 4 のヤコビテータ級数の挙動は調べられてはいないようである。
増して他の方法で構成された格子については皆目計算されてはいないようである。
作業仮説 2 格子 $L \in Ext_{40}$ とする。このときインデックスが 2 のヤコビテータ級数は一意的で、インデックスが 3 のヤコビテータ級数は L の計量同型類に依存する。
この仮説を支持する実例がいくつかある。
作業仮説 3 $L \in Ext_{48}$ とする。このときインデックスが 3 までのヤコビテータ級数は一意的で、インデックスが 4 のヤコビテータ級数は L の計量同型類に依存する。

4 3元符号から構成される格子のやや詳細な解析

Sloane, Nebe 達のホームページでは３２次元の極値的偶格子のリストは 2 元符号から構成されるものか、もしくはそれらから隣接操作によって導かれるものしか挙げられていない。
３２次元の極値的偶格子は非常に沢山の非同値類から成ることが判っている。(例えば O. King [12] を参照.) 本講演者はこのような知見の貧弱さを多少なりとも挽回するための試みの一つとして 3 元

符号から構成される３２次元の極値的偶格子を採り上げ、目標としては、このように構成された格子が２元符号から構成される３２次元の極値的偶格子とは同値でなく、さらには複数個構成された場合それら同士も互いに同値でないことを示したい。最終到達目標は明確であるが、そこに至る道は一筋ではなく、また同値でないことの判りかたも深浅多々ありそうであることも充分予測できることである。
自己双対な３元 $[32, 16, 9]$ 符号 $\mathbf{C}$ の重み枚挙多項式 $\mathcal{W}_{\mathbf{C}}(x, y)$ は.

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\mathbf{C}}(x,y) &= x^{32}+960x^{23}y^{9}+64512x^{20}y^{12}+1292544x^{17}y^{15}+8610240x^{14}y^{18}\\ &\quad +18861696x^{11}y^{21}+12294720x^{8}y^{24}+1885184x^{5}y^{27}+36864x^{2}y^{30}\end{aligned}$$

となる。$L \in Ext_{32}$ を３元自己双対 $[32, 16, 9]$ 符号から構成される格子とする。
L の最小ノルムのヴェクトルの集合 Λ_4 を詳細に調べたい。次の分割

$$\Lambda_4 = \Lambda_4(9) \cup \Lambda_4(12) \cup \Lambda_4(30).$$

に従ってそれぞれを詳しく見る。
部分集合 $\Lambda_4(9)$ は重みが９の符号語に由来するヴェクトルの全体である。 $\mathbf{u}$ を重みが９の符号語の一つとする。$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_{32})$ のゼロでない座標は $\mathbb{F}_3$ の元１または２である。$\bar{\mathbf{u}}$ を $\mathbb{Z}$ における $\mathbf{u}$ の自然な原像とする。

$$\text{ith coordinate of } \bar{\mathbf{u}} = \begin{cases} 1 & \text{if } u_i = 1 \in \mathbb{F}_3 \\ -1 & \text{if } u_i = 2 \in \mathbb{F}_3 \\ 0 & \text{if } u_i = 0 \in \mathbb{F}_3 \end{cases}$$

一つの $\bar{\mathbf{u}}$ から９個のヴェクトル $\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\mathbf{u}}^* \in \Lambda_4(9)$ を次のようにして定める。$\bar{\mathbf{u}}$ のゼロでない座標の値を一つ考えてそれを $\eta(\bar{\mathbf{u}})$ とするとき $\eta(\bar{\mathbf{u}}) = 1$ ならばその座標の値を -2 で置き換え、$\eta(\bar{\mathbf{u}}) = -1$ ならばその座標の値を２で置き換えて得られるものが $\bar{\mathbf{u}}^*$ である。
重み枚挙多項式 $\mathcal{W}_{\mathbf{C}}(x, y)$ から集合の $\Lambda_4(9)$ の基数は $960 \cdot 9 = 8640$ となることが分る。
部分集合 $\Lambda_4(12)$ は重みが１２の符号語に由来するヴェクトルの全体である。 $\mathbf{u}$ をそのような符号語の一つとする。$\bar{\mathbf{u}}$ を $\mathbb{Z}$ における $\mathbf{u}$ の自然な原像とする。今度の場合一つの符号語から一つの Λ_4 のヴェクトル $\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\mathbf{u}} \in \Lambda_4(12)$ が定まる。部分集合 $\Lambda_4(12)$ の基数は 64512. である。
部分集合 $\Lambda_4(30)$ の元の形を全て決定することは容易では無く、やや組合せ理論の埒外の関心事にな

る。ある 3 元自己双対 $[32,16,9]$ 符号の完全重み枚挙多項式は次で与えられる。

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{CW}_{\mathbf{C}}(x,y,z) = \\
&\quad x^{32}+3(x^{23}y^9+x^{23}z^9)+17(x^{23}y^8z+x^{23}yz^8)+69(x^{23}y^7z^2+x^{23}y^2z^7)\\
&\quad +141(x^{23}y^6z^3+x^{23}y^3z^6)+250(x^{23}y^5z^4+x^{23}y^4z^5)+19(x^{20}y^{12}+x^{20}z^{12})\\
&\quad +189x^{20}(y^{11}z+yz^{11})+1053x^{20}(y^{10}z^2+y^2z^{10})+3432x^{20}(y^9z^3+y^3z^9)\\
&\quad +7801x^{20}(y^8z^4+y^4z^8)+12419x^{20}(y^7z^5+y^5z^7)+14686x^{20}y^6z^6+42x^{17}(y^{15}+z^{15})\\
&\quad +602x^{17}(y^{14}z+yz^{14})+4085x^{17}(y^{13}z^2+y^2z^{13})+18015x^{17}(y^{12}z^3+y^3z^{12})\\
&\quad +53788x^{17}(y^{11}z^4+y^4z^{11})+118546x^{17}(y^{10}z^5+y^5z^{10})+197367x^{17}(y^9z^6+y^6z^9)\\
&\quad +253827x^{17}(y^8z^7+y^7z^8)+34x^{14}(y^{18}+z^{18})+602x^{14}(y^{17}z+yz^{17})\\
&\quad +4993x^{14}(y^{16}z^2+y^2z^{16})+26691x^{14}(y^{15}z^3+y^3z^{15})+100550x^{14}(y^{14}z^4+y^4z^{14})\\
&\quad +281705x^{14}(y^{13}z^5+y^5z^{13})+609630x^{14}(y^{12}z^6+y^6z^{12})\\
&\quad +1045385x^{14}(y^{11}z^7+y^7z^{11})+1436985x^{14}(y^{10}z^8+y^8z^{10})+1597090x^{14}y^9z^9\\
&\quad +11x^{11}(y^{21}+z^{21})+189x^{11}(y^{20}z+yz^{20})+1902x^{11}(y^{19}z^2+y^2z^{19})+11970x^{11}(y^{18}z^3+y^3z^{18})\\
&\quad +53788x^{11}(y^{17}z^4+y^4z^{17})+183162x^{11}(y^{16}z^5+y^5z^{16})+488405x^{11}(y^{15}z^6+y^6z^{15})\\
&\quad +1045385x^{11}(y^{14}z^7+y^7z^{14})+1829190x^{11}(y^{13}z^8+y^8z^{13})+2643470x^{11}(y^{12}z^9+y^9z^{12})\\
&\quad +3173376x^{11}(y^{11}z^{10}+y^{10}z^{11})\\
&\quad +2x^8(y^{24}+z^{24})+17x^8(y^{23}z+yz^{23})+194x^8(y^{22}z^2+y^2z^{22})+\\
&\quad +1481x^8(y^{21}z^3+y^3z^{21})+7801x^8(y^{20}z^4+y^4z^{20})+31054x^8(y^{19}z^5+y^5z^{19})\\
&\quad +98453x^8(y^{18}z^6+y^6z^{18})+253827x^8(y^{17}z^7+y^7z^{17})\\
&\quad +539361x^8(y^{16}z^8+y^8z^{16})+958295x^8(y^{15}z^9+y^9z^{15})+1436985x^8(y^{14}z^{10}+y^{10}z^{14})\\
&\quad +1829190x^8(y^{13}z^{11}+y^{11}z^{13})+1981400x^8y^{12}z^{12}\\
&\quad +4x^5(y^{25}z^2+y^2z^{25})+38x^5(y^{24}z^3+y^3z^{24})+250x^5(y^{23}z^4+y^4z^{23})\\
&\quad +1180x^5(y^{22}z^5+y^5z^{22})+4205x^5(y^{21}z^6+y^6z^{21})+12419x^5(y^{20}z^7+y^7z^{20})\\
&\quad +31054x^5(y^{19}z^8+y^8z^{19})+65800x^5(y^{18}z^9+y^9z^{18})+118546x^5(y^{17}z^{10}+y^{10}z^{17})\\
&\quad +183162x^5(y^{16}z^{11}+y^{11}z^{16})+244229x^5(y^{15}z^{12}+y^{12}z^{15})+281705x^5(y^{14}z^{13}+y^{13}z^{14})\\
&\quad +4x^2(y^{25}z^5+y^5z^{25})+21x^2(y^{24}z^6+y^6z^{24})+69x^2(y^{23}z^7+y^7z^{23})+194x^2(y^{22}z^8+y^8z^{22})\\
&\quad +487x^2(y^{21}z^9+y^9z^{21})+1053x^2(y^{20}z^{10}+y^{10}z^{20})+1902x^2(y^{19}z^{11}+y^{11}z^{19})\\
&\quad +2955x^2(y^{18}z^{12}+y^{12}z^{18})+4085x^2(y^{17}z^{13}+y^{13}z^{17})+4993x^2(y^{16}z^{14}+y^{14}z^{16})\\
&\quad +5338x^2y^{15}z^{15}
\end{aligned}
$$

重みが 30 の符号語は次の 21 個の部分集合より成る。

$$\mathbf{C}_{25,5},\mathbf{C}_{24,6},\mathbf{C}_{23,7},\mathbf{C}_{22,8},\mathbf{C}_{21,9},\mathbf{C}_{20,10},\mathbf{C}_{19,11},\mathbf{C}_{18,12},\mathbf{C}_{17,13},\mathbf{C}_{16,14},\mathbf{C}_{15,15},$$

および

$$\mathbf{C}_{5,25},\mathbf{C}_{6,24},\mathbf{C}_{7,23},\mathbf{C}_{8,22},\mathbf{C}_{9,21},\mathbf{C}_{10,20},\mathbf{C}_{11,19},\mathbf{C}_{12,18},\mathbf{C}_{13,17},\mathbf{C}_{14,16}.$$

である。$\mathbf{C}_{25,5}$ は 1 が 25 個,2 が 5 個配置されている重みが３０の符号語の集合を意味するものとする等々。
素朴に考えれば $\Lambda_4(30)$ は次のようなヴェクトルから成るとしてしまうだろう。

$$\Lambda_4(i, 30-i)^{(1)} = \{\frac{1}{2\sqrt{3}}\bar{\mathbf{u}} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}(0^{30}3^2),\ \mathbf{u} \in \mathbf{C}_{i,30-i}\},$$

および

$$\Lambda_4(i, 30-i)^{(2)} = \{\frac{1}{2\sqrt{3}}\bar{\mathbf{u}} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}(0^{30}3, (-3)),\ \mathbf{u} \in \mathbf{C}_{i,30-i}\}.$$

$i = 25, 24, 23, \cdots, 5$. 上の 2 つの等式で 3,−3 が出現する位置は重み３０の符号語の座標がゼロになる所である。

しかしこれら全部を $\Lambda_4(30)$ とする訳には行かない。もしそうだとすると

$$|\Lambda_4(L)| = 8640 + 64512 + 4 \cdot 36864 = 220608$$

となって真の値 146880 を超えてしまうからである。実際には重み３０の符号語から出てくる $\Lambda_4(30)$ のヴェクトルは $2 \cdot 36864$ とすれば $8640 + 64512 + 2 \cdot 36864 = 146880$ となって勘定が合う。次に留意するべきことは $\Lambda_4(i, 30-i)^{(1)}$ $\Lambda_4(i, 30-i)^{(2)}$ のうちのどちらか一方のみを採用すれば整数格子になっているかということも検討しておく必要があることである。調べて見て判ったことは以下に述べる。
定義 1 部分集合 $\Lambda_4(i, 30-i)^{(1)}$ はもし任意の 2 つの元 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda_4(i, 30-i)^{(1)}$ が条件 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}$ を満たすとき $\mathbb{Z}$-整合的であるという。同様に部分集合 $\Lambda_4(i, 30-i)^{(2)}$ の $\mathbb{Z}$-整合性も定義できる。

定義 2 S, T を $\Lambda_4(i, 30-i)^{(1)}$, および $\Lambda_4(j, 30-j)^{(2)}$ $5 \le i, j \le 25$ から選んだ 2 つの異なる部分集合とするとき S と T は次の条件を満たすとき $\mathbb{Z}$-整合的であるという。
任意の $\mathbf{x} \in S$ と任意の $\mathbf{y} \in T$ に対して $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}$, が成り立つ。また S と T は 任意の $\mathbf{x} \in S$ と任意の $\mathbf{y} \in T$ に対して $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \notin \mathbb{Z}$. が成り立つとき $\mathbb{Z}$-非整合的であるという。次のことが証明できる。

Proposition 4.1. 各部分集合 $\Lambda_4(i, 30-i)^{(1)}$ および $\Lambda_4(i, 30-i)^{(2)}(25 \le i \le 5)$ は $\mathbb{Z}$-整合的である。

Proposition 4.2. *(i)* 各 $25 \ge i \ge 6$ について 2 つの集合 $\Lambda_4(i, 30-i)^{(1)}$ と $\Lambda_4(i-1, 31-i)^{(1)}$ は $\mathbb{Z}$-非整合的であり、
(ii) 各 $25 \le i \le 6$ について 2 つの集合 $\Lambda_4(i, 30-i)^{(1)}$ と $\Lambda_4(i-1, 31-i)^{(2)}$ は $\mathbb{Z}$-整合的である。

これらの命題の証明としては今の所 complete biweight enumerator に依拠したものしかないが、もっと intrinsic な証明が欲しい状況である。
上の結果を張り合わせると次の命題が得られる。

Proposition 4.3. $\Lambda_4(30) = \Lambda_4(25, 5)^{(1)} \cup \Lambda_4(24, 6)^{(2)} \cup \Lambda_4(23, 7)^{(1)} \cdots$.
交代的に出現する。

以上により 3 元自己双対 $[32, 16, 9]$ 符号から構成される自己双対偶整格子のジーゲルテータ級数あるいはヤコビテータ級数を計算するための基礎は整備された。

次に考えることは格子のヴェクトルの内積関係を格子の元の由って来たる符号語の間の intersection relation (交差関係) に翻訳することでこれも必要な部分については出来ている。詳細については進行中の作業なのでここで詳らかにする段階ではない。
[21] に於いて Ext_{32} に属する格子については３次までのジーゲルテータ級数のフーリエ係数は原理的には全て求まり格子の選び方には依存しないことが示されている。([5],[29] の結果のアルゴリスム化) さらに４次のジーゲルテータ級数のフーリエ係数 $a(T, L)$ は適当な一つが計算出来さえすれば他のフーリエ係数は自動的にも求まることも示している。ただしその一つは考える格子に大いに依存する訳で上記の preprint では T として

$$\mathfrak{T}_{40} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

を採用している。本講演で解説している３元自己双対 $[32, 16, 9]$ 符号から構成される自己双対偶整格子の場合では

$$a(\mathfrak{T}_{40}, L) = \sum_{\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_4 \in \Lambda_4(9)\cup\Lambda_4(12)\cup\Lambda_4(30), [\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_4]=2\mathfrak{T}_{40}} 1$$

となる。

参考文献

[1] The Brandt-Intrau tables of primitive positive-definite ternary quadratic forms. Available at

`http://www.math.rwth-aachen.de/~Gabriele.Nebe/LATTICES/Brandt_1.html`

[2] J.H. Conway and V. Pless, On the enumeration of self-dual codes, J. Comb. Th. Ser. A **28** (1980) 26-53

[3] J.H. Conway and N.J.A. Sloane, Sphere Packings, Lattices and Groups, Springer-Verlag 1988. Third Edition (1998)

[4] M. Eichler and D. Zagier, The Theory of Jacobi Forms, Birkhäuser 1985

[5] V.A. Erokhin, Theta series of even unimodular lattices, LOMI **116** (1982),68-73, J. Soviet Meth. **26**(1984), 1012-1020

[6] E. Freitag, Siegelsche Modulfunktionen, Springer-Verlag 1983

[7] M. Harada, M. Kitazume and M. Ozeki, Ternary code construction of uniodular lattices and self-dual codes over $\mathbb{Z}_6$, J. alg. Com. 16 (2002) 209-223

[8] E. Hecke, Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen, Kgl. Danske Vid. Selskab. Mat.-fys. Medd. 13 (1940)

[9] J.-I. Igusa, On Siegel modular forms of genus two, Amer. J. Math. **84** (1962) 175-200

[10] J.-I. Igusa, Modular forms and projective invariants, Amer. J. Math. **89** (1967) 817-855

[11] J.-I. Igusa, Schottky's invariant and quadratic forms, Christoffel Sym., Birkhauser Verlag, 1981

[12] O.D. King, A mass formula for unimodular lattices with no roots, Math. Comp. Vol. 72 (2002) 839-863

[13] M. Kitazume, T. Kondo and I. Miyamoto, Even lattices and doubly even codes, J. Math. Soc. Japan **43** (1991) 67-87

[14] H. Koch, B. B. Venkov, Über ganzzahlige unimodulare euklidische Gitter. Journal für die reine und angewandte Mathematik 398 (1989), 144-168

[15] H. Koch, B.B. Venkov, Über gerade unimodulare Gitter der Dimension 32, III ,Mathem. Nachr. 152 (1991), 191-213

[16] F.J. MacWilliams and N.J.A.Sloane, The Theory of Error-Correcting Codes, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[17] C.L. Mallows and N.J.A. Sloane, An upper bound for self-dual codes, Information and Control 22 (1973) 188-200

[18] C.L. Mallows, A.M. Odlyzko and N.J.A. Sloane, Upper bounds for modular forms, lattices, and codes, J. Alg. 36 (1975) 68-76

[19] H. Minkowski, Gesamelte Abhandlungen, Chelsea, New-York, 1967

[20] G. Nipp, Tables of Quaternary Quadratic Forms (Computer Generated Tables). Available at

`http://www.math.rwth-aachen.de/~Gabriele.Nebe/LATTICES/nipp.html`

[21] M. Oura and M. Ozeki, Siegel theta series of various degrees for the 32-dimensional even unimodular extremal lattices, Part I, preprint 2015

[22] M. Oura and M. Ozeki, Siegel theta series of various degrees for the 32-dimensional even unimodular extremal lattices, Part II, preprint 2015

[23] M. Ozeki, On the configurations of positive definite even unimodular lattices , Archiv der Mathematik Vol.46 (1986) pp 54-61

[24] M. Ozeki, On the structure of even unimodular extremal lattices of rank 40. Rocky Mountain Journal of Mathematics Vol.19 (1989) pp 847-862

[25] M. Ozeki, Ternary code construction of even unimodular lattices, in Theorie des nombres, Number Theory, J.M. De Koninck and C. Levesque (eds.) ,de Gruyter, Berlin,(1989) 772-784

[26] M. Ozeki, On a problem posed by R. Salvati Manni, Acta Arith. Vol.150 (2011)1-22

[27] M. Ozeki, Siegel theta series of various degrees for the Leech lattice, Kyushu J. Math. **68** (2014)

[28] C. Poor and D. Yuen, Slopes of integral lattices, J. Num. Th. **100** (2002) 363-380

[29] R. Salvati Manni, Slopes of cusp forms and theta series, J. Num. Th. **83** (2000) 282-296

[30] R. Scharlau and R. Schulze-Pillot, Extremal Lattices, in Algorithmic algebra and number theory, Springer (Heidelberg) 1997

[31] B. Schöneberg, Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsubstitutionen. Math. Ann. **116** (1939) 511-523

[32] B. Schöneberg, Elliptic Modular Functions, Springer (1974)

[33] C.L. Siegel, Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, Math. Ann. **116** (1939) 617-657

[34] C.L. Siegel, Lectures on Quadratic Forms, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1967)

[35] S. Tsuyumine, On Siegel modular forms of degree 3, Amer. J. Math. **108** (1986) 755-862

[36] B.B. Venkov, The classification of integral even unimodular 24-dimensional quadratic forms, Trudy Math. Inst. Steklov **148** (1978), 65-76 Proc. Steklov Inst. Math. **148** (1980) 63-74

[37] B.B. Venkov, On even unimodular Euclidean lattices of dimension 32, LOMI **116** (1982),44-45, 161-162, J. Soviet Meth. **26**(1984), 1860-1867

[38] B.B. Venkov, On even unimodular Euclidean lattices of dimension 32, II, LOMI **134** (1982),34-58, J. Soviet Meth. **36**(1987), 21-38

[39] B.L. van der Waerden and H. Gross, editors, Studien zur Theorie der quadratischen Formen, Birkhäuser, Basel, 1968

[40] E. Witt, Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades, Abhandlungen aus Mathm. Seminar Hamburg, **14** (1941), 323-337,

On higher dimensional dual hyperovals

香川高専 谷口浩朗 (Hiroaki Taniguchi)*
National Institute of Technology, Kagawa College

1 はじめに

第1部は「Buratti-Del Fra DHO と Huybrechts DHO」, 第2部は「$S_c(l, GF(2^r))$ の自己同型群など」という題で話をさせていただいた。講演の機会を与えていただいた主催者の先生方に感謝いたします。
射影空間 $PG(m, 2)$ 内の高次元双対超卵形 (dimensional dual hyperoval, DHO) は C. Huybrechts と A. Pasini [4] により以下のように定義された.

