

第34回代数的組合せ論シンポジウム報告集

2017年6月15日(木)～6月17日(土)

於 小山商工会議所(大会議室), 小山工業高等専門学校(図書情報センター視聴覚室)

平成29年度 JSPS 科学研究補助金基盤研究(B)

(課題番号 26287001 筑波大学 宮本雅彦)

まえがき

この報告集は、2017年6月15日(木)から17日(土)にわたって、栃木県小山市の小山商工会議所会館および小山工業高等専門学校で行われた「第34回代数的組合せ論シンポジウム」の講演記録です。研究集会には、約50名の参加者がありました。

本研究集会の報告集の作成、講演者の旅費および会場費を下記の平成29年度JSPS科学研究費補助金から援助をいただきました。有難うございました。

基盤研究(B)研究代表者：宮本雅彦 (課題番号：26287001)

基盤研究(B)研究代表者：原田雅彦 (課題番号：15H03633)

基盤研究(C)研究代表者：三橋秀生 (課題番号：16K05249)

基盤研究(C)研究代表者：佐藤巖 (課題番号：15K04985)

最後に、講演者をはじめ、本研究集会の開催にご協力いただきました皆様に深く感謝いたします。

2017年11月

宗政昭弘(東北大学)

山内博(東京女子大学)

三橋秀生(法政大学)

森田英章(室蘭工業大学)

佐藤巖(小山工業高等専門学校)

目次

1. 土谷昭善(大阪大学情報科学研究科)	1-4
Gorenstein 単体と有限アーベル群	
2. Pritta Etriana Putri (東北大学)	5-14
Hadamard matrices and a matrix approach to multiplication of complementary sequences	
3. 入江佑樹(千葉大学大学院融合理工学府)	15-24
桁分離型ゲーム	
4. 小田文仁(近畿大学理工学部理学科)	25-31
A-型コクセター群の部分のバーンサイド環の単元群	
5. 千吉良直紀(熊本大学大学院先端科学研究部)	32-38
A commutative nonassociative algebra for $3S_7$	
6. 元良直輝(京都大学数理解析研究所)	39-46
W 代数の協本表現	
7. 鎌野健(大阪工業大学ロボティクス&デザイン工学部)	47-55
ロンサム分解可能な行列について	
8. 矢部貴大(東京大学大学院数理科学研究科)	56-57
Jordan Matsuo algebras over fields of characteristic 3	
9. 宮本雅彦(筑波大学数理物質系), 千吉良直紀(熊本大学大学院先端科学研究部)	58-65
アダマール行列と超共形代数	
10. 今野紀雄(横浜国立大学大学院工学研究院), 瀬川悦生(東北大学情報科学研究科), 佐藤巖(小山工高専)	66-73
Regularities of the positive support of Grover walk	
11. 谷口哲至(広島工業大学)	74-77
一般ベータ木における Grover ウォークの周期性	
12. 今野紀雄(横浜国立大学大学院工学研究院)	78
量子ウォークの定常測度とその周辺	
13. 大野泰生(東北大学大学院理学研究科)	79-82
2-posets と 2-posets を繋ぐ多重ゼータ関数	
14. 澤正憲(神戸大学大学院システム情報学研究科)	83-86
古典準直交多項式の判別式の明示公式とそのデザイン理論への応用	
15. 久保田匠(東北大学情報科学研究科)	87-92
グラフ積の統一化と Godsil-McKay switching との可換性について	
16. 野崎寛(愛知教育大学数学教育講座)	93-97

第二固有値を固定したときの連結正則二部グラフの頂点数に対する上界

17. 鈴木寛(国際基督教大学) 98-107
Coverings and Homotopy of a Graph
18. 小林雄介(千葉大学大学院融合理工学府) 108-115
A construction of the Co3 two-graph from the Hoffman-Singleton graph
19. 吉荒聡(東京女子大学現代教養学部数理科学科) 116-123
Ambient space が最大となる bilinear DHO

Gorenstein 単体と有限アーベル群

土谷 昭善 (大阪大学大学院情報科学研究科)*

1. Gorenstein 凸多面体

凸多面体 \mathcal{P} が整であるとは頂点のすべての成分が整数であるときにいう。 d 次元整凸多面体 $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^d$ に対して、 \mathcal{P} と \mathcal{Q} が **unimodular** 同値であるとは、 unimodular 行列 $U \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ と整数ベクトル $w \in \mathbb{Z}^d$ が存在して、 U により定義される線形写像 $f_U : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ を用いて $\mathcal{Q} = f_U(\mathcal{P}) + w$ となるときにいう。ここで $v \in \mathbb{R}^d$ に対し、 $f_U(v) = vU$ と定める。

d 次元整凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ が反射的であるとは、 \mathbb{R}^d の原点がその内部に含まれ、その双対凸多面体

$$\mathcal{P}^\vee := \{y \in \mathbb{R}^d : \langle x, y \rangle \leq 1 \text{ for all } x \in \mathcal{P}\}$$

が整凸多面体になるときにいう。ここで、 $\langle x, y \rangle$ は \mathbb{R}^d の通常の内積である。また \mathcal{P} が指数 r の **Gorenstein** であるとは $r\mathcal{P} := \{rx \in \mathbb{R}^d : x \in \mathcal{P}\}$ がある反射的凸多面体に unimodular 同値になるときにいう。

Gorenstein 凸多面体に関して、次のことが知られている ([2])。

- 各 $d \geq 0$ に対し、 d 次元 Gorenstein 凸多面体は unimodular 同値なものを除いて、高々有限個しか存在しない。

この事実により、低次元の Gorenstein 凸多面体の分類や特徴づけが行われている。本原稿では一般の次元の Gorenstein 単体の特徴付けに関して議論する。

2. 整単体に付随する有限アーベル群

d 次元整単体 $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元整単体とし

$$\Lambda_\Delta := \{(\lambda_0, \dots, \lambda_d) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{d+1} : \sum_{i=0}^d \lambda_i(v_i, 1) \in \mathbb{Z}^{d+1}\}$$

とする。ここで v_0, \dots, v_d は Δ の頂点である。このとき、 Λ_Δ は $x = (x_0, \dots, x_d), y = (y_0, \dots, y_d) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{d+1}$ に対し、加法を $x + y = (x_0 + y_0, \dots, x_d + y_d)$ と定義することで、有限アーベル群となる。逆に有限アーベル群 $\Lambda \subset (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{d+1}$ で各元の成分の和が整数であるものから、 $\Lambda = \Lambda_\Delta$ となるような d 次元整単体 Δ が構成できる。さらに Λ_Δ の位数は Δ の正規化体積 $\text{vol}(\Delta)$ 、つまり $(\Delta$ の通常体積) $\times d!$ と一致する。

整単体の unimodular 同値について、次のようなことが知られている ([1])。

- d 次元整単体 $\Delta, \Delta' \subset \mathbb{R}^d$ が unimodular 同値である必要十分条件は頂点の順番を入れ替えることによって $\Lambda_\Delta = \Lambda_{\Delta'}$ となることである。

これらの事実により、 d 次元整単体を unimodular 同値を除いて分類することは、各元の成分の和が整数となっている $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{d+1}$ の有限部分アーベル群を座標の入れ替えを除いて分類することと同値である。

* e-mail: a-tsuchiya@ist.osaka-u.ac.jp

本原稿ではこの事実に基づき、 d 次元整単体 $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ が Gorenstein になる条件を Λ_Δ で特徴付けることを目的とする。

次に、整凸多面体の分類に関して、非常に重要な性質を紹介する。 d 次元整単体 $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ に対し、 $d+1$ 次元整単体 $\text{pyr}(\Delta)$ を次のように定義する。

$$\text{pyr}(\Delta) := \text{conv}(\Delta \times \{0\}, (0, \dots, 0, 1)) \subset \mathbb{R}^{d+1}.$$

このとき、 $\text{pyr}(\Delta)$ は Δ の **lattice pyramid** と呼ばれる。lattice pyramid に対して、次のことが知られている。

- $\text{vol}(\Delta) = \text{vol}(\text{pyr}(\Delta))$ である。
- Δ が指数 r の Gorenstein であることと、 $\text{pyr}(\Delta)$ が指数 $r+1$ の Gorenstein であることは同値である。

よって Gorenstein 単体の特徴付けを行うとき、ある整単体の lattice pyramid となっているものを除いて考えることは自然である。また lattice pyramid は有限アーベル群の言葉で以下のように言い換えられる。

- Δ がある単体の lattice pyramid である必要十分条件は、ある整数 i ですべての Λ_Δ の元 $(\lambda_0, \dots, \lambda_d)$ に対して $\lambda_i = 0$ となるものが存在することである。

3. Hermite normal form

整単体の分類を行う上での重要なアプローチを紹介する。

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ について、 A が **Hermite normal form** であるとは、 A が次の2条件を満たす時に言う。

1. A は下三角行列である。
2. 任意の $1 \leq j < i$ に対し、 $0 \leq a_{ij} < a_{ii}$ である。

Hermite normal form について、次の性質が知られている。

命題 1 ([3, Chapter 4]) 任意の正則な $A \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ について、ある Hermite normal form $H \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ と unimodular 行列 $U \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ が存在し、 $A = HU$ となる。この H は A に対し、ただ一つ存在する。

Hermite normal form $H = (h_{ij}) \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ に対し、 $\Delta(H)$ を \mathbb{R}^d の原点と、 H のすべての行ベクトルを頂点とする d 次元整単体とする。このとき $\text{vol}(\Delta(H)) = \det(H)$ となる。上の事実により、任意の d 次元整単体は、ある Hermite normal form H が存在して、 $\Delta(H)$ と unimodular 同値となる。よって整単体を分類する際、 $\Delta(H)$ だけを考えれば十分である。また $h_{dd} = 1$ の時、明らかに、 $\Delta(H)$ はある整単体の lattice pyramid となっている。よって lattice pyramid を除いて考える場合は、 $h_{dd} > 1$ としてよい。

4. "One Low" Hermite normal form

本章では、ある Hermite normal form から作られる整単体が Gorenstein となる必要十分条件を与える。 $A = (a_1, \dots, a_d)$ を $1 \leq a_1, \dots, a_{d-1} \leq a_d$ を満たす整数の列とする。この A に対し、以下の Hermite normal form を与える。

$$M_A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ a_d - a_1 & \cdots & a_d - a_{d-1} & a_d & \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{d \times d}.$$

さらに $\Delta(A) = \Delta(M_A)$ とする。この時、 $\Lambda_{\Delta(A)}$ は $\left(\frac{a_0}{a_d}, \frac{a_1}{a_d}, \dots, \frac{a_{d-1}}{a_d}, \frac{1}{a_d}\right)$ で生成される、ただし、 a_0 は $a_d \mid (1 + a_0 + \dots + a_{d-1})$ を満たす整数 $0 \leq a_0 < a_d$ である。よって $\Delta(A)$ が lattice pyramid でない必要十分条件は $1 \leq a_0, \dots, a_{d-1} < a_d$ である。

次の定理は $\Delta(A)$ が Gorenstein となる条件である。

定理 2 ([4]) $\Delta(A)$ が指数 r の Gorenstein である必要十分条件は次の条件を満たすことである。

- 各 a_i は a_d を割り切る。
- $ra_d = a_0 + \dots + a_{d-1} + 1$.