定義 1 ($GF(q)$ 上の DHO)**.** m-ベクトル空間 $V(m, q)$ における $d+1$-次元部分空間の集合 S が, $V(m, q)$ における d-次元双対超卵形であるとは，以下のことが成り立つことである:
(1) S に属するどの 2 個の $d+1$-部分空間も 1 次元ベクトル空間で交わり,
(2) S に属するどの異なる 3 個の $d+1$-部分空間も 0-ベクトル空間で交わり,
(3) S に属する $d+1$-部分空間達は $V(m, q)$ を生成し,
(4) S は $q^d + q^{d-1} + \cdots + q + 2$ 個の $d+1$-次元部分空間から成る.

本稿では $GF(2)$ 上の高次元双対超卵形のみを考察するが，$q > 2$ の場合の双対超卵形も同様に研究されている．$GF(2)$ 上の d-次元の双対超卵形が生成する射影空間の次元 n については，$2d+1 \leq n \leq (d+1)(d+2)/2$ が予想されている．その最大の次元と考えられる $V((d+1)(d+2)/2, 2)$ には
（１）Huybrechts' DHO [3],
（２）Buratti-Del Fra's DHO [1],[2],
（３）Veronesean DHO [9], [11],
（４）Veronesean DHO の変形 [8],
の 4 種類の（同型でない）双対超卵形が構成されている.

*E-mail address: taniguchi@t.kagawa-nct.ac.jp

講演の第 1 部では, [6] で新しく構成した DHO $S_c(l, GF(2^r))$(ただし l, r は自然数,$c \in GF(2^r)$) 達の間にある場合に quotient-cover の関係があり, それを利用して d が奇数の時に d-次元 Buratti-Del Fra DHO は $V(2d+1, 2)$ に bilinear な quotient を持っていることを証明し, さらに Huybrechts DHO は $V(2d+1, 2)$ に bilinear な quotient を持たないことを証明した。第 2 部では $S_c(l, GF(2^r))$ が単連結になる必要十分条件 [7] について話をしてから, 自己同型群の計算を行いました。本稿ではそれらの結果を中心として述べます。これらについて現在論文を準備中です。

2 Buratti-Del Fra DHO と Huybrechts DHO

新しい DHO $\mathcal{S}_c(l, GF(2^r))$ が [6] で構成されました。今回の講演はこの DHO に関わる話をさせていただきました。$\mathcal{S}_c(l, GF(2^r))$ は, 自然数 l, r と $GF(2^r) \ni c$ (ただし $Tr(c) = 1$) に対して定義されます。まず $V_1 := \langle e_1, \ldots, e_l \rangle$, $W := (V_1 \otimes_K V_1)/\langle e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i \mid i < j \rangle$, $V := V_1 \oplus \langle e_0 \rangle$ ($GF(2)$-vector spaces としての直和) とおき, $GF(2)$-双線形写像 $B(x, t)$ を以下のように定義します。$x, t \in V$ に対し $B(x, y) = x \otimes y \in W$ ($x, y \in V_1$ のとき), $B(x, e_0) = B(e_0, x) = c(x \otimes x)$ ($x \in V_1$ のとき), さらに $B(e_0, e_0) = 0$ と定義します。$\mathcal{S}_c(l, GF(2^r))$ はこの双線形写像を用いて以下のようにして得られる bilinear DHO です。つまり $U = V \oplus W$ において, $t \in V$ に対して, $X(t) = \{(x, B(x, t)) | x \in V\}$ とおき, $\mathcal{S}_c(l, GF(2^r)) = \{X(t) \mid t \in V\}$ とすると $d = rl$-次元 DHO in $U = V \oplus W$ となっていることを証明することができます。([6] 参照。)
今回の講演では、まず以下のことを示しました。

命題 1. *Let $d = rl$ with $l = l_1 l_2$, l_1 odd. Then there exists a covering map*

$$\pi : \mathcal{S}_c(l, GF(2^r)) \to \mathcal{S}_c(l_2, GF(2^{rl_1})).$$

これを利用して、以下の系を示しました。

系 1. *Let $d = rl$ with l odd. Then there exists a quotient*

$$\pi : \mathcal{S}_c(l, GF(2^r)) \to \mathcal{S}_c(1, GF(2^{rl})) \subset V(2d+1, 2).$$

次に Buratti-Del Fra DHO は $\mathcal{S}_1(d, GF(2))$ と見なせることを利用して、$\pi : \mathcal{S}_1(d, GF(2)) \to \mathcal{S}_1(1, GF(2^d)) \subset V(2d+1, 2)$ により，奇数次元の Buratti-Del Fra DHO は一番小さい生成空間の次元をもつベクトル空間に埋め込めることを示しました。

系 2. *d-dim. Buratti-Del Fra DHO $\mathcal{S}_B$ has a bilinear quotient in $V(2d+1,2)$ if d is odd.*

これに対して、Hyubrechts DHO $\mathcal{S}_H$ に対しては、そのようなことが不可能であることが証明できます。すなわち

命題 2. *Huybrechts DHO $\mathcal{S}_H$ has no bilinear quotient in $V(2d+1,2)$.*

このことを以下の補題, 系達を用いて証明しました。以下の補題 1 が本質的です。これにより Hyberchts DHO のすべての Bilinear な quotient が系 3 のような Bilinear mapping を持つことがわかるからです。

補題 1. *Let $\mathcal{S}_H$ be the Huybrechts DHO in U_1 and $\mathcal{S}$ a bilinear DHO in U_2.Let $\pi : U_1 \supset \mathcal{S}_H \to \mathcal{S} \subset U_2$ be a covering map. Then there exists an isomorphism*

$$Aut(\mathcal{S}) \geq T \ni t \mapsto \bar{t} \in \overline{T} \leq Aut(\mathcal{S}_H),$$

T a translation group of $\mathcal{S}$, such that $t(\pi(X)) = \pi(\bar{t}(X)), X \in \mathcal{S}_H, t \in T$,and $\overline{T}$ is a translation group of $\mathcal{S}_H$.

系 3. *Let $\mathcal{S}$ be a bilinear DHO in $V \oplus W$ with bilinear mapping $B(x,t)$. Let $\mathcal{S}_H$ be the Huybrechts DHO in $U = V \oplus (V \wedge V)$ with bilinear mapping $x \wedge t$. Let $\pi : V \oplus (V \wedge V) \supset \mathcal{S}_H \to \mathcal{S} \subset V \oplus W$ be a covering map. Then,*

$$B(x,t) = (x^{\lambda} \wedge t^{\mu})^{\rho},$$

where, $\lambda, \mu : V \to V$ isomorphisms and $\rho : V \wedge V \to W$ a linear surjection.

系 3 と同じ条件の下で

系 4. *Let $B'(x,t) = (x^{\lambda} \wedge t^{\lambda})^{\rho}$. Then, there exists a DHO $\mathcal{S}'$ with a symmetric bilinear mapping $B'(x,t)$ such that $\mathcal{S}' \simeq \mathcal{S}$.*

これらを用いて以下の補題を示しました。

補題 2. *Every bilinear quotient of Huybrechts DHO is isomorphic to an APN DHO.*

なお、APN DHO は Huybrechts DHO の quotient であることは吉荒先生により [10] で示されています。さて, この補題 2 に吉荒先生による以下の結果 [10] を援用すると、Huybrechts DHO に関する命題 2 の証明が完成します。

補題 3. *There exists no (quadratic) APN function* g *on* $GF(2^{d+1})$ *such that* $Tr(g) \equiv 0$*, i.e., there exists no (quadratic) APN function* $g : V(d+1, 2) \to V(d, 2)$.

命題 2 が成立しなければ，補題 2 により (quadratic) APN function $g : V(d+1, 2) \to V(d, 2)$ が存在することになり補題 3 に矛盾しますので，命題 2 の証明が完成します。命題 2 を援用して、さらに以下の事実を証明しました。

系 5. *For any quadratic APN function* f *on* $GF(2^{d+1})$ *with* $d \geq 2$*,*

$$\{f(x+t) + f(x) + f(t) + f(0) \mid x, t \in GF(2^{d+1})\} = GF(2^{d+1}).$$

3 $S_c(l, GF(2^r))$ の自己同型群など

第 2 部においては、まず以下の事実を紹介しました。（命題 3、系 6 はすでに論文 [7] に掲載されています。）

命題 3. $\mathcal{S}_c(l, GF(2^r))$ *is simply connected iff* $GF(2^r) = GF(2)(c)$.

系 6. *For a fixed* l*, the number of non-isomorphic simply connected* $\mathcal{S}_c(l, GF(2^r))$ *are as follows:*

$$P_2(r; 1) = \frac{1}{2r} \sum_{s|r, s:odd} \mu(s) 2^{r/s}.$$

次に $c \neq 1$ の場合に $S_c(l, GF(2^r)$ の自己同型群が以下のように決定できたことを報告しました。ここに T は translation 群です。

命題 4. $Aut(\mathcal{S}_c(l, GF(2^r))) \cong T : GL(l, 2^r).Z_{r/r_c}$ *if* $c \neq 1$*, where* $Z_{r/r_c} = Gal(GF(2^r)/GF(2)(c))$.

命題 4 の証明には、多くの補題（計算によって証明される）を必要とします。講演では主として後半部分の計算の概要を述べました。(講演ではある程度証明の細部まで踏み込める余裕のある時間をいただきました。感謝いたします。) この証明において、T (translation subgroup) は DHO のメンバー上 regular に作用するので、まず固定群 $G_{X(0)} = \{g \in Aut(\mathcal{S}_c(l, GF(2^r))) \mid X(0)^g = X(0)\}$ を考察します。$X(0)^g = X(0)$, $g \in G_{X(0)}$ なので，g に対してある linear mappings λ, ϕ, ρ が存在して，g は生成空間 $V \oplus W$ の線形変換として

$$g : V \oplus W \ni (x, y) \mapsto (x^\lambda + y^\phi, y^\rho) \in V \oplus W$$

と表されています。ここで $X(t)^g := X(t^\mu)$ for $t \in V$ として 1 対 1 写像 $\mu : t \mapsto t^\mu$ （$0^\mu = 0$）を定義します。すると，すべての $x, t \in V$ に対して

$$x^\lambda \otimes_c t^\mu + (x \otimes_c t)^\phi \otimes_c t^\mu = (x \otimes_c t)^\rho$$

となっていることが示せます。この方程式を用いて計算を進めることにより $\phi \equiv 0$ を示し、さらに $\mu = \lambda$, つまり $(x, x \otimes_c t)^g = (x^\lambda, x^\lambda \otimes_c t^\lambda)$ を示すことが証明の大きなポイントでした。次に、Kantor の 1980 年の結果 [5] を援用して、λ の形を決定していく、という方法で自己同型群を決定しました。

なお、$c = 1$, $r = 1$ の場合は Yoshiara-Del Fra [2] により以下のように決定されています。

事実 1.

$$Aut(\mathcal{S}_1(d, GF(2)) \cong T : (Z_2)^{\oplus d}.GL(d, 2).$$

$c = 1$ の場合，$Aut(\mathcal{S}_1(l, GF(2^r)))$ は $Aut(\mathcal{S}_1(rl, GF(2))$ の部分群であることがわかっている ([6] Theorem 15) ので，上記の事実 1 を利用して，$c = 1$, $r > 1$ の場合の自己同型群を以下のように決定しました。

命題 5. *$Aut(\mathcal{S}_1(l, GF(2^r))) \cong T : GL(l, 2^r).Z_r$ if $r > 1$, where $Z_r = Gal(GF(2^r)/GF(2))$.*

References

[1] M. Buratti and A. Del Fra, Semi-Boolean quadruple systems and dimensional dual hyperovals, Advances in Geometry. 3 (2003), 245–253.

[2] A. Del Fra and S. Yoshiara, Dimensional dual hyperovals associated with Steiner systems, European Journal of Combinatorics. 26 (2005), 173–194.

[3] C. Huybrechts, Dimensional dual hyperovals in projective spaces and $c.AC^*$ geometries, Discrete Mathematics. 255 (2002), 503–532.

[4] C. Huybrechts and A. Pasini, Frag-transitive extensions of dual affine spaces, Contrib. Algebra Geom. 40. (1999), 503–532.

[5] W. M. Kantor, Linear groups containing a Singer cycle. J. Algebra 62. (1980) 232–234

[6] H. Taniguchi, New dimensional dual hyperovals, which are not quotients of the classical dual hyperovals, Discrete Mathematics, 337 (2014), 63–75.

[7] H. Taniguchi, Some examples of simply connected dual hyperovals II, Finite Fields and Their Applications, 36. (2015), 1–13.

[8] H. Taniguchi, A new family of dual hyperovals in $PG(d(d+3)/2, 2)$ with $d \geq 3$, Discrete Mathematics, 309(2009), 418–429.

[9] J. Thas and H. van Maldeghem, Characterizations of the finite quadric Veroneseans $\mathcal{V}_n^{2^n}$, The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford. 55 (2004), 99–113.

[10] S. Yoshiara, Dimensional dual hyperovals associated with quadratic APN functions, Innovations in Incidence Geometry. 8 (2009).

[11] S. Yoshiara, Ambient spaces of dimensional dual arcs, Journal of Algebraic Combinatorics. 19 (2004), 5–23.

DHOとの２０年–My 20 years working with DHOs

吉荒　聡 (Satoshi Yoshiara)
東京女子大学 現代教養学部 数理科学科
2015年9月30日提出

1　概要と謝辞

金沢大学での講演内容として、二重可移なDHOとpolar typeのDHOに関する最近の進展の解説を準備したが、６月２３日（火）の講演では後半部分については言及できなかった。本講演録は、この部分も込めて講演用に準備した原稿をほぼそのままの形でまとめたものである。なお、当日の懇親会では暖かい励ましと思いがけぬプレゼントをいただいた。ここに深く感謝の意を表したい。

2　基本的な定義と結果

定義 (DA と DHO)

定義 1 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上のベクトル空間 U の n-次元部分空間の集まり $\mathcal{A}$ が, U を**生成空間** *(ambient space)* とする $\mathbb{F}_q$ 上**階数** *(rank)* n の**双対弧** *(dual arc)* *(n-**DA**/$\mathbb{F}_q$ in U と略記)* とは,
$\mathcal{A}$ のどの相異なる3つのメンバー X, Y, Z を取っても,
$\dim(X \cap Y) = 1$ かつ $X \cap Y \cap Z = \{0\}$ であり, かつ
$\mathcal{A}$ のメンバーすべての和空間が U であること.

$\mathcal{A}$ が n-DA/$\mathbb{F}_q$ ならば $|\mathcal{A}| \leq 1 + ((q^n - 1)/(q - 1))$.
等号が成立するとき $\mathcal{A}$ を (高次元) **双対超卵型** (dual hyperoval, **DHO** と略記) という.

DHOの存在に関する基本的問題　q が偶数 ($q = 2^m$) の場合には, すべての自然数 n に対して, n-DHO/$\mathbb{F}_q$ の存在が知られている.

任意の素数べき q に対して, $|\mathcal{A}| = (q^n - 1)/(q - 1)$ を満たす n-DA/$\mathbb{F}_q$ の存在が知られている (Veronesean DA).

問題 1,2

1. q が奇数のとき, 如何なる自然数 n についても n-DHO/$\mathbb{F}_q$ が存在しないことを示せ.
2. q が奇数のとき, 極大な n-DA/$\mathbb{F}_q$ の例を色々構成せよ.

生成空間に関する基本的結果

基本的結果 [Yo2004]

n-DHO/$\mathbb{F}_q$ in U が存在するならば,
$q \neq 2$ のとき $2n-1 \leq \dim(U) \leq n(n+1)/2$,
$q = 2$ のとき $2n-1 \leq \dim(U) \leq (n(n+1)/2) + 2$.

問題 3,4

3. $q = 2$ のとき $\dim(U) \leq n(n+1)/2$ であることを示せ.
4. 同じ結論がどこまでの大きさの DA について言えるか？

定義 (剰余・被覆, 自己同型群)

定義 2 $\mathcal{A}$ は n-**DA**/$\mathbb{F}_q$ *in* U, $\overline{\mathcal{A}}$ も n-**DA**/$\mathbb{F}_q$ *in* $\overline{U}$ で, $|\mathcal{A}| = |\overline{\mathcal{A}}|$ とする.
$(\mathcal{A})\rho = \overline{\mathcal{A}}$ を満たす $\mathbb{F}_q$-半線形全射 $\rho : U \to \overline{U}$ が存在するとき,
$\mathcal{A}$ は $\overline{\mathcal{A}}$ の**被覆**, $\overline{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{A}$ の**剰余**, ρ を**被覆写像** という.
$\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}$ のとき, ρ を $\mathcal{A}$ から $\overline{\mathcal{A}}$ への**同型写像**という.
$\mathcal{A}$ からそれ自身への同型の全体がなす群を，$\mathcal{A}$ の**自己同型群**
といい, Aut($\mathcal{A}$) と記す.

被覆と自己同型群に関する基本的結果

- [Yo2004] n-DHO/$\mathbb{F}_q$ $\mathcal{S}$ in U に対して, $\overline{\mathcal{S}}$ が $\mathcal{S}$ の剰余 $\Leftrightarrow$
$W \cap (X+Y) = \{0\}$ $(\forall X, Y \in \mathcal{S})$ を満たす U の部分空間 W
に対する自然準同型 $\rho : U \to \overline{U} := U/W$ による $\mathcal{S}$ の像が $\overline{\mathcal{S}}$.
この条件を満たす生成空間の部分空間 W のことを
剰余を定める部分空間と呼ぶ.
- [Dempwolff 2014A] (普遍被覆の存在) 任意の $\mathcal{S}$: n-DHO/$\mathbb{F}_q$, q even, に対して, $\mathcal{S}$ を被覆する n-DHO の中で生成空間の次元が最大となるものが, 同型を除いてただ一つ存在する.

· (剰余の自己同型群は被覆の自己同型群の部分群)
W が剰余 $\mathcal{S}$ (in U) $\to \overline{\mathcal{S}}$ (in U/W) を定める部分空間ならば, $\mathrm{Aut}(\overline{\mathcal{S}})$ は $\mathrm{Aut}(\mathcal{S})$ における W の固定部分群.

分裂型 DHO

定義 3 *$\mathcal{S}$: n-DHO/$\mathbb{F}_q$ in U. 生成空間の部分空間 Y について, $\mathcal{S}$ が Y 上***分裂する***とは, すべての $X \in \mathcal{S}$ に対して $U = X \oplus Y$ であること.*

問題 5

5. 任意の n-DHO/$\mathbb{F}_q$ $\mathcal{S}$ in U に対して，U のある部分空間 Y が存在して $\mathcal{S}$ は Y 上分裂するか?

生成空間のどの部分空間をとっても, その上で分裂しないような DHO は知られていない.

Mathieu DHO $\mathcal{M}$ のすべてのメンバーは、生成空間上のあるユニタリ形式に関して全等方的. どの全等方的部分空間上でも $\mathcal{M}$ は分裂しないが, ある部分空間に関して分裂. [Yo2014, Proposition 3.5]

DHO-set　以下簡単のため $q = 2$ とし, $\mathbb{F}_2$ 上であることを記さない.

n-DHO $\mathcal{S}$ in U が Y 上分裂する $\Leftrightarrow$ $X \in \mathcal{S}$ を固定するとき, $a \in X^{\#}$ に対して次を満たす線形変換 $\rho(a) : X \to Y$ が存在して,
$X(a) := \{(x, (x)\rho(a)) \mid x \in X\}$ $(\subset X \oplus Y = U)$, $X(0) := \{(x, 0) \mid x \in X\}$ とおくとき, $\mathcal{S} = \{X(a) \mid a \in X\}$.

(1) 任意の $a, b \in X$, $a \neq b$ に対して $\dim(\mathrm{Ker}(\rho(a) + \rho(b))) = 1$.