この結果より、正規化体積が素数であるときの Gorenstein 単体の特徴付けが得られる。

系 3 ([4]) p を素数とし、 $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元整単体で、 $\text{vol}(\Delta) = p$ であるとする。 Δ はある整単体の lattice pyramid でないと仮定する。このとき Δ が指数 r の Gorenstein である必要十分条件は $rp = d + 1$ で Λ_{Δ} が $\left(\frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p}\right)$ で生成されることである。

5. 二つの素数の積

前の章では、正規化体積が素数の Gorenstein 単体の特徴づけが得られた。本章では、正規化体積が2つの素数の積の Gorenstein 単体の特徴づけを目的とする。

$B = (b_1, \dots, b_s)$ と $C = (c_1, \dots, c_d)$ を $1 \leq s < d$, $1 \leq b_1, \dots, b_{s-1} \leq b_s$, $1 \leq c_1, \dots, c_{d-1} \leq c_d$ を満たす整数の列とする。この (B, C) に対し、以下の Hermite normal form を与える。

$$M_{(B,C)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ b_s - b_1 & \cdots & b_s - b_{s-1} & b_s & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ c_d - c_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_d - c_{d-1} & c_d & \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{d \times d},$$

さらに $\Delta(B, C) = \Delta(M_{(B,C)})$ とする。lattice pyramid でない単体で、正規化体積が2つの素数の積のものは、前章の $\Delta(A)$ または $\Delta(B, C)$ の形のものと同値と

なる。この2つの単体を調べることで、正規化体積が2つの素数の積の Gorenstein 単体の特徴づけが得られる。

定理 4 ([4]) p を素数とし、 $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元整単体で、 $\text{vol}(\Delta) = p^2$ であるとする。 Δ は lattice pyramid でないとする。このとき Δ が指数 r の Gorenstein である必要十分条件は次のいずれかを満たす時である。

1. $rp^2 - 1 = (d - s) + ps$ となる整数 $0 \leq s \leq d - 1$ が存在して、ある頂点の順番づけに対して、 Λ_Δ が

$$\left(\underbrace{1/p, \dots, 1/p}_s, \underbrace{1/p^2, \dots, 1/p^2}_{d-s+1} \right)$$

で生成される。

2. $d = rp - 1$ でさらに、整数 $0 \leq a_0, \dots, a_{d-2} \leq p - 1$ で $p \mid (a_0 + \dots + a_{d-2} - 1)$ となるものが存在して、ある頂点の順番づけに対して、 Λ_Δ が

$$((a_0 + 1)/p, \dots, (a_{d-2} + 1)/p, 0, 1/p), ((p - a_0)/p, \dots, (p - a_{d-2})/p, 1/p, 0)$$

で生成される。

定理 5 ([4]) p, q を異なる2つの素数とし、 $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元整単体で、 $\text{vol}(\Delta) = pq$ であるとする。 Δ は lattice pyramid でないとする。このとき Δ が指数 r の Gorenstein である必要十分条件は $s_1 + s_2 + s_3 = d + 1$ と $rpq = s_1q + s_2q + s_3$ を満たす非負整数 s_1, s_2, s_3 が存在して、ある頂点の順番づけに対して、 Λ_Δ が

$$\left(\underbrace{1/p, \dots, 1/p}_{s_1}, \underbrace{1/q, \dots, 1/q}_{s_2}, \underbrace{1/(pq), \dots, 1/(pq)}_{s_3} \right)$$

で生成されることである。

参考文献

- [1] V.V. Batyrev and J. Hofscheier, Lattice polytopes, finite abelian subgroups in $\text{SL}(n, \mathbb{C})$ and coding theory, arXiv:1309.5312.
- [2] J. C. Lagarias and G. M. Ziegler, Bounds for lattice polytopes containing a fixed number of interior points in a sublattice, *Canad. J. Math.* **43**(1991), 1022–1035.
- [3] A. Schrijver, Theory of Linear and Integer Programming, John Wiley & Sons, 1986
- [4] A. Tsuchiya, Gorenstein simplices and the associated finite abelian groups, *European. J. Combin.* **67**(2018), 145–157.

HADAMARD MATRICES AND A MATRIX APPROACH TO MULTIPLICATION OF COMPLEMENTARY SEQUENCES

PRITTA ETRIANA PUTRI

1. COMPLEMENTARY SEQUENCES

Throughout this chapter, let \mathcal{R} be a commutative ring with multiplicative identity 1, and $*$: $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ be a ring automorphism satisfying $(a^*)^* = a$ for every $a \in \mathcal{R}$.

Definition 1.1 (Non-periodic autocorrelation). Let $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{l-1}) \in \mathcal{R}^l$. We define the *non-periodic autocorrelation* $N_{\mathbf{a}}$ of \mathbf{a} by

$$N_{\mathbf{a}}(j) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{l-j-1} a_i a_{i+j}^* & \text{if } 0 \leq j < l, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Definition 1.2 (Complementary sequences). We say that a set of sequences $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ is *complementary with weight* w if

$$\sum_{i=1}^n N_{\mathbf{a}_i}(j) = \begin{cases} w & \text{if } j = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Moreover, the sequences $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ are called complementary sequences.

We may note that the term *weight* is usually used to describe the number of nonzero components of an arbitrary sequence. The weight of any set of sequences means the total weight of all sequences in that set, provided that $aa^* = 1$ for all nonzero components a . The following sequences are complementary sequences with weight 14:

$$(1, -1, 1, 1, 1, -1, -1), \quad (1, 1, 0, 1, 0, -1, 1), \quad (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0).$$

Complementary sequences do not necessarily have the same length. For example,

$$\mathbf{a} = (1, -1, -1, -1, 1), \quad \mathbf{b} = (1, 1, -1, 1, -1), \quad \mathbf{c} = (1, 1, 1, 1), \quad \mathbf{d} = (1, -1, -1, 1)$$

have different lengths, but they are complementary sequences with weight 18. Remark that this quadruple of sequences $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ are known as near normal sequences, one of the class of complementary sequences.

Now, we will introduce a representation of complementary sequences by using polynomials. This representation becomes important in characterizing complementary sequences. Let $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{l-1}) \in \mathcal{R}^l$. We define the *Hall polynomial* $f_{\mathbf{a}} = f_{\mathbf{a}}(x) \in \mathcal{R}[x]$ of \mathbf{a} by

$$f_{\mathbf{a}}(x) = \sum_{i=0}^{l-1} a_i x^i.$$

Let $*$: $\mathcal{R}[x^{\pm 1}] \rightarrow \mathcal{R}[x^{\pm 1}]$ be an extension map of $*$ defined by

$$\left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i x^i \right)^* = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^* x^{-i}.$$

Then $*$ is a ring automorphism satisfying $(f^*)^* = f$ for every $f \in \mathcal{R}[x^{\pm 1}]$. Let $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{l-1}) \in \mathcal{R}^l$ and $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^n$. We define a sequence $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ by

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (a_0 \mathbf{b}, \dots, a_{l-1} \mathbf{b}) \in \mathcal{R}^{ln}.$$

Also, define $\mathbf{a}^* \in \mathcal{R}^l$ by $\mathbf{a}^* = (a_{l-1}^*, \dots, a_0^*)$.

Lemma 1.3. *Let $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ be arbitrary sequences with entries in \mathcal{R} . Then $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ are complementary with weight w if and only if $\sum_{i=1}^n f_{\mathbf{a}_i}(x) f_{\mathbf{a}_i}^*(x) = w$.*

Lemma 1.3 means that it suffices to compute $\sum_{i=1}^n f_{\mathbf{a}_i}(x) f_{\mathbf{a}_i}^*(x)$ for sequences $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ to determine whether they are complementary or not.

We will introduce some classes of complementary sequences in this section. First, we will give some examples of ternary complementary sequences, i.e. sequences with entries in $\{0, \pm 1\}$. The following results are well known among the study of complementary sequences.

Definition 1.4 (Golay sequences). A pair of sequences $(\mathbf{a}; \mathbf{b}) \in \{\pm 1\}^n$ is called *Golay sequences of length n* if they are complementary sequences. Denote by $GS(n)$ the set of Golay sequences of length n . A positive integer n is called a *Golay number* if $GS(n)$ is nonempty.

Example 1.5. The pairs

$$((1, 1, 1, -1); (1, 1, -1, 1)), \quad ((1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1); (1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1))$$

are, respectively, Golay sequences of length 4 and 10.

We can easily check that if $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{\pm 1\}^n$, then $(\mathbf{a}; \mathbf{b})$ are Golay sequences if and only if $(f_{\mathbf{a}} f_{\mathbf{a}}^* + f_{\mathbf{b}} f_{\mathbf{b}}^*)(x) = 2n$. We can also produce another Golay sequences from a pair of Golay sequences. This is an example of a multiplication of complementary sequences.

Theorem 1.6. *If $(\mathbf{a}; \mathbf{b}) \in GS(m)$ and $(\mathbf{c}; \mathbf{d}) \in GS(n)$ then*

$$\left(\frac{1}{2}[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \otimes \mathbf{c} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \otimes \mathbf{d}^*]; \frac{1}{2}[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \otimes \mathbf{d} - (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \otimes \mathbf{c}^*] \right) \in GS(mn).$$

We give other constructions of complementary sequences.

Definition 1.7 (Base sequences). A quadruple of (± 1) -sequences $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ of length m, m, n, n , respectively, is called *base sequences* if it is a set of complementary sequences. We denote by $BS(m, n)$ the set of base sequences of length m, m, n, n . If $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \in BS(m, n)$, then it is complementary with weight $2(m + n)$.

Definition 1.8 (Paired ternary sequences). We call a quadruple of complementary $(0, \pm 1)$ -sequences with weight $2l$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ of length l a *paired ternary sequences* if

- (i) the pairs $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ and $\{\mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ are each conjoint,
- (ii) the pair $\{\mathbf{a}, \mathbf{c}\}$ is disjoint.

Denote by $PT(l)$ the set of paired ternary sequences of length l .

Definition 1.9 (T -sequences). A T -sequences of length n is a quadruple of complementary $\{0, \pm 1\}$ -sequences $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$, with weight n such that $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ are mutually disjoint sequences, i.e. every pair in $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ is disjoint. Denote by $TS(n)$, the set of T -sequences of length n .

Lemma 1.10. *Let m and n be positive integers.*

- (i) *For every positive integer n , $PT(n)$ is nonempty if and only if $TS(n)$ is nonempty,*
- (ii) *$BS(m, n) \neq \emptyset$ implies $PT(m + n) \neq \emptyset$ and $TS(m + n) \neq \emptyset$.*

Our motivation to investigate the constructions of complementary sequences arise from the fact that Hadamard matrices can be obtained from complementary sequences. We will give two constructions of Hadamard matrices that is obtained by using Golay sequences and T -sequences. Denote by $\text{circ}(\mathbf{a})$ the circulant matrix with the first row \mathbf{a} .

Theorem 1.11 ([17]). *Let $(\mathbf{a}; \mathbf{b}) \in GS(s)$. Let $A = \text{circ}(\mathbf{a})$ and $B = \text{circ}(\mathbf{b})$. Then*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -B^T & A^T \end{bmatrix}$$

is an Hadamard matrix of order $2s$.

To give a construction of an Hadamard matrix from T -sequences, we need the Goethals-Seidel array.

Theorem 1.12 (Goethals-Seidel array). *Suppose A, B, C, D are circulant $\{\pm 1\}$ -matrices of order n such that*

$$AA^T + BB^T + CC^T + DD^T = 4nI.$$

Let R be the back-diagonal matrix, i.e.

$$R = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & \dots & \\ 1 & & & \end{bmatrix}.$$

Then

$$(1) \quad H = \begin{bmatrix} A & BR & CR & DR \\ -BR & A & -D^T R & C^T R \\ -CR & D^T R & A & -B^T R \\ -DR & -C^T R & B^T R & A \end{bmatrix}$$

is an Hadamard matrix of order $4n$. Moreover, if A, B, C, D are symmetric, then

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 4nI$$

and

$$(2) \quad H = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & -D & C \\ -C & D & A & -B \\ -D & -C & B & A \end{bmatrix}.$$

The construction (2) is known as a Williamson matrix. Therefore, Williamson matrices are special cases of Goethals-Seidel arrays. For further information about Goethals-Seidel array and Williamson matrices, we refer the reader to [12] and [18]. By using Goethals-Seidel array, we can actually construct an Hadamard matrix from T -sequences.

Theorem 1.13. *Let $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \in TS(n)$. Let A', B', C', D' be $\text{circ}(\mathbf{a}), \text{circ}(\mathbf{b}), \text{circ}(\mathbf{c}), \text{circ}(\mathbf{d})$, respectively. Set*

$$\begin{aligned} A &= A' + B' + C' + D', & B &= -A' + B' + C' - D', \\ C &= -A' - B' + C' + D', & D &= -A' + B' - C' + D'. \end{aligned}$$

Then

$$H = \begin{bmatrix} A & BR & CR & DR \\ -BR & A & -D^T R & C^T R \\ -CR & D^T R & A & -B^T R \\ -DR & -C^T R & B^T R & A \end{bmatrix}$$

is an Hadamard matrix of order $4n$.

Proof. Since $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ are T -sequences, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ are mutually disjoint sequences. This implies that A', B', C', D' are mutually disjoint circulant matrices. Therefore, A, B, C, D are circulant $\{\pm 1\}$ -matrices. By Theorem 1.12, H is an Hadamard matrix of order $4n$. \square

2. A GENERALIZATION OF YANG MULTIPLICATION THEOREM

Yang multiplication theorem, basically, is known as a method to find paired ternary sequences from base sequences. As shown in Lemma 1.10, the existence of paired ternary sequences will lead to the existence of T -sequences and the existence of T -sequences implies to the existence of Hadamard matrices (see Theorem 1.13). Therefore, we try to increase the possibility of finding new T -sequences by generalizing Yang multiplication theorem.

In this section, we introduce one result of Yang, who gave a method of constructing some complementary sequences from base sequences. More specifically,

Theorem 2.1 ([16, Theorem 4]). *If $BS(m+1, m) \neq \emptyset$ and $BS(n+1, n) \neq \emptyset$, then there exists a set of four complementary (± 1) -sequences of length $(2m+1)(2n+1)$.*

In order to prove Theorem 2.1, Yang used the Lagrange identity for polynomial rings. Hall polynomials have been used not only by Yang, but also others. See [4] and references therein. We generalize Theorem 2.1 as follows.

Theorem 2.2. *Let \mathcal{T} be a multiplicatively closed subset of \mathcal{R} satisfying $-1 \in \mathcal{T} = \mathcal{T}^*$. Let*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}, \mathbf{b} &\in \mathcal{T}^{m+1}, \\ \mathbf{c}, \mathbf{d} &\in \mathcal{T}^m, \\ \mathbf{v}, \mathbf{g} &\in \mathcal{T}^{n+1}, \\ \mathbf{h}, \mathbf{e} &\in \mathcal{T}^n \end{aligned}$$

satisfy

$$\begin{aligned}(f_a f_a^* + f_b f_b^* + f_c f_c^* + f_d f_d^*)(x) &= 2(2m + 1), \\ (f_v f_v^* + f_g f_g^* + f_h f_h^* + f_e f_e^*)(x) &= 2(2n + 1).\end{aligned}$$

Then there exist $\mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathcal{T}^{(2m+1)(2n+1)}$ such that

$$(f_q f_q^* + f_r f_r^* + f_s f_s^* + f_t f_t^*)(x) = 4(2m + 1)(2n + 1).$$

Theorem 2.1 follows from Theorem 2.2 by setting $\mathcal{T} = \{\pm 1\} \subset \mathbb{Z}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \in BS(m + 1, m)$, and $(\mathbf{v}, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{e}) \in BS(n + 1, n)$. The proof of Theorem 2.1 in [16] is by establishing the identity

$$\begin{aligned}(3) \quad & (f_q f_q^* + f_r f_r^* + f_s f_s^* + f_t f_t^*)(x) \\ &= (f_a f_a^* + f_b f_b^* + f_c f_c^* + f_d f_d^*)(x^2)(f_v f_v^* + f_g f_g^* + f_h f_h^* + f_e f_e^*)(x^{2(2m+1)}),\end{aligned}$$

after defining the sequences $\mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}$ appropriately such that, in particular,

$$\begin{aligned}f_q(x) &= f_a(x^2)f_{v^*}(x^{2(2m+1)}) + x f_c(x^2)f_g(x^{2(2m+1)}) \\ &\quad - x^{2(2m+1)} f_{b^*}(x^2)f_e(x^{2(2m+1)}) + x^{2(2m+1)+1} f_d(x^2)f_h(x^{2(2m+1)}).\end{aligned}$$

A key to the proof is the Lagrange identity: given a, b, c, d, e, v, g, h in a commutative ring with identity and an involutive automorphism $*$, set

$$\begin{aligned}(4) \quad & q = av^* + cg - b^*e + dh, \\ & r = bv^* + dg^* + a^*e - ch^*, \\ & s = ag^* - cv - bh - d^*e, \\ & t = bg - dv + ah^* + c^*e.\end{aligned}$$

Then

$$(5) \quad qq^* + rr^* + ss^* + tt^* = (aa^* + bb^* + cc^* + dd^*)(ee^* + vv^* + gg^* + hh^*).$$

The derivation of (3) from (5) is not so immediate since one has to define a, b, c, d, v, g, h, e as

$$\begin{aligned}& f_a(x^2), f_b(x^2), x f_c(x^2), x f_d(x^2), \\ & x^{-n(2m+1)} f_v(x^{2(2m+1)}), x^{-n(2m+1)} f_g(x^{2(2m+1)}), \\ & x^{(1-n)(2m+1)} f_h(x^{2(2m+1)}), x^{2m+(1-n)(2m+1)} f_e(x^{2(2m+1)}),\end{aligned}$$

rather than

$$f_a(x^2), f_b(x^2), f_c(x^2), f_d(x^2), f_v(x^{2(2m+1)}), f_g(x^{2(2m+1)}), f_h(x^{2(2m+1)}), f_e(x^{2(2m+1)}),$$

respectively. We note that Đoković and Zhao [6] observed some connection between Yang's method and the octonion algebra.

In this section, we will give a more straightforward proof of Theorem 2.2. Our approach is by constructing a matrix Q from the eight sequences $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{v}, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{e}$ and produce a Laurent polynomial of single variable for each sequence and a Laurent polynomial of two variables for the matrix Q , such that

$$\psi_Q(x, y) = \psi_a(x)\psi_v(y) + \psi_c(x)\psi_g(y) + \psi_b(x)\psi_e(y) + \psi_d(x)\psi_h(y).$$

This gives an interpretation of the Lagrange identity in term of sequences and matrices, i.e. there exist matrices Q, R, S, T such that

$$\begin{aligned} & (\psi_Q\psi_Q^* + \psi_R\psi_R^* + \psi_S\psi_S^* + \psi_T\psi_T^*)(x, y) \\ &= (\psi_a\psi_a^* + \psi_b\psi_b^* + \psi_c\psi_c^* + \psi_d\psi_d^*)(x)(\psi_e\psi_e^* + \psi_v\psi_v^* + \psi_g\psi_g^* + \psi_h\psi_h^*)(y). \end{aligned}$$

Then (3) follows immediately by noticing $\psi_Q(x, x^{(2m+1)}) = \psi_q(x)$ and $(\psi_a\psi_a^*)(x) = (f_a f_a^*)(x^2)$ for a sequence \mathbf{a} .

We fix a multiplicatively closed subset \mathcal{T} of \mathcal{R} satisfying $-1 \in \mathcal{T} = \mathcal{T}^*$. Also, we denote $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T} \cup \{0\}$.

Definition 2.3. Let $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{l-1}) \in \mathcal{R}^l$. We define a Laurent polynomial $\psi_{\mathbf{a}}(x) \in \mathcal{R}[x^{\pm 1}]$ by

$$\psi_{\mathbf{a}}(x) = x^{1-l} f_{\mathbf{a}}(x^2).$$

For sequence $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{l-1}) \in \mathcal{R}^l$ of length l we define $\mathbf{a}^* \in \mathcal{R}^l$ by $(a_{l-1}^*, \dots, a_0^*)$. It follows immediately that $\mathbf{a}^{**} = \mathbf{a}$ for every $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^l$.

Lemma 2.4. Let l be a positive integer and $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^l$. Then $\psi_{\mathbf{a}^*}(x) = \psi_{\mathbf{a}}^*(x)$.

Lemma 2.5. For any sequence \mathbf{a} , $f_{\mathbf{a}}(x^2)f_{\mathbf{a}}^*(x^2) = \psi_{\mathbf{a}}(x)\psi_{\mathbf{a}}^*(x)$.

Corollary 2.6. Let $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ be arbitrary sequences with entries in \mathcal{R} . Then $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ are complementary sequences with weight w if and only if $\sum_{i=1}^n (\psi_{\mathbf{a}_i}\psi_{\mathbf{a}_i}^*)(x) = w$.