(2) 任意の相異なる $a, b, c \in X$ に対して,
$\mathrm{Ker}(\rho(a) + \rho(b))\} \cap \mathrm{Ker}(\rho(a) + \rho(c))\} = \{0\}$.

逆に, 性質 (1),(2) を満たす線形変換の族 $\{\rho(a) \mid a \in X\}$ $(\rho(0) = 0)$ があれば, 上のように Y 上分裂する n-DHO が構成できる. 性質 (1),(2) を満たす線形変換の族を **DHO-set** と呼ぶ.

双線形 DHO

定義 4 *$\mathbb{F}_2$ 上の n-DHO は, 生成空間のある部分空間 Y 上分裂し, かつ DHO-set $\{\beta(a) \mid a \in X\}$ として, $\beta(a) + \beta(b) = \beta(a + b)$ $(a, b \in X)$ を満たすものが取れるとき,* **双線形** *(bilinear) という.*

このとき, 対応 $\beta : X \times X \ni (a,b) \mapsto (a)(\beta(b)) \in Y$ が $\mathbb{F}_2$-双線形写像となる.

双線形 DHO は, 二元体上の DHO のみに対して定義できる概念である点に注意.

Standard translation 群 $\mathcal{S}$: $U = X \oplus Y$ を生成空間とする双線形 DHO, $X \in \mathcal{S}$, $\beta : X \times X \to Y$ を対応する双線形写像とする. このとき
$\mathcal{S} = \{X(a) \mid a \in X\}$, $X(a) := \{(x, \beta(x,a)) \mid x \in X\}$ と書ける.
このとき $a \in X$ に対する

$$\tau_a : U \ni (x,y) \mapsto (x, y + \beta(x,a)) \in U$$

は $\mathcal{S}$ の自己同型であり, その全体 $T := \{\tau_a \mid a \in X\}$ は位数 2^n の基本可換群で, $X(b) \mapsto X(b+a)$ により $\mathcal{S}$ 上正則に作用する.

T を **standard translation** 群と呼ぶ.

$Y = C_U(T) = [U,T]$ に注意. ($C_U(T)$ が大きい!)

双線形 DHO の自己同型群

双線形 DHO の特徴づけ [Dempwolff-Edel 2012]

$\mathcal{S}$ が双線形 DHO $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Aut}(\mathcal{S})$ の部分群 T で, $\mathcal{S}$ 上正則に作用し, かつ $\mathcal{S}$ が $C_U(T)$ 上分裂するものが存在.

上の群 T を双線形 DHO $\mathcal{S}$ の **translation** 群という.

- 双線形 n-DHO in U に対する translation 群は互いに共役であるが, $\dim(U) \geq 3(n-1)$ ならば, ただ一つとは限らない.
- 双線形 DHO $\mathcal{S}$ の自己同型群 $G := \mathrm{Aut}(\mathcal{S})$ における translation 群 T の正規化群は $N_G(T) = T : A$, A は X と Y の固定部分群で, **autotopism** 群という.

3 二重可移な DHO

二重可移な DHO の定義

定義 5 *$\mathcal{S}$: n-DHO/$\mathbb{F}_q$ in U,* **が二重可移**とは*, 自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{S})$ が $\mathcal{S}$ のメンバー上に二重可移なこと.*

問題 6

6. 二重可移な DHO とその自己同型群を分類せよ.

先駆けとなった結果.

定理 1 *[Huybrechts-Pasini 1999] n-DHO/$\mathbb{F}_q$ $\mathcal{S}$ in U が二重可移ならば, $q=2$ または $\mathcal{S} \cong$ Mathieu DHO (このとき $q=4$).*

二重可移 DHO に関する基本的な結果　以下，二重可移な n-DHO/$\mathbb{F}_2$ $\mathcal{S}$ in U に対して $G := \mathrm{Aut}(\mathcal{S})$, $T := O_2(G)$, $A := G_X$: $X \in \mathcal{S}$ の固定部分群, とおく.

定理 2 *[] $\mathcal{S}$ が二重可移な n-DHO/$\mathbb{F}_2$ in U, $n \geq 5$ ならば, $G = T : A$, $T \cong 2^n$ は $\mathcal{S}$ 上正則, $A \leq GL(X) \cong GL_n(2)$ は次のいずれか.*

(a) $A \leq \Gamma L(1, 2^n)$: $\mathbb{F}_{2^n}$ 上の 1 次元半線形群 ($\cong (2^n - 1) : n$).

(b) n の約数 d, $d \geq 2$, に対して, $n = dm$ とするとき $SL(d, 2^m) \trianglelefteq A$.

(c) n:偶数, $n/2$ の約数 d, ≥ 2, に対して $n = 2dm$ とするとき $Sp_{2d}(2^m) \trianglelefteq A$.

(d) n は 6 の倍数で, $n = 6m$ とするとき $G_2(2^m)' \trianglelefteq A$.

二重可移 DHO に関する更なる結果

問題 6-1,6-2

6-1. ここで (a) から (d) すべての場合が生じうるのか？
6-2. $\mathcal{S}$ は双線形か? すなわち $U = X + C_U(T)$ か？

一般の二重可移 DHO に対する部分的結果 [Yo2008].

- $\mathcal{S}$ が二重可移 n-DHO/$\mathbb{F}_2$ in U で $\dim(U) = 2n-1$ であれば, 定理 2 (a) の場合のみが起こる.
- $\mathcal{S}$ が二重可移 n-DHO/$\mathbb{F}_2$ ($n \geq 7$) in U で $\dim(U) = 2n$ なら, 定理 2 (a) または n が偶数で, 定理 2 (b) における $d = 2$ の場合のみが生じる.

Singer cycle を含む二重可移 DHO　先の結果 [Yo2008] において次が本質的:

Singer cycle を含む場合

$\mathcal{S}$ が二重可移 n-DHO/$\mathbb{F}_2$ ($n \geq 7$) in U で $\dim(U) = 2n$, かつ A が $X^\#$ 上正則に作用する巡回群を含めば，$\mathcal{S} \cong \mathcal{S}_{h,m}$, $h + m \neq n$.
(この場合は，定理 2 (a) が起こる.)

特に $\mathcal{S}$ は双線形である.
この結果は, Gold 関数を特徴づけるものとして有効.

DHO $\mathcal{S}_{h,m}$　$F := \mathbb{F}_{2^n}$, h, m は n と互いに素な整数, $0 \leq h, m \leq n-1$.
$F \times F$ から F への双線形写像 β

$$\beta(x, y) := x^{2^h} y + x y^{2^m}$$

が定める双線形 DHO を $\mathcal{S}_{h,m}$ $(= \{X(a) \mid a \in F\})$ と記す.
$X(a) := \{(x, \beta(x, a)) \mid x \in F\}$ $(\subset F \oplus F)$.
　生成空間は $F \oplus F$ ($m + h \neq n$ のとき) または
その余次元 1 の部分空間 ($m + h = n$ のとき).

DHO $\mathcal{S}_{h,m}$ の自己同型群　$\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_{h,m}) = T : A \cong 2^n : (2^n - 1) : n$,
ここで T は standard translation 群, $F^\times$ の元 ζ による積写像

$$(x, y) \mapsto (x\zeta, y\zeta^l),$$

$l := (2^{h+m} - 1)(2^m - 1)^{-1}$, と体同型 $(x, y) \mapsto (x^2, y^2)$ が A を生成.
　ζ による積写像の引き起こす $\mathcal{S}_{h,m}$ の置換は

$$X(a) \mapsto X(a\zeta^{(2^h-1)(2^m-1)^{-1}}).$$

Singer cycle を含む二重可移 双線形 DHO　[Dempwolff 2014B] では, 双線形 DHO の範疇で, [Yo2008] において本質的であった先の結果が，生成空間の次元に関する制限なしに拡張された.
　$\mathcal{S}$ が双線形な二重可移 n-DHO/$\mathbb{F}_2$ ($n \geq 7$) in U で, A が $X^\#$ 上正則に作用する巡回群を含めば, 次のいずれか. (3) については, 以下に多少詳しく述べる.

(1) $\dim(U) = 2n - 1$ で $\mathcal{S} \cong \mathcal{S}_{1,n-1} (\cong \mathcal{S}_{h,n-h})$.

(2) $\dim(U) = 2n$ で $\mathcal{S} \cong \mathcal{S}_{h,m}$, $h + m \neq n$.

(3) $\dim(U) = 2n + (n/2)$, $n/2$ は奇数で, $\mathcal{S} \cong \mathcal{D}[k]$,
$k \in \{\pm(2^{(n/2)+1} - 1)/3, \pm((2^{(n/2)+1} - 1)/3)^{-1}\} \pmod{2^n - 1}$.

(4) $\mathcal{S}$ は Huybrechts DHO の剰余.

Dempwolff DHO $\mathcal{D}[k]$ 簡単のため $k = (2^{(n/2)+1} - 1)/3$ とする. その他も同様. $m := n/2$ (奇数), $K := \mathbb{F}_{2^m} \subset F := \mathbb{F}_{2^n}$.

$F \times F$ から $F \oplus K$ への双線形写像 β

$$\beta(x, y) := (x^{2^{m+1}} y + x y^{2^2}, (xy)^{2^m} + xy)$$

が定める双線形 DHO を $\mathcal{D}[k]$ $(= \{X(a) \mid a \in F\})$ と記す.
$X(a) := \{(x, \beta(x, a)) \mid x \in F\}$ $(\subset F \oplus F \oplus K)$.
$m \geq 4$ とすると生成空間は $F \oplus (F \oplus K)$.

Dempwolff DHO $\mathcal{D}[k]$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}[k]) = T : A$
$\cong 2^n : (2^n - 1) : n$, ここで T は standard translation 群, $F^\times$ の元 ζ による積写像

$$(x, y_1, y_2) \mapsto (x\zeta, y_1\zeta^{l_1}, y_2\zeta^{l_2}),$$

$l_1 := (2^{m+3} - 1)/3$, $l_2 := 2(2^m + 1)/3$, と体同型 $(x, y) \mapsto (x^2, y^2)$ が A を生成.
ζ による積写像の引き起こす $\mathcal{D}[k]$ の置換は

$$X(a) \mapsto X(a\zeta^{(2^{m+1}-1)/3}).$$

ここに出てくるべき指数 $(2^{m+1} - 1)/3$ が k である.

Huybrechts DHO $\mathcal{H}$ とその自己同型群 $F = \mathbb{F}_{2^n}$, $F \times F$ から $F \wedge F$ への双線形写像
$\beta : (x, y) \mapsto x \wedge y$ が定める双線形 DHO を $\mathcal{H}$ $(= \{X(a) \mid a \in F\})$ と記す.
$X(a) := \{(x, \beta(x, a)) \mid x \in F\}$ $(\subset F \oplus F \wedge F)$.
生成空間は $F \oplus (F \wedge F)$.
$\mathrm{Aut}(\mathcal{H}) = T : A \cong 2^n : GL_n(2)$,
A は, F 上には $GL(F) \cong GL_n(2)$ として自然に作用,
$F \wedge F$ 上にはその対角として作用する:
$A = \{(x, y \wedge z) \mapsto ((x)g, (y)g \wedge (z)g \mid g \in GL(F)\}$.

Huybrechts DHO の剰余である二重可移 DHO　$\overline{\mathcal{H}}$ を Huybrechts n-DHO $\mathcal{H}$ の剰余 DHO で, 二重可移とする.
すると, 剰余を定める生成空間の部分空間 W は $F \wedge F$ に含まれ,

$$\mathrm{Aut}(\overline{\mathcal{H}}) = \mathrm{Aut}(\mathcal{H})_W \cong T : A_W,$$

A_W は A の $F \wedge F$ への (対角) 作用による W の固定部分群.
特に $\overline{\mathcal{H}}$ も双線形.

[Dempwolff 2015B] $n \geq 4$ のとき次のいずれか:

(a) $A_W \cong \Gamma L(1, 2^n) \cong (2^n - 1).n$.

(b) $(A_W)^\infty \cong SL(d, 2^m)$, $n = dm$.

(c) $(A_W)^\infty \cong Sp(2d, 2^m)'$, $n = 2dm$.

$G_2(2^m)$ は出現しない.

Huybrechts DHO の剰余である二重可移 DHO の個数　場合 (b),(c) において, $A_W/(A_W)^\infty$ は $(2^n - 1).n$ の部分群で W を固定するものに含まれる.

[Dempwolff 2015B] では $(2^n - 1).n$ のそれぞれの部分群 C に対し,
$A_W/(A_W)^\infty \cong C$ となるような W の存在が調べられており,
その結果例えば次が言える:

> Huybrechts n-DHO の剰余である二重可移 DHO の相異なる同値類の個数 $r(n)$ は, n に関して指数関数的に増大する.

感想–F 上の quadratic APN 関数の位置づけ　一般に, $F \wedge F$ の部分空間 W が $\mathcal{H}$ の剰余を定める $\Leftrightarrow$
$F \wedge F$ を上の交代形式全体の空間と同一視したとき,
W が rank 2 の交代形式を含まない.
従って, このとき $F = \mathbb{F}_{2^n}$ から $(F \wedge F)/W$ への quadratic APN 関数 f が得られる.

よって, Dempwolff の結果は, F からある空間への対称性が高い quadratic APN 関数の CCZ-同値類が非常に多くあることを示す.

一方, $\mathcal{S}[f]$ が二重可移となるような F から F への APN 関数 f は Gold 関数に CCZ-同型なものに限ることが言える. （先の結果 [Yo2008] と [Pasini-Yo 2001] から）

そこで, F からそれ自身への quadratic APN 関数は特殊なものと見なせるであろう.

4 Polar type の DHO と二重双対 DHO

Polar type の DHO の定義

定義 6 *$\mathcal{A}$: n-DA/$\mathbb{F}_q$ in U* が **polar type** とは*, U* 上のある非退化計量に関して*, $\mathcal{A}$* のすべてのメンバーが極大全等方部分空間であること.

計量の種類は次の 7 種類. 記号は射影次元ではなくベクトル次元.

計量	dim(U)	記号
symplectic	$2n$	$W(2n,q)$
ユニタリ	$2n$	$H(2n,q)$ (q: 平方数)
ユニタリ	$2n+1$	$H(2n+1,q)$ (q: 平方数)
直交 (+)	$2n$	$Q^+(2n,q)$
直交	$2n+1$	$Q(2n+1,q)$
直交 (-)	$2n+2$	$Q^-(2n+2,q)$

ある予想の解決　例えば, $\mathcal{S}_{h,m}$ のうち, polar type であるものは n が奇数のときの $\mathcal{S}_{n-2h,2h}$ に限る. これは $q(x) := \mathrm{Tr}(x^{1+2^h})$ に関するプラス直交 DHO, 従って symplectic DHO.

[2006 の survey] 中の Problem 4.7

7. Polar type の n-DHO/$\mathbb{F}_q$ in U が存在するならば n は奇数か？

定理 3 *[Sheekey 2015] Polar type の n-DHO/$\mathbb{F}_q$ $\mathcal{S}$ in U* が存在するならば*, n* は奇数か，または $\mathcal{S}$ はマイナス直交計量 *DHO.*

偶階数の polar type DA の大きさ　Dual polar graph の inner distribution に関する Vanhove の結果 [Vanhove 2011, Lemma 3.2] の適用.

n が偶数のとき, n-DA/$\mathbb{F}_q$ $\mathcal{A}$ に対し $|\mathcal{A}|$ は次の数以下.

dim(U)	記号	$\|\mathcal{A}\| \leq$
$2n$	$W(2n,q)$	$q^{n-1}+1$
$2n$	$H(2n,q)$	$q^{(n-1)/2}+1$
$2n+1$	$H(2n+1,q)$	$q^{3(n-1)/4}+1$
$2n$	$Q^+(2n,q)$	2
$2n+1$	$Q(2n+1,q)$	$q^{n-1}+1$
$2n+2$	$Q^-(2n+2,q)$	$q^{2n-2}+1$

存在に関する問題

問題 7,8,9

7. n が偶数のとき, 最大の polar type n-DHO/$\mathbb{F}_q$ の大きさは?
8. マイナス直交計量に関する polar type の n-DHO/$\mathbb{F}_q$ in U は存在するか? 存在するならば n は奇数か?
9. ユニタリ計量に関する polar type の n-DHO/$\mathbb{F}_q$ in U, $n > 3$, は存在するか?

以下, 計量空間 U の部分空間 W に対して, $W^\perp$ はこの計量に関して W と直交する部分空間を表す.

プラス直交空間とシンプレクティック空間の関連 V: $\mathbb{F}_2$ 上 $2n+2$ 次元空間, Q:V 上のプラス型直交計量.
O: **orthogonal spread** in V, つまり $(n+1)$-極大全特異部分空間の集まりで, 非零特異ベクトル全体を分割するもの.

V の非特異点 N における剰余 $N^\perp/N$ はシンプレクテイック空間 $W(2n,2)$ の構造を持つが, その **symplectic spread**–極大等方部分空間の集まりで $(N^\perp/N)^\#$ を分割するもの, に対応する.
$2n$ 次元空間中に symplectic spread が存在する $\Leftrightarrow$ n が奇数.

プラス直交 DHO の幾何学的構成

定理 4 *[Dempwolff-Kantor 2015] V の特異点 P における剰余 $P^\perp/P$ ($\cong Q^+(2n,2)$) における orthogonal spread* **O** *を取り, $Y \in$* **O** *を選ぶ. このとき* **O** *の像*

$$\mathcal{O} := \{((X \cap P^\perp) + P)/P \mid X \in \mathbf{O} \setminus \{Y/P\}\}$$

はプラス型直交 DHO である.
生成空間は $P^\perp/P$ で, 極大全等方部分空間 Y/P 上に分裂.

Orthogonal spread を経由せずに, symplectic 空間から DHO-set を構成するという記述もできる. その解析により, 奇数 n に対し, 生成空間の次元が $2n$ である n-(プラス直交型)DHO/$\mathbb{F}_2$ の同型類の個数は n に関して指数関数的に増大することが示せる.

二重双対 DHO　ベクトル空間 U の計量は $W(2n,q)$, $H(2n,q)$ (q: 平方数) または $Q^+(2n,q)$ とする.

定義 7 *n-DHO/$\mathbb{F}_q$ $\mathcal{S}$ in U が* **二重双対** *(doubly dual) とは, この計量に関して $\mathcal{S}^\perp := \{X^\perp \mid X \in \mathcal{S}\}$ が DHO となること.*

$\Leftrightarrow \forall X,Y,Z \in \mathcal{S}$ $(\neq)$, $X^\perp \cap Y^\perp \cap Z^\perp = \{0\}$ $(\Leftrightarrow Z \not\subset X+Y)$.
$(\dim(X^\perp \cap Y^\perp) = 1$ は自動的に満たされる.) この定義は [Dempwolff 2013] において定式化された.

上の計量に関する polar type の DHO は二重双対 DHO.
しかし二重双対 DHO は polar type とは限らない.
(他の計量に関する polar type DHO は存在は未知?.)

二重双対 DHO と Knuth operator　双線形 DHO $\mathcal{S}$ (従って $q=2$) が二重双対であると, $\mathcal{S}$ を定める双線形写像 β から,
次の二つの双線形写像 β° 及び β^t が定義できて,
しかもこれらはDHO を定める: $\beta^\circ(x,y) := \beta(y,x)$, 計量が定める非退化双一次形式を $\langle , \rangle$ とするとき, $\langle u, \beta(v,x)\rangle = \langle \beta^t(u,x), v\rangle$. ($\beta^t(x)$ は線形変換 $\beta(x)$: $u \mapsto \beta(u,x)$ の内積 $\langle , \rangle$ に関する **adjoint** 変換.)

この二つの operator $\beta \mapsto \beta^\circ$, $\beta \mapsto \beta^t$ に対して, semifield における Knuth 理論の類似が成立. [Edel 2009]. $\beta^\circ\beta^t\beta^\circ = \beta^t\beta^\circ\beta^t$ など.

対称・交代（双線形) DHO　$\beta^\circ = \beta$ である双線形 DHO $\mathcal{S}$ を**対称**という. 対称 DHO を定める双線形写像 β が $\beta(x,y)=0$ ならば $x=0$, $y=0$ または $x=y$ をみたすとき, $\mathcal{S}$ を**交代** DHO と呼ぶ.

- [Taniguchi 2009] 二重双対な交代 n-DHO が存在する
  $\Leftrightarrow n$ は奇数.
- [Edel 2009] 二重双対な対称 n-DHO が存在するならば,
  symplectice DHO が存在する.
- [Dempwolff 2013] 二重双対な対称 n-DHO が存在するならば n は奇数.