Now, let $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{l-1}) \in \mathcal{R}^l$. We define

$$\mathbf{a}/0 = (a_0, 0, a_1, \dots, 0, a_{l-1}) \in \mathcal{R}^{2l-1}, \quad 0/\mathbf{a} = (0, a_0, 0, \dots, a_{l-1}, 0) \in \mathcal{R}^{2l+1}.$$

Lemma 2.7. Let $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^l$ and let p be an odd positive integer. Then

$$\psi_{\mathbf{a}/0}(x) = \psi_{0/\mathbf{a}}(x) = \psi_{\mathbf{a}}(x^2).$$

Let $\mathcal{R}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ be the ring of Laurent polynomials in two variables x, y . We define an involutive ring automorphism $*$: $\mathcal{R}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] \rightarrow \mathcal{R}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ by $x \mapsto x^{-1}$, $y \mapsto y^{-1}$ and $a \mapsto a^*$ for $a \in \mathcal{R}$. For the remainder of this section, we denote the row vectors of a matrix A by $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots$ and those of a matrix B by $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots$. For $A \in \mathcal{R}^{n \times m}$, we define

$$\text{seq}(A) = (\mathbf{a}_0 \mid \mathbf{a}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{a}_{n-1}) \in \mathcal{R}^{mn},$$

where \mid denotes concatenation, and

$$\psi_A(x, y) = \sum_{i=0}^{n-1} y^{2i+1-n} \psi_{\mathbf{a}_i}(x).$$

Lemma 2.8. Let $A, B \in \mathcal{R}^{n \times m}$. Then $\psi_{A \pm B}(x, y) = \psi_A(x, y) \pm \psi_B(x, y)$.

Note that we may regard \mathcal{R}^n as $\mathcal{R}^{1 \times n}$. So, for every $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^n$, we have $\mathbf{a}^t \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ where t denotes the transpose of a matrix.

Lemma 2.9. Let $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^n$ and $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^m$. Then $\psi_{\mathbf{a}^t \mathbf{b}}(x, y) = \psi_{\mathbf{a}}(y)\psi_{\mathbf{b}}(x)$.

Lemma 2.10. *Let*

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathcal{R}^m, \quad \mathbf{v}, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{e} \in \mathcal{R}^n.$$

Set

$$\begin{aligned} Q &= \mathbf{v}^{*t}\mathbf{a} + \mathbf{g}^t\mathbf{c} - \mathbf{e}^t\mathbf{b}^* + \mathbf{h}^t\mathbf{d}, \\ R &= \mathbf{v}^{*t}\mathbf{b} + \mathbf{g}^{*t}\mathbf{d} + \mathbf{e}^t\mathbf{a}^* - \mathbf{h}^{*t}\mathbf{c}, \\ S &= \mathbf{g}^{*t}\mathbf{a} - \mathbf{v}^t\mathbf{c} - \mathbf{h}^t\mathbf{b} - \mathbf{e}^t\mathbf{d}^*, \\ T &= \mathbf{g}^t\mathbf{b} - \mathbf{v}^t\mathbf{d} + \mathbf{h}^{*t}\mathbf{a} + \mathbf{e}^t\mathbf{c}^*. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} &(\psi_Q\psi_Q^* + \psi_R\psi_R^* + \psi_S\psi_S^* + \psi_T\psi_T^*)(x, y) \\ &= (\psi_{\mathbf{a}}\psi_{\mathbf{a}}^* + \psi_{\mathbf{b}}\psi_{\mathbf{b}}^* + \psi_{\mathbf{c}}\psi_{\mathbf{c}}^* + \psi_{\mathbf{d}}\psi_{\mathbf{d}}^*)(x)(\psi_{\mathbf{e}}\psi_{\mathbf{e}}^* + \psi_{\mathbf{v}}\psi_{\mathbf{v}}^* + \psi_{\mathbf{g}}\psi_{\mathbf{g}}^* + \psi_{\mathbf{h}}\psi_{\mathbf{h}}^*)(y). \end{aligned}$$

Proof. By Lemma 2.8, we have

$$\begin{aligned} \psi_Q(x, y) &= (\psi_{\mathbf{v}^{*t}\mathbf{a}} + \psi_{\mathbf{g}^t\mathbf{c}} - \psi_{\mathbf{e}^t\mathbf{b}^*} + \psi_{\mathbf{h}^t\mathbf{d}})(x, y), \\ \psi_R(x, y) &= (\psi_{\mathbf{v}^{*t}\mathbf{b}} + \psi_{\mathbf{g}^{*t}\mathbf{d}} + \psi_{\mathbf{e}^t\mathbf{a}^*} - \psi_{\mathbf{h}^{*t}\mathbf{c}})(x, y), \\ \psi_S(x, y) &= (\psi_{\mathbf{g}^{*t}\mathbf{a}} - \psi_{\mathbf{v}^t\mathbf{c}} - \psi_{\mathbf{h}^t\mathbf{b}} - \psi_{\mathbf{e}^t\mathbf{d}^*})(x, y), \\ \psi_T(x, y) &= (\psi_{\mathbf{g}^t\mathbf{b}} - \psi_{\mathbf{v}^t\mathbf{d}} + \psi_{\mathbf{h}^{*t}\mathbf{a}} + \psi_{\mathbf{e}^t\mathbf{c}^*})(x, y). \end{aligned}$$

Also, by Lemma 2.4 and Lemma 2.9, we have

$$\begin{aligned} \psi_Q(x, y) &= \psi_{\mathbf{a}}(x)\psi_{\mathbf{v}}^*(y) + \psi_{\mathbf{c}}(x)\psi_{\mathbf{g}}(y) - \psi_{\mathbf{b}}^*(x)\psi_{\mathbf{e}}(y) + \psi_{\mathbf{d}}(x)\psi_{\mathbf{h}}(y), \\ \psi_R(x, y) &= \psi_{\mathbf{b}}(x)\psi_{\mathbf{v}}^*(y) + \psi_{\mathbf{d}}(x)\psi_{\mathbf{g}}^*(y) + \psi_{\mathbf{a}}(x)\psi_{\mathbf{e}}^*(y) - \psi_{\mathbf{c}}(x)\psi_{\mathbf{h}}^*(y), \\ \psi_S(x, y) &= \psi_{\mathbf{a}}(x)\psi_{\mathbf{g}}^*(y) - \psi_{\mathbf{c}}(x)\psi_{\mathbf{v}}(y) - \psi_{\mathbf{b}}(x)\psi_{\mathbf{h}}(y) - \psi_{\mathbf{d}}^*(x)\psi_{\mathbf{e}}(y), \\ \psi_T(x, y) &= \psi_{\mathbf{b}}(x)\psi_{\mathbf{g}}(y) - \psi_{\mathbf{d}}(x)\psi_{\mathbf{v}}(y) + \psi_{\mathbf{a}}(x)\psi_{\mathbf{h}}^*(y) + \psi_{\mathbf{c}}^*(x)\psi_{\mathbf{e}}(y). \end{aligned}$$

Thus, by applying the Lagrange identity (5), the result follows. \square

Lemma 2.11. *Let p and p' be odd positive integers,*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}, \mathbf{b} &\in \mathcal{T}^{m+p}, \\ \mathbf{c}, \mathbf{d} &\in \mathcal{T}^m, \\ \mathbf{v}, \mathbf{g} &\in \mathcal{T}^{n+p'}, \\ \mathbf{h}, \mathbf{e} &\in \mathcal{T}^n. \end{aligned}$$

Set

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= \mathbf{a}/0, & \mathbf{b}' &= \mathbf{b}/0, & \mathbf{c}' &= 0/\tilde{\mathbf{c}}, & \mathbf{d}' &= 0/\tilde{\mathbf{d}}, \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v}/0, & \mathbf{g}' &= \mathbf{g}/0, & \mathbf{h}' &= 0/\tilde{\mathbf{h}}, & \mathbf{e}' &= 0/\tilde{\mathbf{e}}, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{c}} &= (0_{(p-1)/2}, \mathbf{c}, 0_{(p-1)/2}), \\ \tilde{\mathbf{d}} &= (0_{(p-1)/2}, \mathbf{d}, 0_{(p-1)/2}), \\ \tilde{\mathbf{h}} &= (0_{(p'-1)/2}, \mathbf{h}, 0_{(p'-1)/2}), \\ \tilde{\mathbf{e}} &= (0_{(p'-1)/2}, \mathbf{e}, 0_{(p'-1)/2}).\end{aligned}$$

Write

$$\begin{aligned}(6) \quad Q &= \mathbf{v}'^{*t} \mathbf{a}' + \mathbf{g}'^t \mathbf{c}' - \mathbf{e}'^t \mathbf{b}'^* + \mathbf{h}'^t \mathbf{d}', \\ (7) \quad R &= \mathbf{v}'^{*t} \mathbf{b}' + \mathbf{g}'^{*t} \mathbf{d}' + \mathbf{e}'^t \mathbf{a}'^* - \mathbf{h}'^{*t} \mathbf{c}', \\ (8) \quad S &= \mathbf{g}'^{*t} \mathbf{a}' - \mathbf{v}'^t \mathbf{c}' - \mathbf{h}'^t \mathbf{b}' - \mathbf{e}'^t \mathbf{d}'^*, \\ (9) \quad T &= \mathbf{g}'^t \mathbf{b}' - \mathbf{v}'^t \mathbf{d}' + \mathbf{h}'^{*t} \mathbf{a}' + \mathbf{e}'^t \mathbf{c}'^*.\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}(\psi_Q \psi_Q^* + \psi_R \psi_R^* + \psi_S \psi_S^* + \psi_T \psi_T^*)(x, y) \\ = (\psi_{\mathbf{a}} \psi_{\mathbf{a}}^* + \psi_{\mathbf{b}} \psi_{\mathbf{b}}^* + \psi_{\mathbf{c}} \psi_{\mathbf{c}}^* + \psi_{\mathbf{d}} \psi_{\mathbf{d}}^*)(x^2) (\psi_{\mathbf{e}} \psi_{\mathbf{e}}^* + \psi_{\mathbf{v}} \psi_{\mathbf{v}}^* + \psi_{\mathbf{g}} \psi_{\mathbf{g}}^* + \psi_{\mathbf{h}} \psi_{\mathbf{h}}^*)(y^2).\end{aligned}$$

Moreover, $Q, R, S, T \in \mathcal{T}_0^{(2(n+p')-1) \times (2(m+p)-1)}$ if $p, p' > 1$, and $Q, R, S, T \in \mathcal{T}^{(2n+1) \times (2m+1)}$ if $p = p' = 1$.

Proof. Notice that $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}', \mathbf{d}' \in \mathcal{T}_0^{2(m+p)-1}$ and $\mathbf{v}', \mathbf{g}', \mathbf{h}', \mathbf{e}' \in \mathcal{T}_0^{2(n+p')-1}$. It can be checked that $\psi_{\tilde{\mathbf{s}}}(x) = \psi_{\mathbf{s}}(x)$ for every $\mathbf{s} \in \{\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{h}, \mathbf{e}\}$. Thus, by Lemma 2.7 and Lemma 2.10, we have

$$\begin{aligned}(\psi_Q \psi_Q^* + \psi_R \psi_R^* + \psi_S \psi_S^* + \psi_T \psi_T^*)(x, y) \\ = (\psi_{\mathbf{a}'} \psi_{\mathbf{a}'}^* + \psi_{\mathbf{b}'} \psi_{\mathbf{b}'}^* + \psi_{\mathbf{c}'} \psi_{\mathbf{c}'}^* + \psi_{\mathbf{d}'} \psi_{\mathbf{d}'}^*)(x) (\psi_{\mathbf{e}'} \psi_{\mathbf{e}'}^* + \psi_{\mathbf{v}'} \psi_{\mathbf{v}'}^* + \psi_{\mathbf{g}'} \psi_{\mathbf{g}'}^* + \psi_{\mathbf{h}'} \psi_{\mathbf{h}'}^*)(y) \\ = (\psi_{\mathbf{a}} \psi_{\mathbf{a}}^* + \psi_{\mathbf{b}} \psi_{\mathbf{b}}^* + \psi_{\mathbf{c}} \psi_{\mathbf{c}}^* + \psi_{\mathbf{d}} \psi_{\mathbf{d}}^*)(x^2) (\psi_{\mathbf{e}} \psi_{\mathbf{e}}^* + \psi_{\mathbf{v}} \psi_{\mathbf{v}}^* + \psi_{\mathbf{g}} \psi_{\mathbf{g}}^* + \psi_{\mathbf{h}} \psi_{\mathbf{h}}^*)(y^2).\end{aligned}$$

The last statement is clear. \square

Lemma 2.12. *If $A \in \mathcal{R}^{n \times m}$, then $\psi_{\text{seq}(A)}(x) = \psi_A(x, x^m)$.*

The assumption that p and p' be odd in Lemma 2.10 is insignificant, if we allow 0 in sequences. Indeed, if $a \in \mathcal{R}^{m+p}$ with p even, then $a' = (a \mid 0) \in \mathcal{R}^{m+p+1}$ and $\psi_{\mathbf{a}} \psi_{\mathbf{a}}^* = \psi_{\mathbf{a}'} \psi_{\mathbf{a}'}^*$.

Theorem 2.13. *Let m, n be positive integers, p, p' be odd positive integers, and*

$$\begin{aligned}\mathbf{a}, \mathbf{b} &\in \mathcal{T}^{m+p}, \\ \mathbf{c}, \mathbf{d} &\in \mathcal{T}^m, \\ \mathbf{v}, \mathbf{g} &\in \mathcal{T}^{n+p'}, \\ \mathbf{h}, \mathbf{e} &\in \mathcal{T}^n\end{aligned}$$

satisfy

$$\begin{aligned}(f_{\mathbf{a}} f_{\mathbf{a}}^* + f_{\mathbf{b}} f_{\mathbf{b}}^* + f_{\mathbf{c}} f_{\mathbf{c}}^* + f_{\mathbf{d}} f_{\mathbf{d}}^*)(x) &= 2(2m + p), \\ (f_{\mathbf{v}} f_{\mathbf{v}}^* + f_{\mathbf{g}} f_{\mathbf{g}}^* + f_{\mathbf{h}} f_{\mathbf{h}}^* + f_{\mathbf{e}} f_{\mathbf{e}}^*)(x) &= 2(2n + p').\end{aligned}$$

Then there exist $\mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathcal{T}_0^{(2(n+p')-1)(2(m+p)-1)}$ such that

$$(f_{\mathbf{q}}f_{\mathbf{q}}^* + f_{\mathbf{r}}f_{\mathbf{r}}^* + f_{\mathbf{s}}f_{\mathbf{s}}^* + f_{\mathbf{t}}f_{\mathbf{t}}^*)(x) = 4(2m+p)(2n+p').$$

Moreover, $\mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathcal{T}^{(2n+1)(2m+1)}$ if $p = p' = 1$.

Proof. Define Q, R, S, T as in (6), (7), (8), (9) in Lemma 2.11, respectively. Write

$$\mathbf{q} = \text{seq}(Q), \quad \mathbf{r} = \text{seq}(R), \quad \mathbf{s} = \text{seq}(S), \quad \mathbf{t} = \text{seq}(T).$$

By Lemma 2.11, $Q, R, S, T \in \mathcal{T}^{(2n+1) \times (2m+1)}$ if $p = p' = 1$. Thus, the last statement holds immediately by the definition. Applying Lemma 2.5, Lemma 2.11 and Lemma 2.12, we have

$$\begin{aligned} & (f_{\mathbf{q}}f_{\mathbf{q}}^* + f_{\mathbf{r}}f_{\mathbf{r}}^* + f_{\mathbf{s}}f_{\mathbf{s}}^* + f_{\mathbf{t}}f_{\mathbf{t}}^*)(x^2) \\ &= (\psi_{\mathbf{q}}\psi_{\mathbf{q}}^* + \psi_{\mathbf{r}}\psi_{\mathbf{r}}^* + \psi_{\mathbf{s}}\psi_{\mathbf{s}}^* + \psi_{\mathbf{t}}\psi_{\mathbf{t}}^*)(x) \\ &= (\psi_Q\psi_Q^* + \psi_R\psi_R^* + \psi_S\psi_S^* + \psi_T\psi_T^*)(x, x^{2(m+p)-1}) \\ &= (\psi_{\mathbf{a}}\psi_{\mathbf{a}}^* + \psi_{\mathbf{b}}\psi_{\mathbf{b}}^* + \psi_{\mathbf{c}}\psi_{\mathbf{c}}^* + \psi_{\mathbf{d}}\psi_{\mathbf{d}}^*)(x^2)(\psi_{\mathbf{e}}\psi_{\mathbf{e}}^* + \psi_{\mathbf{v}}\psi_{\mathbf{v}}^* + \psi_{\mathbf{g}}\psi_{\mathbf{g}}^* + \psi_{\mathbf{h}}\psi_{\mathbf{h}}^*)(x^{2(2(m+p)-1)}) \\ &= (f_{\mathbf{a}}f_{\mathbf{a}}^* + f_{\mathbf{b}}f_{\mathbf{b}}^* + f_{\mathbf{c}}f_{\mathbf{c}}^* + f_{\mathbf{d}}f_{\mathbf{d}}^*)(x^2)(f_{\mathbf{e}}f_{\mathbf{e}}^* + f_{\mathbf{v}}f_{\mathbf{v}}^* + f_{\mathbf{g}}f_{\mathbf{g}}^* + f_{\mathbf{h}}f_{\mathbf{h}}^*)(x^{2(2(m+p)-1)}) \\ &= 4(2m+p)(2n+p'). \end{aligned}$$

Hence the proof is complete. \square

Finally, we see that Theorem 2.2 is a special case of Theorem 2.13 with $p = p' = 1$. We already showed that Theorem 2.1 follows from Theorem 2.2. Hence, this method also can be used for proving Theorem 2.1.

Acknowledgements. The author would like to thank Professor Akihiro Munemasa for his supervision of this work.

REFERENCES

- [1] G. Cohen, D. Rubie, J. Seberry, C. Koukouvinos, S. Kounias, and M. Yamada, A survey of base sequences, disjoint complementary sequences and $OD(4t; t, t, t, t)$, J. Combin. Math. Combin. Comput. 5 (1989), 69–103.
- [2] R. Craigen, H. Kharaghani, Orthogonal designs in: Handbook of Comb. Des. (C.J. Colbourn and J.H. Dinitz., eds.), 2nd Ed., pp. 280–295, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, FL, 2007.
- [3] R. Craigen, W. Holzmann, H. Kharaghani, Complex Golay sequences: structure and applications, Disc. Math. 252 (2000), 73–89.
- [4] R. Craigen, W. Gibson, C. Koukouvinos, An update on primitive ternary complementary pairs, J. Combin. Theory Ser. A 114 (2007), 957–963.
- [5] M.L. Curtis, Matrix Groups, New York: Springer-Verlag, 1979.
- [6] D. Ž. Đoković, K. Zhao, An octonion algebra originating in combinatorics, Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), 4187–4195.
- [7] H. Kharaghani, C. Koukouvinos, Complementary, base and Turyn sequences in: Handbook of Comb. Des. (C.J. Colbourn and J.H. Dinitz., eds.), 2nd Ed., pp. 317–321, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, FL, 2007.
- [8] H. Kharaghani, B. Tayfeh-Rezaie, A Hadamard matrix of order 428, J. Combin. Designs 13 (2005), 435–440.
- [9] K. J. Horadam, Hadamard matrices and their applications, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2007.

- [10] C. Koukouvinos, J. Seberry, Addendum to Further results on base sequences, disjoint complementary sequences, $OD(4t; t, t, t, t)$, and the excess of Hadamard matrices, *Cong. Numer.* 82 (1991), 97–103.
- [11] I. Livinskyi, Asymptotic existence of Hadamard matrices, M.Sc. thesis, University of Manitoba, <http://hdl.handle.net/1993/8915>, 2012.
- [12] J. Seberry, M. Yamada, Hadamard matrices, sequences and block designs, in *Contemporary Design Theory: A Collection of Surveys*, Eds. J.H. Dinitz and D.R. Stinson, J. Wiley, New York, 1992, pp. 431–560.
- [13] J. Seberry, B J. Wysocki, T. A. Wysocki, On some applications of Hadamard matrices, *Metrika*, 62 (2005), 221–239.
- [14] E. Study, Zur Theorie der linearen Gleichungen, *Acta Math.* 42 (1920), 1–61.
- [15] C. H. Yang, Lagrange identity for polynomials and δ -codes of length $7t$ and $13t$, *Proc. Amer. Math. Soc.* 88 (1983), 746–750.
- [16] C. H. Yang, On composition of four-symbol δ -codes and Hadamard matrices, *Proc. Amer. Math. Soc.* 107 (1989), 763–776.
- [17] C. H. Yang, On Hadamard Matrices Constructible by Circulant Submatrices, *Math. Comp.* Vol 25, 113 (1971), 181–186.
- [18] R. J. Turyn, An infinite class of Williamson matrices, *J. Combin. Theory Ser. A*, 12 (1972), 319–321.

RESEARCH CENTER FOR PURE AND APPLIED MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF INFORMATION SCIENCES, TOHOKU UNIVERSITY

E-mail address: pritta@ims.is.tohoku.ac.jp

桁分離型ゲーム

入江 佑樹 (千葉大学融合理工学府)

桁分離型関数を導入し, これらの関数を用いて構成したゲームの族に対して Sprague-Grundy 関数の明示公式を与える.

1 はじめに

本稿では二人対戦不偏ゲームを扱う. このようなゲームは, 次節で述べるように, 有向グラフで表せる. ゲームにおいて大事なことは, 相手に勝つことであり, そのためには必勝法を与えれば良い. 不偏ゲームについては, ゲームの各局面に Sprague-Grundy 数と呼ばれるものを割り当てることで, 原理的には必勝法を得られることが Sprague [7] と Grundy [5] によって 1930 年代に独立に示された. さらに彼らはニムというゲームの Sprague-Grundy 関数の明示公式も与えた. その後, 様々な不偏ゲームの研究が進められていく. 特に 1954 年, Welter [8] によって今では Welter ゲームと呼ばれるゲームの Sprague-Grundy 関数の明示公式が与えられた. 明示公式が得られている例は少なく, 例えばニムの誘導部分グラフでは, 著者が知る限り自明なものを除くと, ニム自身と Welter ゲームのみであった. 本研究は, 三つ目の例として三山有限反転ニムというゲームを見つけたことから始まった.