幾つかのコメント　[Dempwolff 2013] では二重双対な対称 (交代でない) DHO が多く構成されている. [Edel 2009] から, これらは symplectic ($W(2n,2)$ 型) だがプラス直交 ($Q^+(2n,2)$ 型) でない polar type の DHO を与える. [Sheekey 2015] での結果は [Dempwolff 2013] における命題の別証明を与える.

Dempwolff の予想 [Dempwolff 2015A]

二重双対 n-DHO/$\mathbb{F}_q$ が存在すれば, n は奇数.

References

[Dempwolff 2013] U. Dempwolff, Dimensional doubly dual hyperovals and bent functions, Innovations in Incidence Geometry, 13 (2013), 149–178.

[Dempwolff 2014A] U. Dempwolff, Universal covers of dimensional dual hyperovals, Discrete Mathematics, 338 (2015), 633–636. DOI:10.1016/j.disc.2014.11.022

[Dempwolff 2014B] U. Dempwolff, Some doubly transitive bilinear dual hyperovalsand their ambient spaces, European Journal of Combinatorics, 44(2015), 1–22. DOI:10.1016/j.ejc.2014.09.003

[Dempwolff 2015A] U. Dempwolff, Symmetric doubly dual hyperovals have an odd rank, Designs, Codes and Cryptography, 74 (2015), 153–157.

[Dempwolff 2015B] U. Dempwolff, The automorphism groups of doubly transitive bilinear dual hyperovals, submitted for publication.

[Dempwolff-Edel 2012] U. Dempwolff and Y. Edel, Dimensional dual hyperovals and APN functions with translation groups, Journal of Algebraic Combinatorics, 39 (2014), 457–496.

[Dempwolff-Kantor 2015] Orthogonal dual hyperovals, symplectic spreads, and orthogonal spreads, Journal of Algebraic Combinatorics, 41 (2015), 83–108.

[Edel 2009] On some representations of quadratic APN functions and dimensional dual hyperovals, RIMS Kokyuroku, 1687 (2010), 118–130.

[Huybrechts-Pasini 1999] C. Huybrechts and A. Pasini, Flag transitive extensions of dual affine spaces, Contributions to Algebra and Geometry, 40 (1999), 503–532.

[Pasini-Yo 2001] A. Pasini and S. Yoshiara, On a new family of flag-transitive semibiplanes, European Journal of Combinatorics, 22 (2001), 529–545.

[Sheekey 2015] J. Sheekey, Dimensional dual hyperovals in classical polar spaces, arXiv:1504.04170v1, 16 Apr 2015.

[Taniguchi 2009] H. Taniguchi, On the duals of certain d-dimensional dual hyperovals in $PG(2d+1, 2)$, Finite Fields and their Applications, 15 (2009), 673–681.

[Vanhove 2011] F. Vanhove, Antidesigns and regularity of partial spreads in dual polar graphs, Journal of Combinatorial Designs, 19 (2011), 202–216.

[Yo2004] S. Yoshiara, Ambient spaces of dimensional dual arcs, J. Alg. Combin. 19 (2004), 5–23.

[2006 の survey] S. Yoshiara, Dimensional dual arcs–a survey, pp.247–266, in: Finite Geometries, Groups, and Computation, eds. A. Hulpke, B. Liebler, T. Penttila, and A. Seress, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 2006.

[Yo2008] S. Yoshiara, A characterization of a class of dimensional dual hyperovals with doubly transitive automorphism groups and its applications, European Journal of Combinatorics, 29 (2008), 1521–1534.

[Yo2009] S. Yoshiara, Dimensional dual hyperovals with doubly transitive automorphism groups, European Journal of Combinatorics, 30 (2009), 747–757.

[Yo2014] S. Yoshiara, An elementary description of the Mathieu dual hyperoval and its splitness, to appear in Innovations in Incidence Geometry.

アソシエーションスキームの商集合についての Delsarte 理論

奥田隆幸 (広島大学大学院理学研究科)*

Abstract

可換アソシエーションスキームの部分集合について, 第一固有行列を用いてその符号理論的性質とデザイン理論的性質の橋渡しをする理論を Delsarte 理論と呼ぶ (Delsarte [Philips Res. Rep. Suppl. 1973]). 本稿では有限可換アソシエーションスキームの部分集合の替わりに商を考えた場合, Delsarte 理論, 特に線形計画法がどのような形で定式化されるかを考察し, まとめたものを報告する.

1 Finite commutative association schemes

この節では記号を統一するため有限可換アソシエーションスキームの定義とその第一固有行列を復習する. また Section 1.3 では有限可換アソシエーションスキーム上で Delsarte 理論を展開する際の基本的な原理を定式化しておく.

1.1 Definition

以下, 有限可換アソシエーションスキームの定義を復習する. 詳細については Delsarte の元論文 [3] や坂内–伊藤の教科書 [1] を参照されたい. また Barg–Skriganov [2] にも, より一般化された視点からアソシエーションスキームの定義や性質がまとめられている. [1]

X を有限集合とし, 基点付き集合 $(\mathcal{I}, i_0)$ および全射写像 $R : X \times X \to \mathcal{I}$ を考える. 写像 $R : X \times X \to \mathcal{I}$ としては "X 上の距離関数" のようなもの想定しているが, 後で見るように対称性や三角不等式は一般的には要請しな

*okudatak@hiroshima-u.ac.jp

[1] アソシエーションスキームの各用語については本稿独自のものが多いのでその点は注意が必要である.

い．そもそも $\mathcal{I}$ 上には和に相当する構造を要請しない場合も多いことに注意しておく．また各 $i \in \mathcal{I}$ について, $R_i := R^{-1}(i) = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid R(x_1, x_2) = i\}$ と書くことにし, さらに各 $x \in X$ および $i \in \mathcal{I}$ について $S_i(x) := \{z \in X \mid R(x, z) = i\}$ とおく．この $S_i(x)$ は $\mathfrak{X} = (X, R)$ において "x を中心とした半径 i の球面" という気持ちのものである．

Definition 1.1 (有限可換アソシエーションスキーム)**.** 上記の設定において, 以下の条件を満たすとき, $\mathfrak{X} = (X, R)$ を **有限アソシエーションスキーム** という．

1. $R_{i_0} = \operatorname{diag} X := \{(x, x) \mid x \in X\}$.
2. 各 $i \in \mathcal{I}$ について $R_i^T = R_{i^*}$ となる $i^* \in \mathcal{I}$ が (ただ一つ) 存在する．ただし $X \times X$ の部分集合 L について $L^T := \{(x_1, x_2) \mid (x_2, x_1) \in L\}$ としている．
3. 各 $i_1, i_2, r \in \mathcal{I}$ について非負整数 $p^r_{i_1,i_2}$ が存在して, 任意の $(x_1, x_2) \in R_r$ について
$$p^r_{i_1,i_2} = |S_{i_1}(x) \cap S_{i_2^*}(y)|$$
となる．

更に以下のそれぞれの条件を満たすとき, 有限アソシエーションスキーム $\mathfrak{X} = (X, R)$ は **対称** または **可換** であるという．

条件 (対称性): $i^* = i$ *for any* $i \in \mathcal{I}$.

条件 (可換性): $p^r_{i_1,i_2} = p^r_{i_2,i_1}$ *for any* $i_1, i_2, r \in \mathcal{I}$.

一般に対称な有限アソシエーションスキームは可換であることを注意しておく．

Example 1.2. $\Gamma = (X, E)$ が有限な距離正則 (連結単純) グラフであるとき, $\mathcal{I} = \{0, \ldots, \operatorname{diam} X\}$, $i_0 = 0$ とし, $R : X \times X \to \mathcal{I}$ をグラフ距離とすれば $\mathfrak{X} = (X, R)$ は有限対称アソシエーションスキームとなる．[2]

Example 1.3. G を有限群, H をその部分群とする．このとき $X = G/H$, $\mathcal{I} = H\backslash G/H$, $i_0 = He_GH$ ($e_G \in G$ は G の単位元とする),
$$R : X \times X \to \mathcal{I}, \quad (g_1H, g_2H) \mapsto Hg_1^{-1}g_2H$$

[2]距離正則グラフから得られるアソシエーションスキームは "P-polynomial" という性質を持つが, これは $R : X \times X \to \mathcal{I}$ が三角不等式 $(+\alpha)$ を満たすということと関係がある．

とすると, $\mathfrak{X} = (X, R)$ は有限アソシエーションスキームとなる．さらに (G, H) が *Gelfand* 対[3] であるときには, $\mathfrak{X} = (X, R)$ は可換になることが知られている．特に任意の有限群 G_0 について, $G = G_0 \times G_0$, $H = \operatorname{diag} G_0 = \{(g, g) \mid g \in G_0\}$ とおけば, この (G, H) は *Gelfand* 対で, G/H は G_0 と同一視でき, $H \backslash G/H$ は G_0 の共役類集合と同一視できる．これにより群アソシエーションスキームと呼ばれる有限可換アソシエーションスキーム $\mathfrak{X} = (G_0, R : G_0 \times G_0 \to \{G_0 \text{ の共役類}\}, (g_1, g_2) \mapsto [g_1^{-1} g_2]\})$ が手に入る．

1.2 First eigenmatrices

以下 $\mathfrak{X} = (X, R)$ を有限アソシエーションスキームとする．

直積集合 $X \times X$ 上の複素数値関数全体の集合を $M(X, \mathbb{C})$ と書くことにする．$\mathfrak{X} = (X, R)$ の Bose–Mesner 代数 $\mathfrak{A} \subset M(X, \mathbb{C})$ を以下のように定義しよう．

Definition 1.4 (Bose–Mesner 代数)**.** 有限アソシエーションスキーム $\mathfrak{X} = (X, R)$ について,

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}} := \{A \in M(X, \mathbb{C}) \mid A(x_1, x_2) = A(x_1', x_2') \textit{ if } R(x_1, x_2) = R(x_1', x_2')\}$$

とおく．この $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ を $\mathfrak{X}$ の *Bose–Mesner* 代数という．

$\mathcal{I}$ 上の複素数値関数全体のなすベクトル空間を $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ と書けば, この関数空間を全射写像 $R : X \times X \to \mathcal{I}$ について引き戻した $R^*(\mathbb{C}^{\mathcal{I}})(\subset M(X, \mathbb{C}))$ が Bose–Mesner 代数 $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ であると考えてもよい．

Bose–Mesner 代数の性質を復習するため, まず X を添え字とする行列代数 $M(X, \mathbb{C})$ について復習する．まず $X \times X$ 上の関数全体のなす空間 $M(X, \mathbb{C})$ は自然に有限次元複素ベクトル空間の構造を持つ．$J_X, I_X \in M(X, \mathbb{C})$ をそれぞれ

$$J_X(x_1, x_2) = 1, \quad I_X(x_1, x_2) := \delta_{x_1, x_2} \quad \text{for each } x_1, x_2 \in X$$

と定義し (ただし δ は Kronecker のデルタとする), I_X を X 上の**単位行列**, J_X を X 上の**全一行列** (all one matrix) とよぶことにする．各 $A \in M(X, \mathbb{C})$ についてその**複素共役** $A^- \in M(X, \mathbb{C})$, **転置共役** $A^* \in M(X, \mathbb{C})$ をそれぞれ

$$A^-(x_1, x_2) := \overline{A(x_1, x_2)}, \quad A^*(x_1, x_2) := \overline{A(x_2, x_1)} \quad \text{for each } x_1, x_2 \in X$$

[3] 有限群 G とその部分群 H について, (G, H) が Gelfand 対であるとは, G の任意の複素線型既約表現 (自動的に有限次元) (ρ, V) について $\dim_{\mathbb{C}} V^H \leq 1$ となることとする．ただし $V^H := \{v \in V \mid \rho(h)v = v \text{ for any } h \in H\}$ としている．

によって定義する．これらはそれぞれ $M(X,\mathbb{C})$ の反 $\mathbb{C}$-線型変換となる．また $X \times X$ 上の関数としての積を**アダマール積**とよび, 以下 "$\circ$" で表す．つまり各 $A, B \in M(X,\mathbb{C})$ について

$$(A \circ B)(x_1, x_2) := A(x_1, x_2)B(x_1, x_2) \text{ for each } (x_1, x_2) \in X \times X$$

とする．さらに $M(X,\mathbb{C})$ 上の**行列積** "$\cdot$" を各 $A, B \in M(X,\mathbb{C})$ について

$$(A \cdot B)(x_1, x_2) := \sum_{z \in X} A(x_1, z)B(z, x_2) \text{ for each } (x_1, x_2) \in X \times X$$

として定義する．[4]

有限アソシエーションスキーム $\mathfrak{X} = (X, R)$ について, その Bose–Mesner 代数 $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}} \subset M(X,\mathbb{C})$ は以下のような性質を持つ:

- $J_X, I_X \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$.
- $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ は複素共役, 転置共役についてそれぞれ閉じる．
- $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ はアダマール積, 行列積についてそれぞれ閉じる．
- I_X は $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ のアダマール積についての原始冪等元となり, $(1/|X|)J_X$ は $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ の行列積についての原始冪等元となる．

逆に上記の性質を満たす $M(X,\mathbb{C})$ 内の部分空間 $\mathfrak{A}$ が与えられたとき, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ となるような $\mathfrak{X} = (X, R)$ が一意的に存在することが知られている．また有限アソシエーションスキーム $\mathfrak{X} = (X, R)$ が可換であることと, 対応する Bose–Mesner 代数 $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ において行列積が可換であることは同値である．

以下 $\mathfrak{X} = (X, R)$ を有限可換アソシエーションスキームとする．各 $i \in \mathcal{I}$ について, $A_i \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ を

$$A_i(x_1, x_2) := \begin{cases} 1 & \text{if } R(x_1, x_2) = i, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

として定める．特に $A_{i_0} = I_X$ となることに注意しておく．このとき $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ は $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ の基底となり, さらにアダマール積についての原始冪等元全体の集合と一致する．特に $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{A}_{\mathfrak{X}} = |\mathcal{I}|$ である．

[4] $M(X,\mathbb{C})$ に $X \times X$ 上の関数空間として l^2-ノルムを入れて考えると, 有限次元 Banach 空間とみなせる．ここでは詳しく述べないが, このノルムについて $M(X,\mathbb{C})$ はアダマール積と複素共役について Banach *-代数となり, 行列積と転置共役についても Banach *-代数となる．ここで J_X はアダマール積についての単位元であり, I_X は行列積についての単位元である．

また有限集合 X 上の複素数値関数全体のなすベクトル空間を $\mathbb{C}^X$ と書くことにし, Bose–Mesner 代数は $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ は行列として自然に $\mathbb{C}^X$ に作用しているとする (行列積が作用素の合成と対応する). いま $\mathfrak{X}$ は可換であるから, $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ は行列積について可換であり, さらに $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ は転置共役で閉じているため, 各 $A \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ は正規行列, すなわち $A^* \cdot A = A \cdot A^*$ となる. したがって $\mathbb{C}^X$ は $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ (行列積について可換) について同時固有空間分解をもち, それを

$$\mathbb{C}^X = \bigoplus_{j \in \mathcal{J}} V_j$$

とおく. ただし X 上の定数関数からなる同時固有空間については V_{j_0} と書かれていることとする. ここで $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}^{\vee}$ を $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ の複素ベクトル空間としての双対空間 (一次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}$ への $\mathbb{C}$-線形写像全体) とし, $\mathcal{J} \subset \mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}^{\vee}$ として考えている.[5] 特に, 各 $v \in V_j$ $(j \in \mathcal{J})$, $A \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ について $Av = j(A)v$ である.

$\mathbb{C}^X$ に l^2-内積

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_{x \in X} f_1(x)\overline{f_2(x)}$$

を定義し内積空間とすると, 上記の同時固有空間分解は直交直和分解となる. ここで各同時固有空間 V_j $(j \in \mathcal{J})$ について, V から V_j への直交射影作用素を X を添え字とする行列として表示したものを $E_j \in M(X, \mathbb{C})$ と書くことにする.[6] 特に $E_{j_0} = (1/|X|)J_X$ であることに注意しておく. このとき各 $j \in \mathcal{J}$ について $E_j \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ であり, $\{E_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ は $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ の基底となり, さらに $\{E_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ は $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ の行列積についての原始冪等元全体の集合と一致する. 特に $\mathcal{I}$ の濃度と $\mathcal{J}$ の濃度は一致する.

各 $i \in \mathcal{I}$ について, $\mathcal{J}$ 上の関数 $P_i : \mathcal{J} \to \mathbb{C}$ を

$$P_i(j) := j(A_i) \in \mathbb{C}$$

として定義する. ここで行列 $P = \{P_i(j)\}_{i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}}$ を $\mathfrak{X} = (X, R)$ の **第一固有行列** という. 第一固有行列 P は $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ の基底 $\{E_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ から基底 $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ への変換行列に他ならない. P の逆行列を以降 $P^{-1} = \{(P^{-1})_j(i)\}_{j \in \mathcal{J}, i \in \mathcal{I}}$ と書くことにする. 特に簡単な考察から $P_{i_0}(j) = 1$ $(j \in \mathcal{J})$ および $(P^{-1})_{j_0}(i) = 1/|X|$ $(i \in \mathcal{I})$ となることが分かる.

Remark 1.5. 通常 $Q = |X|P^{-1}$ のことを $\mathfrak{X} = (X, R)$ の 第二固有行列 という. ただ流儀によっては P^{-1} そのものを第二固有行列とよんでいる場合もある (例えば [2]) ので, 本稿では混乱を避けるためこの用語は用いない.

[5] より正確には $\mathcal{J}$ は $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ を行列積と転置共役について Banach *-代数とみなした場合の指標の集まりとして書ける.

[6] V_j を l^2-内積により内積空間 ($\subset \mathbb{C}^X$) とみた場合の再生核は E_j と一致する.

また $\mathbb{C}_{\mathcal{I}}$, $\mathbb{C}_{\mathcal{J}}$ をそれぞれ $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ を基底とする複素ベクトル空間 ($\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ の形式的一次結合全体の空間としてそれぞれ実現される) とする. 以降, 第一固有行列とその逆行列を自然な基底について線形写像として解釈したものもそれぞれ $P : \mathbb{C}_{\mathcal{J}} \to \mathbb{C}_{\mathcal{I}}$, $P^{-1} : \mathbb{C}_{\mathcal{I}} \to \mathbb{C}_{\mathcal{J}}$ と書く.

Example 1.6. *Example 1.3* の最後のケースとして G_0 を有限群とし, 群アソシエーションスキーム $\mathfrak{X} = (G_0, R : G_0 \times G_0 \to \{G_0 \text{ の共役類}\})$ のケースについて考える. このとき $\mathcal{I} = \{G_0 \text{ の共役類}\}$ 上の関数は G_0 上の類関数と対応することに注意しておく. このケースでは $\mathcal{J}$ は G_0 の既約表現の同型類集合 $\hat{G}$ と同一視できる. 特に $P^{-1} = \{(P^{-1})_j(i)\}_{j \in \mathcal{J}, i \in \mathcal{I}}$ について, 各 $(P^{-1})_j$ ($j \in \mathcal{J}$) を $\mathcal{I}$ 上の関数とみなすと, これは j に対応する G_0 の既約表現についての指標を考えていることに他ならない. 第一固有行列に現れる $\mathcal{J}$ 上の関数 P_i ($i \in \mathcal{I}$) は $i \in \mathcal{I}$ に対応する共役類上の特性関数を既約表現の指標で分解した場合の係数を $\mathcal{J}$ 上の関数とみなしたものと一致する.

1.3 Principle for Delsarte theory

ここでは次節で詳しく紹介する Delsarte 理論において基本的な役割を果たす命題を定式化しておく.

有限可換アソシエーションスキーム $\mathfrak{X}$ の Bose–Mesner 代数 $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ について, その上の線形汎関数 $\varphi \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}^{\vee}$ を考える. ここで $w_{\mathcal{I}}^{\varphi} \in \mathbb{C}_{\mathcal{I}}$, $w_{\mathcal{J}}^{\varphi} \in \mathbb{C}_{\mathcal{J}}$ を

$$(w_{\mathcal{I}}^{\varphi})_i := \varphi(A_i) \quad \text{for each } i \in \mathcal{I},$$
$$(w_{\mathcal{J}}^{\varphi})_j := \varphi(E_j) \quad \text{for each } j \in \mathcal{J},$$

により定義する.

このとき定義から以下が成り立つことが分かる:

Proposition 1.7. 各 $\varphi \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}^{\vee}$ について, $P(w_{\mathcal{J}}^{\varphi}) = w_{\mathcal{I}}^{\varphi}$.