本研究の目的は, ゲームの族を構成し, その Sprague-Grundy 関数の明示公式を与えることである. 本稿では, 上述の反転ニムの Sprague-Grundy 関数が, 桁分離型と呼べる性質を持つことに注目する. そして, 桁分離型関数からゲームの族を構成し, これらの飽和と呼ばれるゲームの Sprague-Grundy 関数の明示公式を与える. *¹ より正確には, ゲームの構成に用いた桁分離型関数自身がそのゲームの Sprague-Grundy 関数と一致する十分条件を与える. 具体的には, 桁分離型関数 Φ の各 L 桁目が, ゲームの L 桁目の Sprague-Grundy 関数になるならば, Φ はゲーム全体の Sprague-Grundy 関数になることを紹介する.

本論に入る前に, Sprague-Grundy 関数は, 他分野とのつながりを持つものも少なくないことを紹介したい. 例えば, 著者は p -飽和 Welter ゲームの Sprague-Grundy 関数と対称群の既約表現との間に一つの関係を与え, 次数が p と素な既約表現に関するある結果を得た [6]. ま

*¹ 飽和を取ると一般にはグラフの辺が増えるため, ニムの誘導部分グラフではなくなってしまうが, 今回の結果のようにゲームとしては良いものに変化することがある. 飽和は 3 節の最後で定義する.

た, Sprague-Grundy 関数が符号のシンドロームと思えるもの [2, 4] や連分数展開と関係するもの [3] も知られている. Sprague-Grundy 関数の研究を進めることで, 他分野との意外なつながりが今後も明らかになることを期待している.

2 ゲーム

ニムからはじめ, 一般のゲームを有向グラフとして定義する. そして, Sprague-Grundy 関数を定義し, 不偏ゲーム理論の基本定理である Sprague-Grundy の定理を紹介する.

2.1 ニム

不偏ゲーム理論は, Bouton [1] によるニムの解析から幕を開けた. ニムのルールを紹介しよう. ゲームをはじめる前に, コインの山を複数個用意する. 二人のプレイヤーは, 交互に一つの山を選び, 一枚以上のコインを取る. 最後の一枚を取った方が勝ち, 言い換えると, 取るコインのなくなった方の負けである.

図 1 の場合でニムを遊んでみよう. この例ではコインの山が三つあり, それぞれ一枚, 二枚, 三枚用意されている. 例えば先手が右の山から二枚取ったとしよう. 対する後手は, 中央から二枚取る. すると, 先手は左右のどちらかから一枚取るしかなく, いずれの場合も後手が最後の一枚を取り, 後手の勝ちである. 実は後手は必勝法を知っていて, それに沿って手を打っていたのだが, これについては後ほど Sprague-Grundy 数を使って説明する.

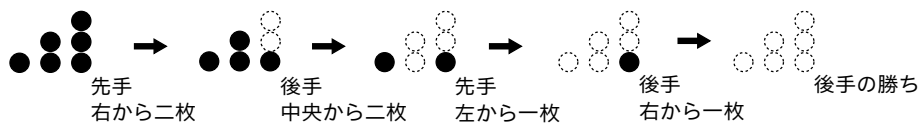


図 1 ニムの対戦例 (一枚, 二枚, 三枚からなる三つのコインの山の場合).

2.2 ゲームの定義

本稿ではゲームを, 頂点集合を局面全体, 局面から局面に移動できるときに辺で結び, 有向グラフで表現する. まず, ニムを有向グラフで表そう. \mathbb{N} を非負整数全体, $m \in \mathbb{N}$ に対して $[m] = \{0, 1, \dots, m-1\}$ とする. $\mathcal{P} = \mathbb{N}^m$ として

$$A = \{(X, Y) \in \mathcal{P}^2 : X^i \geq Y^i \ (i \in [m]), \text{dist}(X, Y) = 1\}$$

とする. ただし, $X = (X^0, \dots, X^{m-1})$ であり, $\text{dist}(X, Y)$ は Hamming 距離を表す. すなわち $\text{dist}(X, Y) = |\{i \in [m] : X^i \neq Y^i\}|$. ニムは有向グラフ (\mathcal{P}, A) で表現でき, このグラフを \mathcal{N}^m

で表す. 例えば, 図 1 の対戦は $(1, 2, 3) \rightarrow (1, 2, 1) \rightarrow (1, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 0)$ と表せる.

一般に Γ を有向グラフ $(\mathcal{P}, \mathcal{A})$ としよう. すなわち, \mathcal{P} は集合で, \mathcal{A} は \mathcal{P}^2 の部分集合である. グラフ Γ が **(短不偏) ゲーム** とは, Γ の各頂点 $X \in \mathcal{P}$ からはじまる最長パスの長さが有限と定義する. 例えば図 2 の場合, 左のグラフはゲームだが, 右はゲームではない. 一般に有限グラフの場合, ゲームであることと閉路を持たないことは同値である. ちなみに, 閉路を持つ場合, 遊ぶゲームとしては終わらないゲーム (引き分けのあるゲーム) になる.



図 2 ゲームとゲームでない例.

ゲームの用語を準備する. Γ をゲーム $(\mathcal{P}, \mathcal{A})$ とする. Γ の頂点集合 \mathcal{P} を **局面集合** と呼び, $\mathcal{P}(\Gamma)$ で表す. Γ の辺集合 \mathcal{A} を $\mathcal{A}(\Gamma)$ で表す. $(X, Y) \in \mathcal{A}(\Gamma)$ のとき, Y を X の **オプション** と呼ぶ. オプションを持たない局面を **終局面** と呼ぶ. 最長パスの長さが有限という条件から, ゲームは必ず終局面を持つ. ゲームの誘導部分グラフを **誘導部分ゲーム** と呼ぶ.

2.3 Sprague-Grundy の定理

Sprague-Grundy 関数を定義し, 不偏ゲーム理論における基本定理である Sprague-Grundy の定理を紹介する. この定理から例えば, ゲームの必勝法が得られる.

ゲーム Γ の局面 X に対して, X の **Sprague-Grundy 数** $\text{sg}_\Gamma(X)$ を次を満たす最小の非負整数 n として, 再帰的に定義する:

$$X \text{ の全てのオプション } Y \text{ に対して } n \neq \text{sg}_\Gamma(Y).$$

ここで, ゲームは必ず終局面を持つことを思い出そう. 終局面はオプションを持たないため, 定義から終局面の Sprague-Grundy 数は 0 になる. Sprague-Grundy 数は終局面から順々に定まっていく. 関数 $\text{sg}_\Gamma : \mathcal{P}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{N}$ を Γ の **Sprague-Grundy 関数** と呼ぶ.

図 3 にニムの Sprague-Grundy 数の例を示す. この例の場合, まず終局面 $(0, 0)$ の Sprague-Grundy 数が 0 と決まる. 次に $(0, 1)$ の Sprague-Grundy 数が 0 でない最小の非負整数, すなわち 1 となる. 同様に $(1, 0)$ は 1 となり, $(1, 1)$ の Sprague-Grundy 数は 1 でない最小の非負整数のため 0 となる. このようにして他の Sprague-Grundy 数も求めることができる.

Sprague [7] と Grundy [5] は, どんなゲームも本質的にはニムと思えることを示した. この結果は Sprague-Grundy の定理と呼ばれている. このことをみてみよう. Γ をゲーム, X をその局面とする. $g = \text{sg}_\Gamma(X)$ とおき, X とニムの局面 (g) を比較する. $X_g = X$ としよう. また, X_g のオプションで Sprague-Grundy 数が $h \in \mathbb{N}$ となるものを Y_h と一般に表し, h を 3 通りに

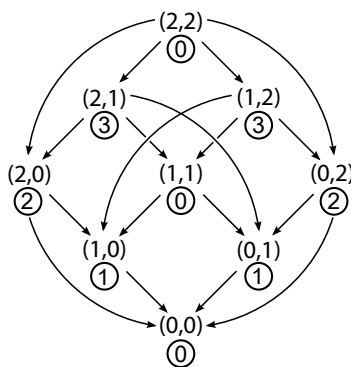


図3 ニムの Sprague-Grundy 数の例.

分けて Y_h について考える.

- (1) $(h < g)$ Y_h は存在する.
- (2) $(h = g)$ Y_h は存在しない.
- (3) $(h > g)$ Y_h は存在するかどうかわからない.

ここで(3)の場合で Y_h があった場合を考えよう. このとき Y_h はオプション X'_g で $\text{sg}_\Gamma(X'_g) = g$ となるものを持つ. よって $X_g \rightarrow Y_h$ という手は, $Y_h \rightarrow X'_g$ という手によって必ず応じることができる. そこでこのような $X_g \rightarrow Y_h$ という手を **可逆手**, $Y_h \rightarrow X'_g$ をその **逆手** と呼ぶことにしよう. 可逆手は逆手によって必ず応じられるため, ある意味で冗長なやりとりといえる. そこでこの可逆手と逆手の攻防を無視してみると, 結局(1)の手しかないことになる. 言い換えると X_g のオプションは Y_0, \dots, Y_{g-1} のみとなる. ニムの局面 (g) のオプションも $(0), \dots, (g-1)$ のみのため, X_g と (g) は (可逆手と逆手の部分を無視することで) 同じと思える.

特に, Sprague-Grundy 数が 0 の局面からはじめると, 可逆手しかないため, 後手が必ず勝てることがわかる. このことを図3で $(2,2)$ からはじめた場合で見よう. $(2,2)$ の Sprague-Grundy 数は 0 のため, 先手は可逆手である Sprague-Grundy 数が 1 以上の局面にしな移動できない. ここでは例えば $(1,2)$ へ移動したとしよう. 対する後手は, Sprague-Grundy 数が 0 の局面に移動する逆手で応じることができ, 実際, $(1,1)$ がそれである. すると先手は, 再び可逆手しかなく, たとえば $(1,0)$ に移動したとすると, 最後に後手が $(0,0)$ に移動して後手の勝ちとなる. そこで以下では, Sprague-Grundy 数が 0 の局面を **(後手) 必勝局面** と呼ぶ.

Sprague と Grundy はさらにニムの Sprague-Grundy 関数が次で表せることも示した:

$$\text{sg}_{\mathcal{N}^m}(X) = X^0 \oplus_2 \dots \oplus_2 X^{m-1}.$$

ただし \oplus_2 は 2 進法で繰り上がりのない足し算を表す. 以下ではニムのように Sprague-Grundy 関数が明示的に表せる例を構成する.

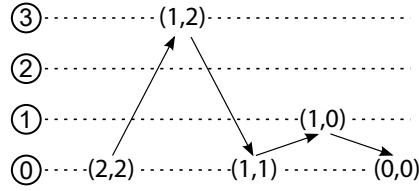


図4 (2,2)からは可逆手しかないため、後手が必ず勝てる。

3 反転ニム

本節では、まずニムの置換を用いて有限反転ニムを構成し、このゲームの Sprague-Grundy 関数の明示公式を与える。次に、得られた明示公式を用いて、有限反転ニムを反転ニムへ拡張する。この拡張法がより一般的なゲームの族の構成につながる。

3.1 有限反転ニム

有限反転ニムを構成するため、ニムを置換してゲームを作ろう。 H を正整数とする。ニム \mathcal{N}^m の $[2^H]^m$ への誘導部分ゲームを $\mathcal{N}^{m,H}$ で表す。 $\mathcal{N}^{m,H}$ の必勝局面全体を $W^{m,H}$ で表す：

$$W^{m,H} = \{X \in [2^H]^m : X^0 \oplus_2 \cdots \oplus_2 X^{m-1} = 0\}.$$

集合 $[2^H]$ についての対称群を $\text{Sym}([2^H])$ で表す。置換 $\sigma \in \text{Sym}([2^H])$ に対して、

$$\sigma(W^{m,H}) = \{(\sigma(X^0), \dots, \sigma(X^{m-1})) \in [2^H]^m : (X^0, \dots, X^{m-1}) \in W^{m,H}\}.$$

必勝局面が $\sigma(W^{m,H})$ となる $\mathcal{N}^{m,H}$ の部分ゲームの中で（局面集合が包含関係で）最大のものを $\sigma(\mathcal{N}^{m,H})$ で表す。Sprague-Grundy 関数の定義から $\sigma(\mathcal{N}^{m,H})$ の局面集合は次になる：

$$\sigma(W^{m,H}) \cup \bigcup_{X \in \sigma(W^{m,H})} \text{Prt}(X). \quad (3.1)$$

ここで、 $\text{Prt}(X)$ は X の親集合、すなわち、 $\text{Prt}(X) = \{Y \in \mathcal{P}(\mathcal{N}^{m,H}) : (Y, X) \in \mathcal{A}(\mathcal{N}^{m,H})\}$ である。 $\mathcal{F}^{m,H}$ で $\sigma(\mathcal{N}^{m,H})$ 全体を表そう。以下では $\mathcal{F}^{m,H}$ に含まれるゲーム Γ の局面数 $|\Gamma| (= |\mathcal{P}(\Gamma)|)$ の度数分布を調べる。この分布を単に $\mathcal{F}^{m,H}$ の**度数分布**と呼ぶことにする。

例 3.1. $m = 3, H = 1$ とする。このとき $\text{Sym}([2^H]) = \{(), (0\ 1)\}$ のため、

$$\mathcal{F}^{3,1} = \{\mathcal{N}^{3,1}, (0\ 1)(\mathcal{N}^{3,1})\}.$$

それでは $\mathcal{F}^{3,1}$ に含まれるゲームの局面数を数えよう. まず $|\mathcal{N}^{3,1}| = |[2]^3| = 8$ である. 次に $|(0\ 1)(\mathcal{N}^{3,1})| = 7$ を示そう. $\sigma = (0\ 1)$ とする. このとき

$$\sigma(\mathcal{W}^{3,1}) = \sigma(\{(0,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)\}) = \{(1,1,1), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}.$$

ここで $(1,1,0), (1,0,1) \in \text{Prt}((1,0,0))$ と $(0,1,1) \in \text{Prt}((0,1,0))$ のため, (3.1) より $(0\ 1)(\mathcal{N}^{3,1})$ の局面集合は次である:

$$\{(1,1,1), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \cup \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\} = [2]^3 \setminus \{(0,0,0)\}.$$

よって $|(0\ 1)(\mathcal{N}^{3,1})| = 7$ である. 以上から $\mathcal{F}^{3,1}$ の度数分布は次になる:

$$\frac{7}{1} \quad \frac{8}{1}$$

命題 3.2. m が奇数ならば, $\mathcal{F}^{m,H}$ の度数分布は対称分布になる.

例えば, $\mathcal{F}^{3,3}$ の度数分布は次の表のようになる.

400	406	410	412	...	500	502	506	512
1	3	1	5	...	5	1	3	1

$\mathcal{F}^{m,H}$ に含まれるゲームで局面数が最大となるのは $\mathcal{N}^{m,H}$ のみである. 命題 3.2 より局面数が最小となるゲームも唯一である. この最小のゲームを **高さ H の m 山有限反転ニム** と呼び, $\tilde{\mathcal{N}}^{m,H}$ で表そう. $\tilde{\mathcal{N}}^{3,1}$ は $(0,1)(\mathcal{N}^{3,1})$ である. 一般に, σ をビット反転 $x \mapsto x \oplus (2^H - 1)$ とするとき $\tilde{\mathcal{N}}^{m,H} = \sigma(\mathcal{N}^{m,H})$ である. 有限反転ニムで取り除かれた局面全体を 図 5 に図示する.

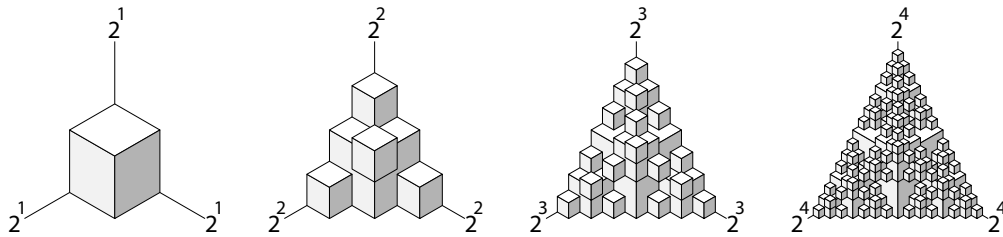


図 5 三山の有限反転ニムで取り除かれた局面 $[2^H]^3 \setminus \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{N}}^{3,H})$ の様子 ($H = 1, 2, 3, 4$). (X^0, X^1, X^1) を $(X^0 + \varepsilon^0, X^1 + \varepsilon^1, X^2 + \varepsilon^2)$ ($\varepsilon^i \in \{0, 1\}$) を頂点とする立方体で表している.

有限反転ニムの Sprague-Grundy 関数の明示公式を与えるため, 記号を導入する. b を 2 以上の整数とする. $x \in \mathbb{N}$ に対して, $x_L^{(b)}$ で x を b 進展開したときの L 桁目を表そう. すなわち $x = \sum_{L \in \mathbb{N}} x_L^{(b)} p^L$ かつ $x_L^{(b)} \in [p]$ である. $X \in \mathbb{N}^m$ に対して,

$$X_L^{(p)} = ((X^0)_L^{(p)}, \dots, (X^{m-1})_L^{(p)})$$

とする. $X_L^{(p)}$ は X の L 桁目にあたるものである. 誤解の恐れがないときは (b) を省略して, x_L や X_L といった記号を使う. 整数値関数 $\Psi^H : \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ を次で定義する:

$$\Psi^H(X) = X^0 \oplus_2 \cdots \oplus_2 X^{m-1} \oplus_2 (2^H - 1) - 2\delta^H(X). \quad (3.2)$$

ただし $\delta^H(X) = \sum_{L=0}^{H-1} \delta(X_L^{(2)})2^L$ であり,

$$\delta(X_L) = \begin{cases} 1 & \text{if } X_L = (0, \dots, 0), \\ 0 & \text{if } X_L \neq (0, \dots, 0). \end{cases}$$

定理 3.3. もし $m \leq 3$ または $H \leq 3$ ならば, 高さ H の m 山有限反転ニム $\tilde{\mathcal{N}}^{m,H}$ の Sprague-Grundy 関数は $\Psi^H(X)$ で与えられる. すなわち X が $\tilde{\mathcal{N}}^{m,H}$ の局面のとき $\text{sg}_{\tilde{\mathcal{N}}^{m,H}}(X) = \Psi^H(X)$.

例 3.4. $H = 3, X = (1, 4, 5)$ とする. X^i は 2 進法では $X^0 = 1, X^1 = 100, X^2 = 101$ のため

$$X_0 = (1, 0, 1), X_1 = (0, 0, 0), X_2 = (0, 1, 1).$$

よって $\delta(X_L)$ は $L = 1$ のときのみ 1 のため, $\delta^3(X) = 10$ となり,

$$\Psi^3(X) = 1 \oplus_2 100 \oplus_2 101 \oplus_2 111 - 100 = 11.$$

残念ながら, $m > 3$ かつ $H > 3$ の有限反転ニムの Sprague-Grundy 関数は Ψ^H で与えることはできない. しかし, 飽和 (本節の最後で定義を述べる) を考えることで, 次のように同様のことが成立する. 一般にニムの誘導部分ゲーム Γ に対して, Γ の b -飽和を $\Gamma^{b\text{-sat}}$ とする. このとき, 有限反転ニムの 2-飽和 $(\tilde{\mathcal{N}}^{m,H})^{2\text{-sat}}$ の Sprague-Grundy 関数は Ψ^H になる.

3.2 有限反転ニムの拡張

Ψ^H を使って, 有限反転ニムを拡張しよう. まず, X を高さ H の有限反転ニムの局面とすると, もちろん $\Psi^H(X) \geq 0$ である. ここで面白いことにこの逆が成立する:

命題 3.5. $X \in [2^H]^m$ が高さ H の有限反転ニムの局面となる必要十分条件は $\Psi^H(X) \geq 0$ である.

上の命題をもとに, 有限反転ニムを拡張した反転ニムを次で定義する. **高さ H の m 山反転ニム** とは m 山ニム \mathcal{N}^m を

$$\{X \in \mathbb{N}^m : \Psi^H(X) \geq 0\}$$

に誘導して得られる部分ゲームとする. このとき驚くべきことに, 高さ H の m 山反転ニムの 2-飽和を Δ とすると, Δ の局面 X の Sprague-Grundy 数は $\Psi^H(X)$ になる.

以上のことを一般化して考えよう. ゲーム Γ と $\Phi: \mathcal{P}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{Z}$ に対して $\Gamma[\Phi]$ で Γ を

$$\{X \in \mathcal{P}(\Gamma) : \Phi(X) \geq 0\}$$

に誘導して得られる部分ゲームを表そう. 例えば Φ が Ψ^H のときは, $\mathcal{N}^m[\Psi^H]$ は反転ニムであり, さらにこのゲームの 2-飽和の Sprague-Grundy 関数が Ψ^H になる. そこで次の問を考えよう:

問 3.6. $\Phi: \mathcal{N}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ とする. いつ Φ は $(\mathcal{N}^m[\Phi])^{b\text{-sat}}$ の Sprague-Grundy 関数になるか?

次節で問を満たすような Φ の十分条件を与える.