以下, $(w_{\mathcal{I}}^{\varphi})_i$, $(w_{\mathcal{J}}^{\varphi})_j$ が全ての $i \in \mathcal{I}$, $j \in \mathcal{J}$ について非負実数となるとき, $\varphi \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}^{\vee}$ は **非負** であるということにする. さらに, 非負な $\varphi \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}^{\vee}$ が $(w_{\mathcal{I}}^{\varphi})_{i_0} > 0$ かつ $(w_{\mathcal{J}}^{\varphi})_{j_0} > 0$ となるとき φ は **有限** であるということにし,

$$\mathrm{vol}\,\varphi := (w_{\mathcal{J}}^{\varphi})_{j_0} / (w_{\mathcal{I}}^{\varphi})_{i_0} \ (> 0)$$

と書くことにする. ここで $P_{i_0}(j) = 1$ ($j \in \mathcal{J}$) および $P_{j_0}^{-1}(i) = 1/|X|$ ($i \in \mathcal{I}$) であることから

$$\mathrm{vol}\,\varphi = \frac{(w_{\mathcal{J}}^{\varphi})_{j_0}}{\sum_{j \in \mathcal{J}} (w_{\mathcal{J}})_j} = \frac{\sum_{i \in \mathcal{I}} (w_{\mathcal{I}})_i}{|X| (w_{\mathcal{I}})_{i_0}}$$

となることに注意しておく.

また以下では $\mathbb{C}_{\mathcal{I}}$, $\mathbb{C}_{\mathcal{J}}$ の各元について, その台を

$$\operatorname{supp} w_{\mathcal{I}} := \{i \in \mathcal{I} \mid (w_{\mathcal{I}})_i \neq 0\} \subset \mathcal{I} \quad \text{for each } w_{\mathcal{I}} \in \mathbb{C}_{\mathcal{I}},$$
$$\operatorname{supp} w_{\mathcal{J}} := \{j \in \mathcal{J} \mid (w_{\mathcal{J}})_j \neq 0\} \subset \mathcal{J} \quad \text{for each } w_{\mathcal{J}} \in \mathbb{C}_{\mathcal{J}}$$

と定義しておく.

さらに $\mathcal{I} \setminus \{i_0\}$ の部分集合 $\mathcal{S}$, $\mathcal{J} \setminus \{j_0\}$ の部分集合 $\mathcal{T}$ を固定したとき, ベクトル空間 $\mathbb{C}_{\mathcal{J}}$, $\mathbb{C}_{\mathcal{I}}$ の convex cone $\Omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S},\mathcal{T}}$, $\Omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ を以下のように定義しておく.

$\Omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ **の定義:** $\Omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ は以下の性質を全て満たすような $w_{\mathcal{J}} \in \mathbb{C}_{\mathcal{J}}$ 全体の集合である:

- $(w_{\mathcal{J}})_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ for any $j \in \mathcal{J}$ かつ $(w_{\mathcal{J}})_{j_0} > 0$.
- $(w_{\mathcal{J}})_j = 0$ if $j \in \mathcal{T}$ (つまり $\operatorname{supp} w_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{J} \setminus \mathcal{T}$).
- $\sum_{j \in \mathcal{J}} P_i(j)(w_{\mathcal{J}})_j \geq 0$ for any $i \in I$ かつ $\sum_{j \in \mathcal{J}} (w_{\mathcal{J}})_j > 0$.
- $\sum_{j \in \mathcal{J}} P_i(j)(w_{\mathcal{J}})_j = 0$ if $i \in \mathcal{S}$ (つまり $\operatorname{supp} P(w_{\mathcal{J}}) \subset \mathcal{I} \setminus \mathcal{S}$).

$\Omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ **の定義:** $\Omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ は以下の性質を全て満たすような $w_{\mathcal{I}} \in \mathbb{C}_{\mathcal{I}}$ 全体の集合である:

- $(w_{\mathcal{I}})_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ for any $i \in \mathcal{I}$ かつ $(w_{\mathcal{I}})_{i_0} > 0$.
- $(w_{\mathcal{I}})_i = 0$ if $i \in \mathcal{S}$ (つまり $\operatorname{supp} w_{\mathcal{I}} \subset \mathcal{I} \setminus \mathcal{S}$).
- $\sum_{i \in \mathcal{I}} (P^{-1})_j(i)(w_{\mathcal{I}})_i \geq 0$ for any $i \in I$ かつ $\sum_{i \in \mathcal{I}} (w_{\mathcal{I}})_i > 0$.
- $\sum_{i \in \mathcal{I}} (P^{-1})_j(i)(w_{\mathcal{I}})_i = 0$ if $j \in \mathcal{T}$ (つまり $\operatorname{supp} P^{-1}(w_{\mathcal{I}}) \subset \mathcal{J} \setminus \mathcal{T}$).

ここで上記の命題 (Proposition 1.7) の帰結として以下の定理が成り立ち, この定理が Delsarte 理論の枠組みでは線形計画法として活躍する:

Theorem 1.8. $\mathcal{I} \setminus \{i_0\}$ の部分集合 $\mathcal{S}$ および $\mathcal{J} \setminus \{j_0\}$ の部分集合 $\mathcal{T}$ を固定する. このとき以下の三つの集合 ($\subset \mathbb{R}_{>0}$) は一致する*:*

-

$$\{\operatorname{vol} \varphi \mid \varphi \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}^{\vee} : \text{非負かつ有限}, \quad \operatorname{supp} w_{\mathcal{I}}^{\varphi} \subset \mathcal{I} \setminus \mathcal{S} \text{ and } \operatorname{supp} w_{\mathcal{J}}^{\varphi} \subset \mathcal{J} \setminus \mathcal{T}\} \subset \mathbb{R}_{>0}.$$

- $$\{\frac{(w_{\mathcal{J}})_{j_0}}{\sum_{j\in\mathcal{J}}(w_{\mathcal{J}})_j} \mid w_{\mathcal{J}} \in \Omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S},\mathcal{T}}\} \subset \mathbb{R}_{>0}.$$

- $$\{\frac{\sum_{i\in\mathcal{I}}(w_{\mathcal{I}})_i}{|X|(w_{\mathcal{I}})_{i_0}} \mid w_{\mathcal{I}} \in \Omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{S},\mathcal{T}}\} \subset \mathbb{R}_{>0}.$$

2 Delsarte theory for subsets and quotients

この節では Delsarte 理論として, 有限可換アソシエーションスキームの

- 部分集合の符号理論的性質とデザイン理論的性質の関係 (Section 2.1),
- Equitable な商集合のファイバーにおける距離分布とスペクトルの分布の関係 (Section 2.2)

をなるべく並列に記述する. 特に前者ついては基本的に Delsarte [3] の結果の一部の紹介となるが, 符号理論とデザイン理論が対等であることが見えやすい形でまとめることを心がけた.

2.1 Delsarte theory for subsets

以下 $\mathfrak{X} = (X, R)$ を有限可換アソシエーションスキームとし, Y を X の空でない部分集合とする. Y についての "符号理論的性質" および "デザイン理論的性質" を以下のように定義する.

Definition 2.1. $\mathfrak{X} = (X, R)$ を有限可換アソシエーションスキームとし, Y を X の空でない部分集合とする.

符号理論的性質: $w_{\mathcal{I}}^Y \in \mathbb{C}_{\mathcal{I}}$ を

$$(w_{\mathcal{I}}^Y)_i := |\{(y_1, y_2) \in Y \times Y \mid R(y_1, y_2) = i\}| \quad \textit{for each } i \in \mathcal{I}$$

として定義する.

デザイン理論的性質: $w_{\mathcal{J}}^Y \in \mathbb{C}_{\mathcal{J}}$ を

$$(w_{\mathcal{J}}^Y)_j := \max_{f\in V_j} \frac{|\sum_{y\in Y} f(y)|^2}{\|f\|^2} \quad \textit{for each } j \in \mathcal{J}$$

として定義する. ただし $f \in \mathbb{C}^X$ について, $\|f\|^2 := \sum_{x\in X} |f(x)|^2$ としている.

上記の $w^Y_{\mathcal{I}} \in \mathbb{C}_{\mathcal{I}}$, $w^Y_{\mathcal{J}} \in \mathbb{C}_{\mathcal{J}}$ の気持ちを述べよう.

$w^Y_{\mathcal{I}}$ の意味: $w^Y_{\mathcal{I}}$ は Y が "X 内でどのように散らばっているか" を記述するものである. 各 $i \in \mathcal{I}$ について, $(w^Y_{\mathcal{I}})_i$ は Y 内の二点で "距離がちょうど i" となっているようなものを数え上げたものである.

$w^Y_{\mathcal{J}}$ の意味: $w^Y_{\mathcal{J}}$ は Y が "X をどの程度近似しているか" を記述するものである. まず $j \in \mathcal{J}$ が $j \neq j_0$ のとき, 任意の $f \in V_j \subset \mathbb{C}^X$ について $\sum_{x\in X} f(x) = 0$ となる. これは定数関数の空間 V_{j_0} と V_j が l^2 内積の意味で直交していることから従う. ここで $w^Y_{\mathcal{J}}$ は V_j における Y 上の積分がどの程度で上から押さえられるかということを測るものである. 特に以下の公式が成り立つ: 任意の $f \in \mathbb{C}^X$ に対して, $f = \sum_{j\in\mathcal{J}} f_j$ $(f_j \in V_j)$ と分解すると,

$$|\frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x) - \frac{1}{|Y|}\sum_{y\in Y} f(y)| \leq \frac{1}{|Y|}\sum_{j\in\mathcal{J}\setminus\{j_0\}} \|f_j\|\sqrt{(w^Y_{\mathcal{J}})_j}.$$

この式の左辺は f の X 上の平均と Y 上の平均の間の差を表しており, それが右辺により上から評価されるというものである.

Remark 2.2. $w^Y_{\mathcal{I}}$ は *Delsarte [3, Section 3.1]* において *"inner distribution* $a = (a_i)_{i\in\mathcal{I}}$*"* として定義されているものを $|Y|$ 倍したものとなる. $w^Y_{\mathcal{J}}$ は後で見るように $P^{-1}(w^Y_{\mathcal{I}}) = w^Y_{\mathcal{J}}$ という性質を持ち, これは *Delsarte [3, Section 3.4]* において *T-design* を定義する際に現れる "$(\sum_i a_i Q_j(i))_{j\in\mathcal{J}}$" (ただし $Q = |X|P^{-1}$ であり, 添え字は本稿のものに併せて変更している) を定数倍したものと一致する.

ここで Bose–Mesner 代数 $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ 上の線型汎関数 $\varphi_Y : \mathfrak{A}_{\mathfrak{X}} \to \mathbb{C}$ を

$$\varphi_Y(A) := \mathrm{trace}(A \cdot \chi_{Y\times Y}) \in \mathbb{C} \quad \text{for each } A \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$$

として定義する. ただし $\chi_{Y\times Y} \in M(X,\mathbb{C})$ は $Y \times Y \subset X \times X$ の特性関数とし, 各 $B \in M(X,\mathbb{C})$ について $\mathrm{trace}\, B := \sum_{x\in X} B(x,x)$ としている.

このとき以下のことが成り立つ:

Theorem 2.3. *$\varphi_Y \in \mathfrak{A}^\vee_{\mathfrak{X}}$ は非負かつ有限であり $\mathrm{vol}\,\varphi_Y = |Y|/|X|$ となる (用語については Section 1.3 参照). さらに $w^Y_{\mathcal{I}} = w^{\varphi_Y}_{\mathcal{I}}$ かつ $w^Y_{\mathcal{J}} = w^{\varphi_Y}_{\mathcal{J}}$ が成り立つ.*

この定理の $w^Y_{\mathcal{J}} = w^{\varphi_Y}_{\mathcal{J}}$ という主張については Delsarte [3] において完全に対応する結果は書かれていないように思われるので証明の概略を紹介しておく.

$w_{\mathcal{J}}^Y = w_{\mathcal{J}}^{\varphi_Y}$ **の証明の概略:** $j \in \mathcal{J}$ を固定して $(w_{\mathcal{J}}^Y)_j = (w_{\mathcal{J}}^{\varphi_Y})_j$ を示そう．定義から

$$(w_{\mathcal{J}}^{\varphi_Y})_j = \mathrm{trace}(E_j \cdot \chi_{Y\times Y}) = \sum_{(y_1,y_2)\in Y\times Y} E_j(y_1,y_2)$$

となることに注意しておく．また $E_j \in M(X,\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}^X$ から V_j への直交射影作用素を $\mathbb{C}^X$ の自然な基底について行列表示したものであったから, V_j の正規直交基底 $e_1,\dots,e_m$ $(m = \dim V_j)$ を固定したとき,

$$E_j(x_1,x_2) = \sum_l e_l(x_1)\overline{e_l(x_2)} \quad \text{for any } x_1,x_2 \in X$$

と書けることが分かる．また $f_Y \in V_j$ を

$$f_Y = \sum_{y\in Y}\sum_l \overline{e_l(y)}e_l$$

として定めておくと, 各 $f \in V_j$ について

$$\langle f, f_Y\rangle = \sum_{y\in Y}\sum_l e_l(y)\langle f, e_l\rangle = \sum_{y\in Y} f(y)$$

となる．ただし $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbb{C}^X$ 上の l^2-内積であった．従って, $(w_{\mathcal{J}}^{\varphi_Y})_j = \langle f_Y, f_Y\rangle = \|f_Y\|^2$ と書けることが分かる．これより

$$\begin{aligned}(w_{\mathcal{J}}^Y)_j &= \max_{f\in V_j}\frac{|\sum_{y\in Y} f(y)|^2}{\|f\|^2}\\ &= \max_{f\in V_j}\frac{|\langle f, f_Y\rangle|^2}{\|f\|^2}\\ &= \frac{|\langle f_Y, f_Y\rangle|^2}{\|f_Y\|^2}\\ &= \|f_Y\|^2 = (w_{\mathcal{J}}^{\varphi_Y})_j.\end{aligned}$$

□

Theorem 2.3 により Section 1.3 の各命題を $w_{\mathcal{I}}^Y$ と $w_{\mathcal{J}}^Y$ に適用できることになる．まず Proposition 1.7 の帰結として次の基本的な定理が成り立つ:

Theorem 2.4. 上記の設定において, $P(w_{\mathcal{J}}^Y) = w_{\mathcal{I}}^Y$.

また Delsarte の線型計画法を定式化するため, 有限可換アソシエーションスキーム $\mathfrak{X}=(X,R)$ 上の符号とデザインを以下のように定義する:

Definition 2.5. $\mathfrak{X}=(X,R)$ を有限可換アソシエーションスキームとし, Y を X の空でない部分集合とする.

- $\mathcal{I}\setminus\{i_0\}$ の部分集合 $\mathcal{S}$ について, Y が以下の条件を満たすとき, $\mathcal{S}$-禁止符号と呼ぶことにする.

  条件 ($\mathcal{S}$-禁止符号): $R(y_1,y_2)\notin\mathcal{S}$ *for any* $y_1,y_2\in Y$.

- $\mathcal{J}\setminus\{j_0\}$ の部分集合 $\mathcal{T}$ について, Y が以下の条件を満たすとき, $\mathcal{T}$-デザインと呼ぶことにする.

  条件 ($\mathcal{T}$-デザイン): $\sum_{y\in Y} f(y)=0$ *for any* $j\in\mathcal{T}$ *and any* $f\in V_j$.

$\mathcal{S}\subset\mathcal{I}\setminus\{i_0\}$ を固定すると, Y が $\mathcal{S}$-禁止符号であることは $\operatorname{supp} w^Y_{\mathcal{I}}\subset\mathcal{I}\setminus\mathcal{S}$ となることと同値である. また $\mathcal{T}\subset\mathcal{J}\setminus\{j_0\}$ を固定すると, Y が $\mathcal{T}$-デザインであることは $\operatorname{supp} w^Y_{\mathcal{J}}\subset\mathcal{J}\setminus\mathcal{T}$ となることと同値である. 特に $\mathcal{S}=\emptyset$ のときには X の任意の部分集合は $\mathcal{S}$-禁止符号であり, $\mathcal{T}=\emptyset$ のときには X の任意の部分集合は $\mathcal{T}$-デザインである.

Remark 2.6. 上記の $\mathcal{T}$-デザインの定義は, *Theorem* 2.3 を通じて *Delsarte* [3, *Section 3.4*] における *T-design* の定義と全く同じ概念であるといえる. 一方, $\mathcal{S}$-禁止符号の概念は *Delsarte* [3, *Section 3.3*] との対応としては *"*$(\mathcal{I}\setminus\mathcal{S})$*-clique"* を考えることに相当する. 本稿ではデザインの定義と揃えるため "禁止されている距離 $\mathcal{S}$" に記号を割り当てることにする.

大雑把に言えば, 有限可換アソシエーションスキーム上の符号理論とは $\mathcal{S}(\subset\mathcal{I}\setminus\{i_0\})$ を固定したときに, 「どのような $\mathcal{S}$-禁止符号があるか？」という問題について取り組むものであり, また有限可換アソシエーションスキーム上のデザイン理論とは $\mathcal{T}(\subset\mathcal{J}\setminus\{j_0\})$ を固定したときに, 「どのような $\mathcal{T}$-デザインがあるか？」という問題について取り組むものであるといえる. *Theorem* 2.4 により $w^Y_{\mathcal{I}}$ と $w^Y_{\mathcal{J}}$ は互いに変換が可能であり, その意味で符号理論とデザイン理論を結び付けて考察する理論が *Delsarte* 理論である.

Theorem 1.8 から以下の定理が成り立つ. この定理から $\mathcal{S}$-禁止符号や $\mathcal{T}$-デザインの濃度について議論する方法を Delsarte の線形計画法という.

Theorem 2.7 (Delsarte's linear programming method for subsets)**.** $\mathfrak{X}=(X,R)$ を有限可換アソシエーションスキームとし, $\mathcal{S}$ を $\mathcal{I}\setminus\{i_0\}$ の部分集合,

$\mathcal{T}$ を $\mathcal{J}\setminus\{j_0\}$ の部分集合として固定する. X の空でない部分集合 Y が $\mathcal{S}$-禁止符号かつ $\mathcal{T}$-デザインであるとき, 以下が成り立つ:

$$|Y| \in \{|X|\frac{(w_{\mathcal{J}})_{j_0}}{\sum_{j\in\mathcal{J}}(w_{\mathcal{J}})_j} \mid w_{\mathcal{J}} \in \Omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S},\mathcal{T}}\}$$
$$= \{\frac{\sum_{j\in\mathcal{J}}(w_{\mathcal{J}})_j}{(w_{\mathcal{I}})_{i_0}} \mid w_{\mathcal{I}} \in \Omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{S},\mathcal{T}}\}.$$

($\Omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S},\mathcal{T}} \subset \mathbb{C}^{\mathcal{J}}$, $\Omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{S},\mathcal{T}} \subset \mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ の定義は *Section 1.3* 参照.)

ここで $\Omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S},\mathcal{T}}, \Omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ は $\mathbb{C}_{\mathcal{J}}, \mathbb{C}_{\mathcal{I}}$ の convex cone であったから, $\{|X|\frac{(w_{\mathcal{J}})_{j_0}}{\sum_{j\in\mathcal{J}}(w_{\mathcal{J}})_j} \mid w_{\mathcal{J}} \in \Omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S},\mathcal{T}}\}$ や $\{\frac{\sum_{j\in\mathcal{J}}(w_{\mathcal{J}})_j}{(w_{\mathcal{I}})_{i_0}} \mid w_{\mathcal{I}} \in \Omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{S},\mathcal{T}}\}$ の最大値, 最小値を評価する問題はいわゆる線形計画問題となる. 従って線形計画問題のテクニックを用いてこれらの最大値, 最小値の評価を行えば, $\mathcal{S}$-禁止符号かつ $\mathcal{T}$-デザインとなるような $Y \subset X$ の濃度を評価することができる.[7]

Remark 2.8. 「有限可換アソシエーションスキームの部分集合に自然なアソシエーションスキーム構造が入るのはどのようなときか？」という問題も *Delsarte* 理論にとって重要であるが, 本稿では深入りしない.

2.2 Delsarte theory for quotients

以下 $\mathfrak{X} = (X, R)$ を有限可換アソシエーションスキームとし, Z を X の商集合, $\pi : X \to Z$ を自然な全射とする. 商集合 Z が equitable であるということを以下で定義する.

Definition 2.9. X の商集合 Z が有限可換アソシエーションスキーム $\mathfrak{X} = (X, R)$ の *equitable* な商集合であるとは, 自然な全射 $\pi : X \to Z$ が以下の条件を満たすこととする :

条件 (equitability): $z_1, z_2 \in Z$ を任意に固定する ($z_1 = z_2$ の場合も含む). このとき任意の $x, x' \in \pi^{-1}(z_1)$ と $i \in \mathcal{I}$ について,

$$|S_i(x) \cap \pi^{-1}(z_2)| = |S_i(x') \cap \pi^{-1}(z_2)|$$

が成り立つ.

[7] 符号またはデザインのいずれかの性質のみを仮定したい場合には $\mathcal{S}$ または $\mathcal{T}$ のいずれかを空集合とすればよい.

X の商集合 Z について, Z 上の複素数値関数全体のなすベクトル空間を $\mathbb{C}^Z$ と書き, $\pi^*(\mathbb{C}^Z) \subset \mathbb{C}^X$ を π による $\mathbb{C}^Z$ の引き戻しとする. $\mathfrak{X} = (X, R)$ の Bose–Mesner 代数 $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ は自然に $\mathbb{C}^X$ に作用しているのであったが, Z が $\mathfrak{X} = (X, R)$ の equitable な商集合であることと, $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}(\pi^*(\mathbb{C}^Z)) \subset \pi^*(\mathbb{C}^Z)$ となることは同値である.

Remark 2.10. 上で定義した *equitable* な商集合という概念はアソシエーションスキームの *"equitable partition"* として知られている概念 (例えば *[4]* 参照) と本質的に同じものである. 本稿では *"*部分集合における *Delsarte* 理論*"* との対比を鮮明にするため, 商集合についての用語として *equitable* の定義を行った.

Example 2.11. *Example 1.3* のケースとして G を有限群, H をその部分群とし, (G, H) が *Gelfnad* 対であるような場合を考える. このとき $\mathfrak{X} = (X = G/H, R : X \times X \to H\backslash G/H)$ は有限可換アソシエーションスキームとなるのであった. L を G の部分群とし, L の $X = G/H$ への自然な作用を考え, その商を $Z = L\backslash X$ と書くことにすると, Z は $\mathfrak{X}$ の *equitable* な商集合となる.

以下 Z は有限可換アソシエーションスキーム $\mathfrak{X} = (X, R)$ の equitable な商集合とし, Z についての "ファイバーの距離分布" および "スペクトル分布" を以下のように定義する.

Definition 2.12. $\mathfrak{X} = (X, R)$ を有限可換アソシエーションスキームとし, Z を X の *equitable* な商集合, $\pi : X \to Z$ を自然な全射とする.

ファイバーの距離分布: 各 $z \in Z$ に対して $x_z \in \pi^{-1}(z)$ を固定する. $w^Z_{\mathcal{I}} \in \mathbb{C}_{\mathcal{I}}$ を

$$(w^Z_{\mathcal{I}})_i := \sum_{z \in Z} |\{(x_z, x) \in X \times X \mid R(x_z, x) = i,\ x \in \pi^{-1}(z)\}| \quad \textit{for each } i \in \mathcal{I}$$

により定義する (Z が *equitable* であることから $(w^Z_{\mathcal{I}})_i$ は $x_z \in \pi^{-1}(z)$ の選び方に依らない).

スペクトル分布: $w^Z_{\mathcal{J}} \in \mathbb{C}_{\mathcal{J}}$ を

$$(w^Z_{\mathcal{J}})_j := \dim(\pi^*(\mathbb{C}^Z) \cap V_j) \quad \textit{for each } j \in \mathcal{J}$$

により定義する.

上記の $w^Z_{\mathcal{I}} \in \mathbb{C}_{\mathcal{I}}$, $w^Z_{\mathcal{J}} \in \mathbb{C}_{\mathcal{J}}$ の気持ちを述べよう.

$w^Z_{\mathcal{I}}$ の意味: $w^Z_{\mathcal{I}}$ は "$\pi : X \to Z$ の各ファイバー内の距離分布を合算したもの" である. 各 $i \in \mathcal{I}$ について, $(w^Z_{\mathcal{I}})_i$ は各ファイバーにおいて, "ファイバー内の基点から距離がちょうど i" となっているような点を数え上げ (Z が equitable であることから基点の選び方に依存しない), それらをすべてのファイバーについて合算したものである.

$w^Z_{\mathcal{J}}$ の意味: $w^Z_{\mathcal{J}}$ は "Z におけるスペクトルの分布" を記述するものである. いま Z が equitable であることから $\mathfrak{X}$ の Bose–Mesner 代数 $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ は $\mathbb{C}^Z (\simeq \pi^*(\mathbb{C}^Z))$ に作用する. 各 $j \in \mathcal{J}$ について $(w^Z_{\mathcal{J}})_j$ は $\mathbb{C}^Z$ を $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ の作用について同時固有空間分解したとき, j に対応する空間の次元となる.

ここで Bose–Mesner 代数 $\mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ 上の線型汎関数 $\varphi_Z : \mathfrak{A}_{\mathfrak{X}} \to \mathbb{C}$ を

$$\varphi_Z(A) := \mathrm{trace}(A|_{\mathbb{C}^Z}) \in \mathbb{C} \quad \text{for each } A \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$$

として定義する. ただし各 $A \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ について $A|_{\mathbb{C}^Z} \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^Z)$ は A の $\mathbb{C}^Z$ への作用を表し, $\mathrm{trace}(A|_{\mathbb{C}_{\mathbb{Z}}})$ はベクトル空間 $\mathbb{C}^Z$ 上の線型作用素としての跡を表すものとする.

このとき以下のことが成り立つ:

Theorem 2.13. $\varphi_Z \in \mathfrak{A}^\vee_{\mathfrak{X}}$ は非負かつ有限であり $\mathrm{vol}\,\varphi_Y = 1/|Z|$ となる (用語については *Section 1.3* 参照). さらに $w^Z_{\mathcal{I}} = w^{\varphi_Z}_{\mathcal{I}}$ かつ $w^Z_{\mathcal{J}} = w^{\varphi_Z}_{\mathcal{J}}$ が成り立つ.

この定理の証明はここでは省略する.

Theorem 2.13 により Section 1.3 の各命題を $w^Z_{\mathcal{I}}$ と $w^Z_{\mathcal{J}}$ に適用できることになる. まず Proposition 1.7 の帰結として次の基本的な定理が成り立つ:

Theorem 2.14. 上記の設定において, $P(w^Z_{\mathcal{J}}) = w^Z_{\mathcal{I}}$.

また Delsarte の線型計画法を定式化するため, 有限可換アソシエーションスキーム $\mathfrak{X} = (X, R)$ の equitable な商集合について "符号" と "デザイン" に相当する概念を以下のように定義する:

Definition 2.15. $\mathfrak{X} = (X, R)$ を有限可換アソシエーションスキームとし, Z を $\mathfrak{X} = (X, R)$ の *equitable* な商集合, $\pi : X \to Z$ を自然な全射とする.

- $\mathcal{I} \setminus \{i_0\}$ の部分集合 $\mathcal{S}$ について, Z が以下の条件を満たすとき, $\mathcal{S}$-ファイバー禁止であると呼ぶことにする.

  条件 ($\mathcal{S}$-ファイバー禁止): $R(x_1, x_2) \notin \mathcal{S}$ *if* $\pi(x_1) = \pi(x_2)$.

- $\mathcal{J}\setminus\{j_0\}$ の部分集合 $\mathcal{T}$ について, Z が以下の条件を満たすとき, $\mathcal{T}$-スペクトル禁止ということにする.

  条件 ($\mathcal{T}$-スペクトル禁止): $\dim(V_j \cap \pi^*(\mathbb{C}^Z)) = 0$ *for any* $j \in \mathcal{T}$.

$\mathcal{S} \subset \mathcal{I}\setminus\{i_0\}$ を固定すると, Z が $\mathcal{S}$-ファイバー禁止であることは $\operatorname{supp} w_{\mathcal{I}}^Z \subset \mathcal{I}\setminus\mathcal{S}$ となることと同値である. また $\mathcal{T} \subset \mathcal{J}\setminus\{j_0\}$ を固定すると, Z が $\mathcal{T}$-スペクトル禁止であることは $\operatorname{supp} w_{\mathcal{J}}^Z \subset \mathcal{J}\setminus\mathcal{T}$ となることと同値である. 特に $\mathcal{S} = \emptyset$ のときには $\mathfrak{X} = (X, R)$ の任意の equitable な商集合は $\mathcal{S}$-ファイバー禁止であり, $\mathcal{T} = \emptyset$ のときには $\mathfrak{X} = (X, R)$ の任意の equitable な商集合は $\mathcal{T}$-スペクトル禁止である.

Theorem 1.8 から以下の定理が成り立つ.

Theorem 2.16 (Delsarte's linear programming method for quotients)**.** $\mathfrak{X} = (X, R)$ を有限可換アソシエーションスキームとし, $\mathcal{S}$ を $\mathcal{I}\setminus\{i_0\}$ の部分集合, $\mathcal{T}$ を $\mathcal{J}\setminus\{j_0\}$ の部分集合として固定する. $\mathfrak{X} = (X, R)$ の *equitable* な商集合 Z が $\mathcal{S}$-ファイバー禁止かつ $\mathcal{T}$-スペクトル禁止であるとき, 以下が成り立つ:

$$
\begin{aligned}
|Z| &\in \{\frac{\sum_{j\in\mathcal{J}}(w_{\mathcal{J}})_j}{(w_{\mathcal{J}})_{j_0}} \mid w_{\mathcal{J}} \in \Omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S},\mathcal{T}}\} \\
&= \{\frac{|X|(w_{\mathcal{I}})_{i_0}}{\sum_{j\in\mathcal{J}}(w_{\mathcal{J}})_j} \mid w_{\mathcal{I}} \in \Omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{S},\mathcal{T}}\}.
\end{aligned}
$$

($\Omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S},\mathcal{T}} \subset \mathbb{C}^{\mathcal{J}}$, $\Omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{S},\mathcal{T}} \subset \mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ の定義は *Section 1.3* 参照.)

ここで $\Omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S},\mathcal{T}}, \Omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ は $\mathbb{C}_{\mathcal{J}}, \mathbb{C}_{\mathcal{I}}$ の convex cone であったから, $\{\frac{\sum_{j\in\mathcal{J}}(w_{\mathcal{J}})_j}{(w_{\mathcal{J}})_{j_0}} \mid w_{\mathcal{J}} \in \Omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S},\mathcal{T}}\}$ や $\{\frac{|X|(w_{\mathcal{I}})_{i_0}}{\sum_{j\in\mathcal{J}}(w_{\mathcal{J}})_j} \mid w_{\mathcal{I}} \in \Omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{S},\mathcal{T}}\}$ の最大値, 最小値を評価する問題はいわゆる線形計画問題となる. 従って線形計画問題のテクニックを用いてこれらの最大値, 最小値の評価を行えば, $\mathcal{S}$-ファイバー禁止かつ $\mathcal{T}$-スペクトル禁止となるような $\mathfrak{X}$ の equitable な商集合の濃度を評価することができる.

Remark 2.17. 「有限可換アソシエーションスキームの商に自然なアソシエーションスキーム構造が入るのはどのようなときか?」という問題も *Delsarte* 理論にとって重要である (例えば [4] など) が, 本稿では深入りしない.

Final remark. 有限アソシエーションスキームの定義 (Definition 1.1) において, X の有限性の仮定を外し, その替わりに以下の条件:

条件 (局所有限性): $|S_i(x)| < \infty$ for any $i \in \mathcal{I}$ and $x \in X$

を課して定義されたものを局所有限アソシエーションスキームとよぶことにする. 特に次数有限距離正則グラフは局所有限対称アソシエーションスキームとみなすことができる.

講演では東北大学の見村万佐人氏, 愛知教育大学の野崎寛氏との共同研究として, 有限正則一様超グラフのスペクトル幾何に関係する結果を次数有限な距離正則グラフの equitable な余有限商についての Delsarte 理論として紹介した. 特に講演中に紹介した結果は有限可換アソシエーションスキームの equitable な商についての Delsarte の線形計画法 (Theorem 2.16) と対応するものとなっており, 有限正則グラフについての野崎氏の結果 [6, Theorem 2] の部分的な一般化となっている. 詳細についてはまた別の機会に報告したい.

可換アソシエーションスキームの equitable な余有限商という枠組みについて, 局所有限アソシエーションスキームの他にも, Barg–Skriganov [2] により定義された頂点集合が測度空間であるような局所体積有限アソシエーションスキームというべきものや, 栗林–松尾 [5] により定義されたアソシエーションスキーモイドなどについて equitable な余有限商を定義すると, 豊富な組合せ論的対象を提供する可能性があると考えられる. 将来的な課題として, そのようなものについての Delsarte 理論の定式化を行いたい.

References

[1] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic combinatorics. I*, The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Menlo Park, CA (1984).

[2] A. Barg and M. Skriganov, *Association schemes on general measure spaces and zero-dimensional Abelian groups*, Adv. Math. **281** (2015), 142–247.

[3] P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. (1973), 97 pp.

[4] C. D. Godsil and W. J. Martin, *Quotients of association schemes*, J. Combin. Theory Ser. A **69** (1995), 185–199.

[5] K. Kuribayashi and K. Matsuo, *Association schemoids and their categories*, Appl. Categ. Structures **23** (2015), 107–136.

[6] H. Nozaki, *Linear Programming Bounds for Regular Graphs*, Graphs Combin. **31** (2015), 1973–1984.

Classification of vertex operator algebras of class $\mathcal{S}^4$ with minimal conformal weight one

島倉 裕樹 (Hiroki Shimakura)

東北大学大学院情報科学研究科
純粋・応用数学研究センター
Research Center for Pure and Applied Mathematics,
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University
e-mail: shimakura@m.tohoku.ac.jp

本稿では松尾氏, 丸岡氏との共同研究 [MMS] について解説する.

1 序

[Ma01] において, ある種の仮定を満たす最小共形重み[1]が 2 の頂点作用素代数 (VOA) に対して, グライス代数上の跡公式が与えられている. この仮定を満たすための十分条件の一つが $\mathcal{S}^n$ 級である. また, 跡公式から VOA の中心電荷とグライス代数の次元に関する制限が得られる. 例えば, 次の定理が得られている.

定理 1.1. [Ma01, Corollary 3.1] $V=\bigoplus_{i=0}^{\infty}V_i$ を $\mathcal{S}^8$ 級の最小共形重み 2 の中心電荷 c の VOA とする. invariant bilinear form が positive-definite となるような V の $\mathbb{R}$-form $V_{\mathbb{R}}$ が存在するとする. このとき, $c=24$ かつ $\dim V_2=196884$ である.

ムーンシャイン VOA $V^\natural$ はこの定理の仮定を満たしている. 逆にこの仮定が $V^\natural$ を特徴付けると思われる.[2]

さて, 少し一般の $\mathcal{S}^n$ 級の VOA の分類問題が考えてみよう. 例えば, 最小共形重みが 2 の $\mathcal{S}^6$ 級の VOA に対しても, 中心電荷とグライス代数の次元の間の関係式が得られ, それを満たす組が [Ma01] で与えられている. 本研究では [Ma01] の手法を用いて $V_1\neq 0$, すなわち最小共形重みが 1, の場合を考察した. そして, 次の結果を得ることが出来た.

結果 1.2. V を最小共形重みが 1 の CFT 型の VOA とする[3].

[1] $V=\bigoplus_{i=0}^{\infty}V_i$ の最小共形重みとは $\min\{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\mid V_i\neq (V_\omega)_i\}$. ただし V_ω は共形元 ω が生成する部分 VOA である. したがって, 最小共形重みが 2 であるとは, $V_0=\mathbb{C}\mathbf{1}$, $V_1=0$, $\dim V_2>1$ と同値である.

[2] まだ未解決である. おおよそ, 最小共形重みが 2 の $\mathcal{S}^8$ 級の VOA の分類問題である.

[3] invariant form が non-degenerate もしくは V が 単純の仮定がいる. さらに (2) においては中心電荷 c の例外的な値を排除し, C_2-条件を仮定している.

(1) V が $\mathcal{S}^4$ 級の場合に, リー代数 V_1 における adjoint 表現の跡公式を与えた.

(2) V が $\mathcal{S}^4$ 級の場合に, V が $A_1, A_2, G_2, D_4, F_4, E_6, E_7, E_8$ のいずれかの型の単純リー代数に付随するレベル 1 の単純アファイン VOA に同型になる.

(3) (2) で挙げた VOA は実際に $\mathcal{S}^4$ 級となる.

注意 1.3.

- (2) は [Tu09] で得られている. ただし, 本研究の証明とは異なる.
- (2) で挙げられた単純リー代数は Deligne の例外リー代数と呼ばれているものである.
- 最小共形重みが 1 の $\mathcal{S}^6$ 級の VOA の分類は [Hö08] で行われており, A_1, E_8 型の単純リー代数に付随するレベル 1 の単純アファイン VOA だけである.[4]

2 $\mathcal{S}^n$ 級の VOA

まずは $\mathcal{S}^n$ 級の定義を思いだそう.

定義 2.1. [Ma01] V が $\mathcal{S}^n$ **級** であるとは, $m \leq n$ に対して $(V^{\mathrm{Aut}V})_m = (V_\omega)_m$ が成り立つことである. ただし, $V^{\mathrm{Aut}V}$ は V の $\mathrm{Aut}V$ で固定されるベクトルがなす部分 VOA である.

自己同型群がわかっているいくつかの VOA については, $\mathcal{S}^n$ 級が確かめられている.

例 2.2.

- $V^\natural$ は $\mathcal{S}^{11}$ 級である.
- $VB^\natural$ は $\mathcal{S}^7$ 級である ([Hö08]).
- $V^+_{\mathrm{BW}_{16}}$ と $V^+_{\sqrt{2}E_8}$ は $\mathcal{S}^7$ 級である ([HS]).
- $V^+_{\sqrt{2}D_4}$ は $\mathcal{S}^5$ 級である ([HS]).

さらに, V_L^+ の自己同型群の研究 [Sh04] を用いて次が示されている.

定理 2.3. [HS] L をルートを持たない偶格子とする.[5] このとき, V_L^+ が $\mathcal{S}^4$ 級となるための必要十分条件は L が $2A_1$, $\sqrt{2}D_4$, $\sqrt{2}E_8$ または BW_{16} に同型となることである.

さて, $\mathcal{S}^n$ 級から導かれる性質として次がある.

定理 2.4. [Ma01] V を最小共形重みが 2 の $\mathcal{S}^n$ 級の VOA とする. さらに, V は非退化な invariant form を持つとする.

---

[4] これらは A_1, E_8 のルート格子に付随する格子 VOA と同型

[5] V_L^+ の最小共形重みが 2 となるための必要十分条件である.

(1) $\{x^i\}$ を V_2 の基底とし, $\{x_i\}$ を (invariant form に関する) 双対基底とする. $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\kappa_m = \sum_{i=1}^{\dim V_2} x^i_{(3-m)} x_i$ と置く. このとき, $m \leq n$ ならば

$$\kappa_m \in (V_\omega)_m.$$

(2) $|\mathrm{Aut}V| < \infty$ とする. また, $\pi : V \to V_\omega$ を V の V_ω-加群としての分解に関する射影とし, $v \in V_s$ に対して, $o(v) = v_{(s-1)} \in \mathrm{End}\,(V_k)$ と置く. このとき, 任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\mathrm{Tr}_{V_k}\, o(v) = \mathrm{Tr}_{V_k}\, o(\pi(v)) \qquad \text{for all } v \in V_{\leq n}. \tag{2.1}$$

実際には (1) または (2) のいずれかの性質から跡公式を導くことが出来る.

注意 2.5.

- (1) において, V_2 を最小共形重みの空間に置き換えた性質を満たす VOA の研究が Tuite らによって行われている. ([Tu07, Tu09, TV14])
- (もう少し一般的な設定[6]で) (2.1) が「V_k が conformal n-design」の定義である ([Hö08]).
- (1) と V_2 が conformal n-design であることは (おおよそ[7]) 同値である [Ya14].

3 V_1 の跡公式

ここから VOA V は $V_1 \neq 0$ を満たす, すなわち最小共形重みが 1, とする. さらに, V は非退化な invariant form を持つとする. このとき, $a, b \in V_1$ に対して, $[a, b] = a_{(0)}b$ によって V_1 にリー代数構造が入り, $(a|b)\mathbf{1} = -a_{(1)}b$ によって V_1 上の invariant form $(\cdot|\cdot)$ が与えられる. $\{x_i\}$ を V_1 の基底とし, $\{x^i\}$ を ($(\cdot|\cdot)$ に関する) 双対基底とする. このとき, i-次カシミール元を

$$\kappa_i = \sum_{j=1}^{d} x^j_{(1-i)} x_j \in V_i.$$

で定義する. すると, V が $\mathcal{S}^n$ 級ならば $\kappa_i \in (V_\omega)_i$ である.

さて、丸岡氏の修士論文 ([Mar03]) で得られた 4 次の跡公式は次の通りである.[8]

定理 3.1. V の中心電荷 c は $c \neq 0, -22/5$ を満たし $\kappa_4 \in (V_\omega)_4$ とする. $a_1, a_2, a_3, a_4 \in V_1$ に対して, 次が成立する.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}_{V^1}\ a_{1(0)}a_{2(0)}a_{3(0)}a_{4(0)} \\
=&\Big(1 + \frac{3d(c-2)}{c(22+5c)}\Big)(a_{1(0)}a_2|a_{3(0)}a_4) + \Big(2 - \frac{24d}{c(22+5c)}\Big)(a_{1(0)}a_4|a_{2(0)}a_3) \\
&+ \frac{24d}{c(22+5c)}\Big((a_1|a_2)(a_3|a_4) + (a_1|a_3)(a_2|a_4) + (a_1|a_4)(a_2|a_3)\Big).
\end{aligned}$$

[6] 例えば, 最小共形重みに関する仮定は不要である. また自己同型群の有限性は不要である.

[7] 同値性を証明するために, いくつかの細かな仮定は必要である.

[8] 2 次と 3 次の公式も [MMS, Tu07] では得られているが, ここでは省略をする.

この証明は次の手順で行う．

$$\mathrm{Tr}_{V^1}\ a_{1(0)}a_{2(0)}a_{3(0)}a_{4(0)} = \sum_{i=1}^{d}(a_{1(0)}a_{2(0)}a_{3(0)}a_{4(0)}x^i|x_i)$$

の右辺をカシミール元 κ_i が現れる様に式変形をする．主に用いるのは Borcherds 恒等式から導かれる一種の交換関係と内積の不変性である．すると，$(V_\omega)_k$ $(k \leq 4)$ の生成系を見ることで，κ_k $(k \leq 4)$ が具体的に記述され，求める形が得られる．詳細は [MMS] の Appendix A を参照されたい．[9]

4 最小共形重みが 1 の $\mathcal{S}^4$ 級の VOA の分類

前章の応用として最小共形重みが 1 の $\mathcal{S}^4$ 級の VOA の分類を行った。おおまかな手順は次の通りである．

Step 1 中心電荷 c と $d = \dim V_1$ の組の可能性を求める．

跡公式の cyclic property から定理 3.1 の最初の二つの項の係数の間の関係が得られ，c と d に関する関係式を得る．[10] 仮定から $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ である．さらに C_2-条件から V_1 の各単純イデアルのアファイン表現のレベルが正とわかる ([DM06])．そして [DM04b] で得られたレベルと双対コクセター数に関する等式を用いることで，c が正の有理数と分かる．これらの条件を満たす (c, d) の組は 21 通りである．

Step 2 V_1 は Deligne の例外型リー代数であり，アファイン表現のレベルは 1.

与えられた双対コクセター数をもつ単純リー代数の可能性を見ることで，(c, d) の候補である 21 組のうち，実際に半単純リー代数[11] で実現可能であるのは 8 通りとわかる．この 8 通りの値と単純リー代数の分類を見比べることで，V_1 は A_1, A_2, G_2, D_4, F_4, E_6, E_7, E_8 型の単純リー代数のいずれかと同型であり，レベルが 1 ととわかる．

Step 3 V がレベル 1 の単純アファイン VOA.

Step 2 から，V_1 で生成される部分 VA U はレベルが 1 の単純アファイン VOA で，full subVOA となる．ここで，アファイン VOA の表現論 ([FZ92]) から，U は有理的であり，U と V の共形元は一致しているので，V は U-加群の直和となる．さらに U の既約加群の具体的な記述から，$V_0 = U_0$ と $V_1 = U_1$ から $V = U$ がわかる．

[9] [MMS] の Appendix B には conformal 4-design の設定下での証明がある．実際には V_1 が conformal 4-design であることと，$\kappa_4 \in V_\omega$ は同値である．(cf. [Ya14])

[10] [Tu09] でも同じ関係式が別の方法で得られている．

[11] 2 次の跡公式と Killing form との関係，特殊な c の値を除いて考えていることから，V_1 は半単純となる．

Step 4 Deligne の例外型リー代数に付随するレベル 1 の単純アファイン VOA は $\mathcal{S}^4$ 級.

まずは内部自己同型群による固定点の指標が [KP84] で与えられていることに注意する. そして, この指標の計算は ADE-型の場合には具体的に行われており ([BT99]), 特に A_1, E_6, E_7, E_8 の場合については $\mathcal{S}^4$ 級であることがわかる. A_2, D_4 の場合はレベル 1 の単純アファイン VOA がルート格子に付随する VOA となる. すると, 格子の自己同型の持ち上げを使うことができ, $\mathcal{S}^4$ 級であることがわかる. ポイントとなるのは, 内部自己同型に属さない Dynkin diagram 自己同型の持ち上げを考察することである. 最後に G_2, F_4 の場合は [KP84] の公式に適用して (頑張って) 指標の最初のいくつかの項の係数を求め, $\mathcal{S}^4$ 級であることを確かめる.

証明の詳細は [MMS] を参考にされたい.

5 今後の課題

[MMS] において最小共形重みが 1 の $\mathcal{S}^4$ 級の VOA の分類が完成したが, その証明においてはリー代数及びアファインリー代数の既存の理論が大きな役割を果たしている.

次に考えるべき問題は, 最小共形重みが 2 の $\mathcal{S}^n$ 級の VOA の分類問題であるが, グライス代数についての理解が乏しい現状では難しいと思われる. ただ、ムーンシャイン VOA の新たな特徴付けを与える可能性も大きいことから, 挑戦してみる価値のある問題であると思う.

参考文献

[BT99] A. Baker and H. Tamanoi, Invariants for finite dimensional groups in vertex operator algebras associated to basic representations of affine algebras, *in* Proceedings on Moonshine and related topics (Montreal, QC, 1999), 1–13, *CRM Proc. Lecture Notes* **30**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[DM04b] C. Dong and G. Mason, Rational vertex operator algebras and the effective central charge, *Int. Math. Res. Not.* **56** (2004), 2989-3008.

[DM06] C. Dong and G. Mason, Integrability of C_2-cofinite vertex operator algebras. *Int. Math. Res. Not.* (2006), Art. ID 80468, 15 pp.

[FZ92] I.B. Frenkel and Y. Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras, *Duke Math. J.* **66** (1992), 123–168.

[HS] T. Hashikawa and H. Shimakura, Classification of vertex operator algebra V_L^+ of class $\mathcal{S}^4$, preprint, submitted.

[Hö08] G. Höhn, Conformal designs based on vertex operator algebras, *Adv. Math.* **217** (2008), 2301–2335.

[KP84] V.G. Kac and D.H. Peterson, Infinite-dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms, *Adv. Math.* **53** (1984), 125–264

[Mar03] H. Maruoka, Quartic trace formula for adjoint representations of simple Lie algebras of ADE-type, master thesis, the University of Tokyo, 2003.

[MMS] H. Maruoka, A. Matsuo and H. Shimakura, Classification of vertex operator algebras of class $\mathcal{S}^4$ with minimal conformal weight one, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[Ma01] A. Matsuo, Norton's trace formulae for the Griess algebra of a vertex operator algebra with larger symmetry, *Comm. Math. Phys.* **224**, (2001) 565–591.

[Sh04] H. Shimakura, The automorphism group of the vertex operator algebra V_L^+ for an even lattice L without roots, *J. Algebra* **280** (2004), 29–57.

[Tu07] M.P. Tuite, The Virasoro algebra and some exceptional Lie and finite groups, *SIGMA. Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* **3** (2007), Paper 008, 13 pp.

[Tu09] M.P. Tuite, Exceptional vertex operator algebras and the Virasoro algebra, *in* Vertex operator algebras and related areas, 213–225, *Contemp. Math.*, **497**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[TV14] M.P. Tuite and H.D. Van, On exceptional vertex operator (super) algebras, *in* Developments and Retrospectives in Lie Theory: Algebraic Methods, 351–384, *Developments in Mathematics*, **38**, Springer, New York, 2014.

[Ya14] H. Yamauchi, Extended Griess algebras and Matsuo-Norton trace formulae, *in* Conformal Field Theory, Automorphic Forms and Related Topics, 75–107, *Contrib. Math. Comput. Sci.* **8**, Springer, Heidelberg, 2014.

頂点代数の intertwining operator の一般化について

田辺顕一朗 (北海道大学大学院理学研究院数学部門)

e-mail : ktanabe@math.sci.hokudai.ac.jp

1 準備

頂点代数 V とは，物理における共形場理論の代数的定式化を目的の一つとして 1986 年に Borcherds[4] によって導入された可換環的な性質を持つ代数系である．簡単にいうと，頂点代数とは $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V と線形写像

$$\begin{array}{cccc} Y(\ ,x): & V\otimes_{\mathbb{C}} V & \longrightarrow & V(\!(x)\!) \\ & \cup & & \cup \\ & a\otimes b & \longmapsto & Y(a,x)b=\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i b x^{-i-1} \end{array}$$

の組であっていくつかの条件を満たすものである (Y は V 上の "積" である)．ここで x は形式的変数で $V(\!(x)\!)=\{\sum_{i\in\mathbb{Z}} v_{(i)}x^i \mid v_{(i)}\in V, v_{(i)}=0\ (i\ll 0)\}$ である．頂点代数 V に対して Virasoro 元 ω の存在を仮定し，いくつかの条件を追加したものを頂点作用素代数 (cf. [5],[7]) という．ω の展開を $Y(\omega,x)=\sum_{i\in\mathbb{Z}} L(i)x^{-i-2}$ と書いておく．$L(0), L(-1)$ を後でよく使う．

以下 V は頂点作用素代数とする．V は代数系であるから V 加群がしかるべく定義される．この原稿では，(通常の)V 加群に対して定義されていた intertwining operator : $W^1\otimes_{\mathbb{C}} W^2\to W^3\{x\}$ ($W^i, i=1,2,3$ は V 加群) を，$\mathbb{N}$ 次数付き弱 V 加群に対して拡張することをおこなう．intertwining operator とは何かを簡単に説明すると，通常の可換環 R において，3 つの R 加群 X,Y,Z に対して定義される R 双線形 (R 平衡) 写像 $\rho : X\times Y\to Z$ ($\rho(rx,y)=(x,ry), r\in R, x\in X, y\in Y$) の，頂点作用素代数における類似対象である．

次に V 上の加群を紹介するが，いくつかの種類がある．

定義 1.1. 次の条件を全て満たす組 (M, Y_M) を弱 V 加群という．

(1) M は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間.

(2) $$\begin{array}{cccc} Y_M(\ ,x): & V\otimes_{\mathbb{C}} M & \longrightarrow & M(\!(x)\!) \\ & \cup & & \cup \\ & a\otimes u & \longmapsto & Y_M(a,x)u=\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i u x^{-i-1} \end{array}$$ は $\mathbb{C}$ 線形写像.

(3) $Y_M(\mathbf{1},x)=\mathrm{id}_M$.

(4) $a,b \in V, u \in M$ に対して，$Y_M(a,b,u|x,y) \in M[[x,y]][x^{-1},y^{-1},(x-y)^{-1}]$ が存在して

$$\iota_{x,y}Y_M(a,b,u|x,y) = Y_M(a,x)Y_M(b,y)u \in M((x))((y)),$$
$$\iota_{y,x}Y_M(a,b,u|x,y) = Y_M(b,y)Y_M(a,x)u \in M((y))((x)),$$
$$\iota_{y,x-y}Y_M(a,b,u|x,y) = Y_M(Y(a,x-y)b,y)u \in M((y))((x-y))$$

となる．

ここで $\iota_{x,y}f$ は，f を $|x| > |y|$ と思って形式的に展開したものである．$\iota_{y,x}, \iota_{x,y-x}$ も同様に定める．例えば $k \in \mathbb{Z}$ として

$$\iota_{x,y}(x-y)^k = \sum_{p=0}^{\infty}\binom{k}{p}(-1)^p x^{k-p}y^p \in \mathbb{C}((x))((y)),$$
$$\iota_{y,x}(x-y)^k = \sum_{p=0}^{\infty}\binom{k}{p}(-1)^{k-p}y^{k-p}x^p \in \mathbb{C}((y))((x)),$$
$$\iota_{x,y-x}y^k (= \iota_{x,y-x}(x+(y-x))^k) = \sum_{p=0}^{\infty}\binom{k}{p}x^{k-p}(y-x)^p$$

となる．$u \in M$ に対しては $\iota_{x,y}(u) = u$ とする．

定義 1.2. M を弱 V 加群とする．M が次数付きベクトル空間 $M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M(i)$ で，斉次元 $a \in V$ に対して

$$a_i M(j) \subset M(j + \mathrm{wt}\, a - i - 1)$$

を満たすとき，M を $\mathbb{N}$ **次数付き弱** V **加群**であるという．

定義 1.3. M を弱 V 加群とする．M が $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{C}} M_i, M_i = \{u \in M \mid L(0)u = iu\}$ と $L(0)$ の固有空間に分解し

(1) 任意の $i \in \mathbb{C}$ に対して $\dim_{\mathbb{C}} M_i < \infty$ である．

(2) 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$M_{\lambda+r} = 0, \mathbb{R} \ni r \ll 0$ となっている．

とき，M を (通常の)V **加群**という．

同値類 $\alpha + \mathbb{Z} \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ を $[\alpha]$ と書くことにする．V 加群 M に対して，$M_{[\alpha]} = \bigoplus_{\beta \in \alpha+\mathbb{Z}} M_\beta$ は M の部分加群であり，V 加群としての直和 $M = \bigoplus_{[\alpha] \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}} M_{[\alpha]}$ が成り立つ．$M_{[\alpha]} \neq 0$ なる各 $[\alpha] \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ に対して，定義 1.3 (2) より $M_\beta \neq 0$, $M_{\beta-j} = 0, 0 < {}^\forall j \in \mathbb{Z}$ となる β が存在する．$[\alpha]$ の代表元としてそのようなものを取るように約束しておけば，$M = \bigoplus_{[\alpha] \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}} \bigoplus_{j=0}^{\infty} M_{\alpha+j} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \bigoplus_{[\alpha] \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}} M_{\alpha+j}$ と書くことが出来る．したがって上の 3 種類の加群の関係は

$$(V\text{ 加群})\subset(\mathbb{N}\text{ 次数付き弱 }V\text{ 加群})\subset(\text{弱 }V\text{ 加群})$$

となっている．

次に頂点作用素代数の intertwining operator について説明する．最初にも述べたが，通常の可換環 R において，3 つの R 加群 X, Y, Z に対して定義される R 双線形 (R 平衡) 写像 $\rho : X\times Y\to Z$ ($\rho(rx,y)=(x,ry), r\in R, x\in X, y\in Y$) の，頂点作用素代数における類似が intertwining operator である．ただし，可換環 R においては，R 双線形写像に関連してテンソル積 $X\otimes_R Y$ を考えることが出来るが，頂点作用素代数においては加群のテンソル積の存在は一般には保証されていないことを注意しておく．ベクトル空間 U に対して

$$\begin{aligned}
U\{x\} &= \{\sum_{i\in\mathbb{C}} u_{(i)}x^i \mid u_{(i)}\in U,\},\\
U\lfloor\{x\}\rfloor &= \{\sum_{i\in\mathbb{C}} u_{(i)}x^i \mid u_{(i)}\in U, \text{各 }\lambda\in\mathbb{C}\text{ に対して }u_{(\lambda+j)}=0, \mathbb{Z}\ni j\ll 0\},\\
U\lfloor\{x,y\}\rfloor &= \{\sum_{i,j\in\mathbb{C}} u_{(i,j)}x^i y^j \mid u_{(i,j)}\in U, \text{各 }\lambda,\mu\in\mathbb{C}\text{ に対して }u_{(\lambda+k,\mu+k)}=0, \mathbb{Z}\ni k\ll 0\}
\end{aligned}$$

と記号を準備する．次は頂点作用素代数の通常の加群に対する intertwining operator の正確な定義である．

定義 1.4. W^1, W^2, W^3 を (通常の)V 加群とする．次の条件を全て満たす $\mathbb{C}$ 線形写像 $I(,x) : W^1\otimes_{\mathbb{C}} W^2\to W^3\lfloor\{x\}\rfloor$ を **intertwining operator** という．

(1) $a\in V, u\in W^1, v\in W^2$ に対して，$I(a,u,v|x,y)\in W^3\lfloor\{x,y\}\rfloor[(x-y)^{-1}]$ が存在して

$$\begin{aligned}
\iota_{y,x}I(a,u,v|x,y) &= Y_{W^3}(a,y)I(u,x)v\in W^3(\!(y)\!)\lfloor\{x\}\rfloor,\\
\iota_{x,y}I(a,u,v|x,y) &= I(u,x)Y_{W^2}(a,y)v\in W^3\lfloor\{x\}\rfloor(\!(y)\!),\\
\iota_{x,y-x}I(a,u,v|x,y) &= I(Y_{W^1}(a,y-x)u,x)v\in W^3\lfloor\{x\}\rfloor(\!(y-x)\!)
\end{aligned}$$

となる．

(2) ($L(-1)$ 微分性) $u\in W^1$ に対して $\dfrac{d}{dx}I(u,x)=I(L(-1)u,x)$.

intertwining operator $I(u,x)v$ の展開を

$$I(u,x)v=\sum_{i\in\mathbb{C}} u_i v x^{-i-1}=\sum_{i\in\mathbb{C}} I_i(u\otimes v)x^{-i-1}$$

と書く．$I_i(u\otimes v)$ は一般的な記号ではないが，以降でよく使う．定義 1.4 (1) は Borcherds 恒等式と呼ばれる次の条件と同値である: $a\in V, u\in W^1, n\in\mathbb{C}, l,m\in\mathbb{Z}$ に対して

$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{m}{i}(a_{l+i}u)_{m+n-i}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{l}{i}\Big(a_{m+l-i}u_{n+i}+(-1)^{l+1}u_{n+l-i}a_{m+i}\Big)$$

が成り立つ．

Remark 1.5. M を弱 V 加群としたとき，$Y_M(u,x)a = e^{xL(-1)}Y_M(a,-x)u, u \in M, a \in V$, と定めておく．このとき，定義 1.4 (2) は，条件

$$\iota_{y,x-y}I(a,u,v|x,y) = I(Y_{W^1}(u,x-y)a,y)v \in W^3\lfloor\{y\}\rfloor((x-y)) \tag{1.1}$$

に置き換えることが出来る．したがって intertwining operator を，$I(a,u,v|x,y)$ の展開 (定義 1.4 (1) と (1.1)) によって定義することが出来る．

$L(0)$ 加群 W^1, W^2, W^3 に対して，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W^1 \otimes_{\mathbb{C}} W^2, W^3)$ は次の作用で自然に $L(0)$ 加群となる：線形写像 $f : W^1 \otimes_{\mathbb{C}} W^2 \to W^3$ に対して $(L(0)\cdot f) : W^1 \otimes_{\mathbb{C}} W^2 \to W^3$ を

$$(L(0)\cdot f)(u\otimes v) = L(0)f(u\otimes v) - f((L(0)u)\otimes v) - f(u \otimes L(0)v), \quad u \in W^1, v \in W^2 \tag{1.2}$$

と定める．同様に $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W^1 \otimes_{\mathbb{C}} W^2, W^3\lfloor\{x\}\rfloor)$ 上にも $L(0)$ の作用を定める．

Remark 1.6. (1.2) を用いて定義 1.4 の (2) を以下のように書き換えておく．Borcherds 恒等式

$$xI(L(-1)u,x) = L(0)I(u,x) - I(L(0)u,x) - I(u,x)L(0), \quad u \in W^1$$

と (1.2) より，定義 1.4 の (2) は

$$\begin{aligned} &x\frac{d}{dx}I(\ ,x) = (L(0)\cdot I)(\ ,x) \quad \text{あるいは展開系数で書いて} \\ &(-i-1)I_i = L(0)\cdot I_i,\ i \in \mathbb{C} \end{aligned} \tag{1.3}$$

と書くことが出来る．つまり，$I_i \neq 0$ なる各 I_i は $L(0)$ の固有ベクトルである．

$W^i = \bigoplus_{j=0}^{\infty} W^i_{\lambda_i+j}$，$\lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1,2,3$ を V 加群で，各斉次空間 $W^i_{\lambda_i+j}$ は，$L(0)$ の固有値 $\lambda_i + j$ に関する固有空間になっているとする．このとき，(1.3) の左右の展開系数を較べることにより $I(u,x)v = \sum_{i\in\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3+\mathbb{Z}} u_i v x^{-i-1}$ と添え字 i の動く範囲が制限されることが分かる．

$x^{L(0)}$ を形式的変数とし，$L(0)w = \lambda w, \lambda \in \mathbb{C}$ となる $w \in W^i$ に対して $x^{L(0)}w = x^{\lambda}w$ と定める．$u \in W^1_{\lambda_1+j}, v \in W^2_{\lambda_2+k}$ とすると

$$\begin{aligned} I(u,x)v &= \sum_{i\in\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3+\mathbb{Z}} u_i v x^{-i-1} \\ &= \sum_{i\in\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3+\mathbb{Z}} x^{-i+\lambda_1+j+\lambda_2+k-1}(x^{-\lambda_1-j}u)_i(x^{-\lambda_2-k}v) \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} x^{\lambda_3+j+k-l-1}(x^{-\lambda_1-j}u)_{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3+l}(x^{-\lambda_2-k}v) \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} x^{L(0)}(x^{-L(0)}u)_{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3+l}(x^{-L(0)}v) \end{aligned} \tag{1.4}$$

と書くことが出来る．

$u \in W^1_{\lambda_1+j}$ $(j=0,1,\ldots), v \in W^2_{\lambda_2}$ に対して，$o_I(u \otimes v) := u_{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3+j-1} v \in W^3_{\lambda_3}$ とおく．線形性を用いて o_I を $W^1 \otimes_{\mathbb{C}} W^2_{\lambda_2}$ 全体に拡張した写像を再度 $o_I : W^1 \otimes_{\mathbb{C}} W^2_{\lambda_2} \to W^3_{\lambda_3}$ と書く．$I(\ ,x) \mapsto o_I$ は intertwining operator : $W^1 \otimes_{\mathbb{C}} W^2 \to W^3[\{x\}]$ の全体から $\mathrm{Hom}_{A(V)}(A(W^1) \otimes_{A(V)} W^2_{\lambda_2}, W^3_{\lambda_3})$ への写像を与える：

$$\begin{pmatrix} \text{intertwining operator} \\ : W^1 \otimes_{\mathbb{C}} W^2 \to W^3[\{x\}] \text{ の全体} \end{pmatrix} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A(V)}(A(W^1) \otimes_{A(V)} W^2_{\lambda_2}, W^3_{\lambda_3}) \quad (1.5)$$
$$\begin{array}{ccc} \Psi & & \Psi \\ I(\ ,x) & \longmapsto & o_I \end{array}$$

ここで $A(V)$ は V の **Zhu 代数** [13]，$A(M)$ は $\mathbb{N}$ 次数付き弱 V 加群 M に付随する両側 $A(V)$ 加群 [6] である．

2 $\mathbb{N}$ 次数付き intertwining operator

一般の弱 V 加群 W^1, W^2, W^3 に対して intertwining operator $I(,x)$ を，定義 1.4 の条件を満たすものとして定義することは可能である．しかし条件式 (1.4) は，W^1, W^2, W^3 が半単純 $L(0)$ 加群とは限らないにもかかわらず，各 I_i に $L(0)$ がスカラーで作用しているという，強い条件になっている．また，後で紹介する intertwining operator 全体のなす空間の次元に関する結果 (定理 2.4) の拡張は期待できない．これらの点を考慮して intertwining operator の定義の条件を適切に緩めることを以下で考える．

一般の弱 V 加群に対して intertwining operator をどう定義するかという問題は，非常に難しいと思われるので，以降は $\mathbb{N}$ 次数付き弱 V 加群に限定して考えていくことにする．$\mathbb{N}$ 次数付き弱 V 加群で各斉次空間が有限次元の場合には，2002 年に Milas[9] により，物理における対数的共型場理論を背景として intertwining operator の拡張である対数的 intertwining operator が導入された．対数的 intertwining operator とは intertwining operator の定義において，他の条件はそのままで $I(\ ,x)$ に対数項を許したものである：

$$I(\ ,x) : W^1 \otimes_{\mathbb{C}} W^2 \to W^3[\log x][\{x\}].$$

ここでは，斉次空間が有限次元とは限らない一般の $\mathbb{N}$ 次数付き弱 V 加群に対して intertwining operator を次で定める．これは，(対数的)intertwining operator と見かけが少し異なるが，下の Remark 2.3 で説明するように対数的 intertwining operator を拡張したものになっている．

定義 2.1. W^1, W^2, W^3 を $\mathbb{N}$ 次数付き弱 V 加群とする．次の条件を全て満たす $\mathbb{C}$ 線形写像 $\Phi(\ ,x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Phi(\ ;i) x^{-i-1} : W^1 \otimes_{\mathbb{C}} W^2 \to W^3((x))$ を $\mathbb{N}$ **次数付き intertwining operator** という．

(1) $u \in W^1(i), v \in W^2(j), k \in \mathbb{Z}$ に対して $\Phi(u;k)v \in W^3(i+j-k-1)$.

(2) $a \in V, u \in W^1, v \in W^2$ に対して，$\Phi(a,u,v|x,y) \in W^3[[x,y]][x^{-1},y^{-1},(x-y)^{-1}]$ が存在して

$$\begin{aligned}\iota_{y,x}\Phi(a,u,v|x,y) &= Y_{W^3}(a,y)\Phi(u,x)v \in W^3((y))((x)),\\ \iota_{x,y}\Phi(a,u,v|x,y) &= \Phi(u,x)Y_{W^2}(a,y)v \in W^3((x))((y)),\\ \iota_{x,y-x}\Phi(a,u,v|x,y) &= \Phi(Y_{W^1}(a,y-x)u,x)v \in W^3((x))((y-x))\end{aligned}$$

となる．

Remark 2.2. $\mathbb{N}$ 次数付き intertwining operator の定義 2.1 では，定義 1.4 の条件 (2) の「$L(-1)$ 微分性」は仮定していない．このことから intertwining operator の各展開系数が $L(0)$ の固有ベクトルであるという強い条件 (1.3) を外すことが出来ている．実は $L(-1)$ 微分性は，x のべきがスカラーであること ($x^{(\text{スカラー})}$) を緩めて形式的変数 $x^{\pm L(0)}$ まで許してしまえば，次のように $\mathbb{N}$ 次数付き intertwining operator を調整していつでも成り立つようにすることが出来る．逆にいうと，$\mathbb{N}$ 次数付き intertwining operator (を調整したもの) において $L(0)$ の作用が半単純であるときには，$x^{L(0)}$ が $x^{(\text{スカラー})}$ になって通常の intertwining operator が出てくるとみなすことが出来る．形式的変数 $x^{L(0)}$ を基底とする 1 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}x^{L(0)}$ を考え，弱 V 加群 M に対して $x^{L(0)}M := \mathbb{C}x^{L(0)} \otimes_{\mathbb{C}} M$ とおき，$x^{L(0)} \otimes u \in x^{L(0)}M,\ u \in M,$ を $x^{L(0)}u$ と書くことにする．$x^{-L(0)}M$ も同様に定めておく．$x\dfrac{d}{dx}$ の $x^{L(0)}M$ 上への作用を

$$x\frac{d}{dx}(x^{\pm L(0)}u) := x^{L(0)}(\pm L(0))u,\ u \in M$$

で定める．各 $i \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{array}{ccc}\hat{\Phi}_i : x^{-L(0)}W^1 \otimes_{\mathbb{C}} x^{-L(0)}W^2 & \longrightarrow & x^{L(0)}W^3\\ \cup & & \cup\\ x^{-L(0)}u \otimes x^{-L(0)}v & \longmapsto & x^{L(0)}\Phi(u;i)v\end{array}$$

とおく．$x\frac{d}{dx}$ は $x^{\pm L(0)}W^i, i=1,2,3$ に作用しているから，$\hat{\Phi}_i$ に

$$\begin{aligned}&(x\frac{d}{dx}\cdot\hat{\Phi}_i)(x^{-L(0)}u \otimes x^{-L(0)}v)\\ &:= x\frac{d}{dx}(\hat{\Phi}_i(x^{-L(0)}u \otimes x^{-L(0)}v) + \hat{\Phi}_i((x\frac{d}{dx}x^{-L(0)}u) \otimes x^{-L(0)}v) + \hat{\Phi}_i(x^{-L(0)}u \otimes (x\frac{d}{dx}x^{-L(0)}v))\end{aligned}$$

と作用させることが出来る．Borcherds 恒等式より

$$\begin{aligned}&(x\frac{d}{dx}\cdot\hat{\Phi}_i)(x^{-L(0)}u \otimes x^{-L(0)}v)\\ &= x^{L(0)}L(0)\Phi(u;i)v - x^{L(0)}\Phi(L(0)u;i)v - x^{L(0)}\Phi(u;i)L(0)v\\ &= x^{L(0)}\Phi(L(-1)u;i+1)v\\ &= \hat{\Phi}_{i+1}(x^{L(0)}(L(-1)u) \otimes x^{L(0)}v)\end{aligned}$$

と $L(-1)$ 微分性が成立する．

Remark 2.3. logarithmic intertwining operator([9],[10]) と $\mathbb{N}$ 次数付き intertwining operator との関係を述べる．$W^i=\bigoplus_{j=0}^{\infty}W^i_{\lambda_i+j}$，$\lambda_i\in\mathbb{C}, i=1,2,3$ を $\mathbb{N}$ 次数付き弱 V 加群で，各斉次空間 $W^i_{\lambda_i+j}$ は，$L(0)$ の固有値 λ_i+j に関する一般固有空間になっているとする．

(1) $I(\ ,x)=\sum_{i=0}^{\infty}I^{(i)}(\ ,x)(\log x)^i, I^{(i)}:W^1\otimes_{\mathbb{C}}W^2\to W^3[\{x\}]$ を logarithmic intertwining operator とすると，$x^{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3}I^{(0)}(\ ,x)$ は $\mathbb{N}$ 次数付き intertwining operator となる．

(2) 逆に $\Phi(\ ,x)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\Phi(\ ;i)x^{-i-1}$ を $\mathbb{N}$ 次数付き intertwining operator とすると

$$\begin{array}{ccc} W^1\otimes_{\mathbb{C}}W^2 & \longrightarrow & W^3[\{x\}] \\ \Cup & & \Cup \\ u\otimes v & \longmapsto & \sum_{i\in\mathbb{Z}}x^{L(0)}\Phi(x^{-L(0)}u;i)x^{-L(0)}v \end{array}$$

は logarithmic intertwining operator となる．ここで $L(0)=S+N$ をジョルダン分解 (S は $L(0)$ の半単純成分，N は $L(0)$ の冪零成分) としたとき，$x^{\pm L(0)}$ は

- $x^{\pm L(0)}:=x^{\pm S}\sum_{i=0}^{\infty}\dfrac{(\pm N\log x)^i}{i!}$.
- $u\in W^i$ を S の固有値 μ に関する固有ベクトルとしたとき，$x^{\pm S}u:=x^{\pm\mu}u$

で定めている．

さらに上の対応は一対一対応を与える．

$W^i=\bigoplus_{j=0}^{\infty}W^i(j), i=1,2,3$ を $\mathbb{N}$ 次数付き弱 V 加群とする．(1.5) を真似て，$\mathbb{N}$ 次数付き intertwining operator $\Phi(\ ,x)$ に対して $o_\Phi\in\mathrm{Hom}_{A(V)}(A(W^1)\otimes_{A(V)}W^2(0),W^3(0))$ を定める: $u\in W^1(j)$ $(j=0,1,\ldots), v\in W^2(0)$ に対して，$o_\Phi(u\otimes v):=u_{j-1}v\in W^3(0)$ とおく．線形性を用いて o_Φ を $W^1\otimes_{\mathbb{C}}W^2(0)$ 全体に拡張した写像を再度 $o_\Phi:W^1\otimes_{\mathbb{C}}W^2(0)\to W^3(0)$ と書く．

$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{l}\mathbb{N}\text{ 次数付き intertwining operator}\\ :W^1\otimes_{\mathbb{C}}W^2\to W^3((x))\text{ の全体}\end{array}\right) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A(V)}(A(W^1)\otimes_{A(V)}W^2(0),W^3(0)). \\ \Cup & & \Cup \\ \Phi(\ ,x) & \longmapsto & o_\Phi \end{array} \tag{2.1}$$

次は，具体的な頂点作用素代数に対して intertwining operator 全体の成すベクトル空間の次元を決定する (cf.[1],[2],[3],[11]) のに有用な結果である．

定理 2.4. ([6],[8],[12]) $W^i=\bigoplus_{j=0}^{\infty}W^i_{\lambda_i+j}$，$\lambda_i\in\mathbb{C}, i=1,2,3$ を V 加群で，各斉次空間 $W^i_{\lambda_i+j}$ は，$L(0)$ の固有値 λ_i+j に関する固有空間になっているとする．$W^2,(W^3)'$ はそれ

ぞれ一般 Verma 加群になっているとする．このとき，対応 (1.5) は intertwining operator $W_1 \otimes_{\mathbb{C}} W_2 \to W^3[\{x\}]$ の全体と $\mathrm{Hom}_{A(V)}(A(W^1) \otimes_{A(V)} W^2_{\lambda_2}, W^3_{\lambda_3})$ との間の一対一対応を与える．

ここで，$\mathbb{N}$ 次数付き弱 V 加群 $M = \bigoplus_{j=0}^{\infty} M(j)$ が**一般 Verma 加群**であるとは

- M は $M(0)$ から生成されている．
- $\mathbb{N}$ 次数付き弱 V 加群 $W = \bigoplus_{j=0}^{\infty} W(j)$ と $A(V)$ 準同型 $f : M(0) \to W(0)$ が与えられたとき，$\mathbb{N}$ 次数付き V 加群としての準同型 $F : M \to W$ で $F|_{M(0)} = f$ となるものが存在する．

を全て満たすときにいう．

定理 2.4 を $\mathbb{N}$ 次数付き弱 V 加群と $\mathbb{N}$ 次数付き intertwining operator に拡張した次が主結果である．

定理 2.5. $W^i = \bigoplus_{j=0}^{\infty} W^i(j), i = 1, 2, 3$ を $\mathbb{N}$ 次数付き弱 V 加群とする．$W^2, (W^3)'$ はそれぞれ一般 Verma 加群になっていて，W^3 の各斉次空間は有限次元であると仮定する．このとき，対応 (2.1) は $\mathbb{N}$ 次数付き intertwining operator $W^1 \otimes_{\mathbb{C}} W^2 \to W^3((x))$ の全体と $\mathrm{Hom}_{A(V)}(A(W^1) \otimes_{A(V)} W^2(0), W^3(0))$ との間の一対一対応を与える．

3 Heisenberg 頂点代数 $M(1)$ の $\mathbb{N}$ 次数付き intertwining operator

ここでは，Heisenberg 頂点代数 $M(1)$ 上の $\mathbb{N}$ 次数付き加群の例に対して，$\mathbb{N}$ 次数付き intertwining operator を考える．この場合は，定理 2.5 における $\mathrm{Hom}_{A(V)}(A(W^1) \otimes_{A(V)} W^2(0), W^3(0))$ が簡単な構造を持つ．

$M(1)$ とその加群の例を, この原稿で用いる部分に限って紹介する．$M(1)$ の構成に用いられるリー環 $\hat{H}$ の紹介から始める．H を $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間，$\langle -, - \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ を H 上の非退化双線形形式とする．H を可換なリー環とみなして，そのアフィン化 $\hat{H} = H \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ を考える．$\alpha \in H, n \in \mathbb{Z}$ に対して $\alpha(n) = \alpha \otimes t^n$ と書くことにする．交換関係は

$$[\alpha(m), \beta(n)] = \delta_{m+n,0}\langle \alpha, \beta \rangle K, \qquad [\hat{H}, K] = 0$$

で与えられる．$H \cong H \otimes \mathbb{C}t^0$ として H を $\hat{H}$ の部分リー環とみなす．

Ω を H 加群とする．$(\bigoplus_{n>0} H \otimes t^n)\Omega = 0, K = \mathrm{id}_{\Omega}$ とおいて Ω を $\hat{H}$ の部分 Lie 環 $\bigoplus_{n\geq 0} H \otimes t^n \oplus \mathbb{C}K$ 上の加群とみなす．Ω を $\hat{H}$ 上に誘導した $\hat{H}$ 加群

$$M(1, \Omega) = U(\hat{H}) \otimes_{U(\bigoplus_{n\geq 0} H \otimes t^n \oplus \mathbb{C}K)} \Omega \cong S(\bigoplus_{n<0} H \otimes t^n) \otimes_{\mathbb{C}} \Omega$$

を考える．ここで $U(g)$ はリー環 g の包絡環，$S(\bigoplus_{n<0} H\otimes t^n)$ は $\bigoplus_{n<0} H\otimes t^n$ の対称代数である．

Ω が 1 次元の場合は，$\alpha\in H$ を適切に取って $\Omega\cong\mathbb{C}e^{\alpha}$ s.t. $h\cdot e^{\alpha}=\langle h,\alpha\rangle e^{\alpha}, h\in H$, とすることが出来る．次はよく知られている．

定理 3.1. (1) $M(1)=M(1,\mathbb{C}e^0)$ には頂点作用素代数の構造が入る．

(2) 任意の H 加群 Ω に対して $M(1,\Omega)$ は頂点作用素代数 $M(1)$ 上の $\mathbb{N}$ 次数付き弱加群となる．Ω が有限次元半単純 H 加群ならば，$M(1,\Omega)$ は V 加群である．

$\Omega_i, i=1,2,3$ を 3 つの H 加群として通常の intertwining operator $I(\ ,x):M(1,\Omega_1)\otimes_{\mathbb{C}} M(1,\Omega_2)\to M(1,\Omega_3)[\{x\}]$ を考える．$M(1)$ に対して，Zhu 代数は $A(M(1))\cong\mathbb{C}[H]$ $(h(-1)1+O(M(1))\mapsto h)$ となることが知られている．また H 加群として $A(M(1,\Omega_1)\otimes_{A(M(1))}\Omega_2\cong\Omega_1\otimes_{\mathbb{C}}\Omega_2$ で

$$\mathrm{Hom}_{A(M(1))}(A(M(1,\Omega_1))\otimes_{A(M(1))}\Omega_2,\Omega_3)\cong\underset{\text{(Lie 環の準同型写像)}}{\mathrm{Hom}_H(\Omega_1\otimes_{\mathbb{C}}\Omega_2,\Omega_3)}$$

となる．$\dim_{\mathbb{C}}\Omega_1=\dim_{\mathbb{C}}\Omega_2=1$ の場合には，intertwining operator $M(1,\Omega_1)\otimes_{\mathbb{C}}M(1,\Omega_2)\to M(1,\Omega_3)[\{x\}]$ の具体的な構成と分類はよく知られており，定理 2.4 からも分かるように $\mathrm{Hom}_H(\Omega_1\otimes_{\mathbb{C}}\Omega_2,\Omega_3)$ に対応している．Milas[10] は，Ω_1,Ω_2 が有限次元の場合に，任意の H 準同型 $\Omega_1\otimes_{\mathbb{C}}\Omega_2\to\Omega_3$ に付随する対数的 intertwining operator $I(\ ,x):M(1,\Omega_1)\otimes_{\mathbb{C}} M(1,\Omega_2)\to M(1,\Omega_3)[\{x\}][\log x]$ を構成した．今回，定理 2.5 より次のことが分かる．

系 3.2. $\Omega_1\Omega_2,\Omega_3$ を H 加群で，$\dim_{\mathbb{C}}\Omega_3<\infty$ とする．このとき，$\mathbb{N}$ 次数付き intertwining operator $M(1,\Omega_1)\otimes_{\mathbb{C}}M(1,\Omega_2)\to M(1,\Omega_3)((x))$ の全体と $\mathrm{Hom}_H(\Omega_1\otimes_{\mathbb{C}}\Omega_2,\Omega_3)$ との間には一対一対応がある．

参考文献

[1] T. Abe, Fusion rules for the free bosonic orbifold vertex operator algebra, *J. Algebra* **229** (2000), 333–374.

[2] T. Abe, Fusion rules for the charge conjugation orbifold, *J. Algebra* **242** (2001), 624–655.

[3] T. Abe, C. Dong and H. Li, Fusion rules for the vertex operator algebras $M(1)^+$ and V_L^+. *Comm. Math. Phys.* **253** (2005), 171–219.

[4] R. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **83** (1986), 3068–3071.

[5] I. B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Applied Math., Vol. **134**, Academic Press, 1988.

[6] I. Frenkel and Y. Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras, *Duke Math. J.* **66** (1992), 123–168.

[7] J. Lepowsky and H. S. Li, *Introduction to Vertex Operator Algebras and their Representations*, Progress in Mathematics, **227**, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.

[8] H. Li, Determining fusion rules by $A(V)$-modules and bimodules, *J. Algebra* **212** (1999), 515–556.

[9] A. Milas, Weak modules and logarithmic intertwining operators for vertex operator algebras, *Recent developments in infinite-dimensional Lie algebras and conformal field theory* (Charlottesville, VA, 2000), 201–225, Contemp. Math., **297**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[10] A. Milas, Logarithmic intertwining operators and vertex operators, *Comm. Math. Phys.* **277** (2008), 497–529.

[11] K. Tanabe and H. Yamada, Fixed point subalgebras of lattice vertex operator algebras by an automorphism of order three, *Journal of the Mathematical Society of Japan* **65** (2013), 1169–1242.

[12] A. Tsuchiya and Y. Kanie, Vertex operators in conformal field theory on $\mathbb{P}^1$ and monodromy representations of briad group, *Conformal Field Theory and Solvable Lattice Models*, Advanced Studies in Pure Math., **16** (1988), 297–372.

[13] Y. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 237–302.