補足：飽和

b -指数 k のゲームを導入し, b -飽和を定義する. 大雑把に述べると, b -飽和は辺を増やしていったときに, Sprague-Grundy 関数が変わらなくなった状態を指す. 詳細は [6] にある.

b -指数 k のゲームを定義する. Γ を \mathcal{N}^m の誘導部分ゲームとする. 正整数 k に対して

$$\mathcal{A}_k = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(\Gamma)^2 : X - Y \in \mathcal{D}^m, 0 < \text{dist}(X, Y) < k\} \quad (3.3)$$

と定義する. ただし \mathcal{D}^m は次の条件を満たす $D \in \mathbb{N}^m$ 全体である:

$$\text{ord}_b \left(\sum_{i \in [m]} D^i \right) = \min \{ \text{ord}_b(D^i) : i \in [m] \}.$$

ここで, $\text{ord}_b(x)$ は x の b -adic order である. すなわち

$$\text{ord}_b(x) = \begin{cases} \max \{ L \in \mathbb{N} : b^L \mid x \} & \text{if } x \neq 0, \\ \infty & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

このとき b -指数 k の Γ を $(\mathcal{P}, \mathcal{A}_k)$ で定義し, $\Gamma_{(b,k)}$ で表す.

それでは b -飽和を定義する. Γ は \mathcal{N}^m の誘導部分ゲームとする. ゲーム $\Gamma_{(b,k)}$ が Γ の b -飽和とは $\Gamma_{(b,k)}$ の Sprague-Grundy 関数が $\Gamma_{(b,m+1)}$ の Sprague-Grundy 関数と一致することと定義する. また, $\Gamma_{(b,k)}$ が Γ の b -飽和となる最小の k を Γ の b -飽和指数と呼ぶ. たとえば, ニムの b -飽和指数は b になる. 特に $b=2$ のときは, ニム自身が自分の 2-飽和となる. 言い換えると, この場合は辺を増やしたにもかかわらず, Sprague-Grundy 数が全く変わらない.

4 桁分離型

本節ではまず桁分離型関数を定義し, ニムと反転ニムの Sprague-Grundy 関数が 2 進法で桁分離型であることを見る. そして, 主結果として Φ が b 進法で桁分離型で, かつ, Φ の各

L 桁目が $(\mathcal{N}^m[\Phi])^{b\text{-sat}}$ の L 桁目の Sprague-Grundy 関数になるならば、 Φ が $(\mathcal{N}^m[\Phi])^{b\text{-sat}}$ の Sprague-Grundy 関数になることを紹介する. 以下、 b を 2 以上の整数として固定する.

まず桁分離型関数を定義する. \mathbb{N}^m を定義域とする整数値関数 Φ が **b 進法で桁分離型** とは $\phi_L : [b]^m \rightarrow \mathbb{Z}$ ($L \in \mathbb{N}$) で次を満たすものがあることと定義する:

$$\Phi(X) = \sum_{L \in \mathbb{N}} \phi_L(X_L^{(b)}) b^L \text{ for } X \in \mathbb{N}^m. \quad (4.1)$$

(4.1) の右辺で定義される関数を $[\phi_L]_{L \in \mathbb{N}}$ で表す.

反転ニムの Ψ^H は 2 進法で桁分離型である. 実際,

$$\psi_L^H(X_L) = \begin{cases} X_L^0 \oplus_2 \cdots \oplus_2 X_L^{m-1} \oplus_2 1 - 2\delta(X_L) & \text{if } 0 \leq L < H, \\ X_L^0 \oplus_2 \cdots \oplus_2 X_L^{m-1} & \text{if } L \geq H \end{cases}$$

とすると $\Psi^H = [\psi_L^H]_{L \in \mathbb{N}}$ となる. 特に $H = 0$ の場合がニムだったので、ニムの Sprague-Grundy 関数も 2 進法で桁分離型である.

主結果を述べるために記号を導入する. α を非負整数として、各 $L \in \mathbb{N}$ に対して ξ_L を $[\alpha_L]^m$ の部分集合とする. このとき、整数値関数 $\phi_L^{\xi, \alpha} : [b]^m \rightarrow \mathbb{Z}$ を次で定義する:

$$\phi_L^{\xi, \alpha}(x) = x^0 \oplus_b \cdots \oplus_b x^{m-1} \ominus_b \alpha_L - b \cdot I^{\xi_L}(x) \text{ for } x = (x^0, \dots, x^{m-1}) \in [b]^m.$$

ただし、 $\oplus_b (\ominus_b)$ は b 進法で繰り上がり (下がり) のない足し算 (引き算) を表し、

$$I^{\xi_L}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \xi_L, \\ 0 & \text{if } x \notin \xi_L. \end{cases}$$

さらに、 $\Phi^{\xi, \alpha} = [\phi_L^{\xi, \alpha}]_{L \in \mathbb{N}}$ とおく. また、 $\Gamma^{\xi, \alpha}$ と $\Gamma_L^{\xi, \alpha}$ をそれぞれ $\mathcal{N}^m[\Phi^{\xi, \alpha}]$ と $\mathcal{N}^{m,1}[\phi_L^{\xi, \alpha}]$ とする. さらに、 $\Delta^{\xi, \alpha} = (\Gamma^{\xi, \alpha})^{b\text{-sat}}$ と $\Delta_L^{\xi, \alpha} = (\Gamma_L^{\xi, \alpha})^{b\text{-sat}}$ とする.

例 4.1 (反転ニム). $b = 2$ で $H \in \mathbb{N}$ とする. $\alpha = 2^H - 1$ として ξ_L を次で定義する:

$$\xi_L = \begin{cases} \{(0, \dots, 0)\} & \text{if } L < H, \\ \emptyset & \text{if } L \geq H. \end{cases}$$

このとき $\phi_L^{\xi, \alpha} = \psi_L^H$ である. よって $\Gamma^{\xi, \alpha}$ は高さ H の反転ニムであり、 $\Delta^{\xi, \alpha}$ の Sprague-Grundy 関数は $\Phi^{\xi, \alpha} (= \Psi^H)$ となる. ここで注意したいことは $\Delta_L^{\xi, \alpha}$ の Sprague-Grundy 関数は $\phi_L^{\xi, \alpha} (= \psi_L^H)$ になることである. すなわち、関数 $\Phi^{\xi, \alpha}$ の L 桁目といえる $\phi_L^{\xi, \alpha}$ が、ゲーム $\Delta^{\xi, \alpha}$ の L 桁目といえる $\Delta_L^{\xi, \alpha}$ の Sprague-Grundy 関数を与えている. 実は一般にこのような状況のとき、 $\Phi^{\xi, \alpha}$ が $\Delta^{\xi, \alpha}$ の Sprague-Grundy 関数を与える.

定理 4.2. α を非負整数として, 各 $L \in \mathbb{N}$ に対して $\xi_L \subseteq [\alpha_L]^m$ とする. 各 $L \in \mathbb{N}$ に対して $\phi_L^{\xi, \alpha}$ が $\Delta_L^{\xi, \alpha}$ の Sprague-Grundy 関数を与えるとき, $\Phi^{\xi, \alpha}$ は $\Delta^{\xi, \alpha}$ の Sprague-Grundy 関数を与える. すなわち, $\Delta^{\xi, \alpha}$ の局面 X に対して $\text{sg}_{\Delta^{\xi, \alpha}}(X) = \Phi^{\xi, \alpha}(X)$.

例 4.3. α を非負整数として

$$\xi_L = \{(t^0, \dots, t^{m-1}) \in [b]^m : t^0 + \dots + t^{m-1} < \alpha_L\}$$

とする. このとき $\phi_L^{\xi, \alpha}$ は $\Delta_L^{\xi, \alpha}$ の Sprague-Grundy 関数になる. よって定理 4.2 より, $\Phi^{\xi, \alpha}$ が $\Delta^{\xi, \alpha}$ の Sprague-Grundy 関数を与える. 特に, $\alpha = 1 + b + \dots + b^{H-1}$ のとき, ゲーム $\Gamma^{\xi, \alpha}$ を **高さ H の m 山 b -反転ニム** と呼ぶことにしよう. 2-反転ニムは通常反転ニムである. b -反転ニムについては b -飽和指数も与えることができる.

定理 4.4. 高さ H の m 山 b -反転ニムの b -飽和指数 k は次である:

$$k = \begin{cases} \min(b+1, m+1) & \text{if } b = 2 \text{ and } H > 0, \\ \min(b, m+1) & \text{if } b > 2 \text{ or } H = 0. \end{cases}$$

参考文献

- [1] Charles L. Bouton. Nim, a game with a complete mathematical theory. *The Annals of Mathematics*, 3(1/4):35–39, 1901.
- [2] Richard A. Brualdi and Vera S. Pless. Greedy codes. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 64(1):10–30, September 1993.
- [3] Grant Cairns, Nhan Bao Ho, and Tamás Lengyel. The Sprague–Grundy function of the real game Euclid. *Discrete Mathematics*, 311(6):457–462, 2011.
- [4] John H. Conway and Neil J. A. Sloane. Lexicographic Codes: Error-Correcting Codes from Game Theory. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1986.
- [5] Patrick M. Grundy. Mathematics and games. *Eureka*, 2:6–8, 1939.
- [6] Yuki Irie. p -saturations of Welter’s Game and the Irreducible Representations of Symmetric Groups. *arXiv:1604.07214*, 2016.
- [7] Roland P. Sprague. Über mathematische Kampfspiele. *Tohoku Mathematical Journal, First Series*, 41:438–444, 1935.
- [8] Cornelius P. Welter. The Theory of a Class of Games on a Sequence of Squares, in Terms of the Advancing Operation in a Special Group. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, 57:194–200, 1954.

A型コクセター群の部分バーンサイド環の単元群

近畿大学理工学部 小田文仁 (Fumihito Oda)

本稿は、近畿大学大学院総合理工学研究科若竹昌洋氏との共同研究 [OW] に基づく。

1 Introduction

有限コクセター群 W のすべてのパラボリック部分群の族 \mathcal{P} に関する部分バーンサイド環 (簡単のため PBR と書く) $\Omega(W, \mathcal{P})$ は, Yoshida ([Yo90]) により導入された一般バーンサイド環であり, W のバーンサイド環の部分環である (PBR については [Ta06] を参照). 対称群のヤング部分群に関する PBR の単元群は, [IO15] と [OTY16] で論じられている. 本稿では, A 型の可約コクセター群 W について, その単元群 $\Omega(W, \mathcal{P})^\times$ の構造を決定する.

本稿は以下のように構成されている. Section 2 は, 本稿で用いられるコクセター群, GBR, PBR の定義といくつかの結果を復習する. Section 3 では, PBR $\Omega(W, \mathcal{P})$ のテンソル分解を示す. Section 4 は, 有限群の指標環に関するいくつかの結果を復習する. 最後に, Section 5 で本稿の主結果を証明する.

2 Preliminaries

本稿を通して群は有限群, 環は単位元を持つ環を意味する. \mathcal{O}^\times は, 環 \mathcal{O} の単元群. $\mathcal{O}M$ は, \mathbb{Z} 加群 M の可換環 \mathcal{O} による係数拡大. 有限集合 X に対し $|X|$ は, X の基数. 基本可換 2-群 G に対し, その階数を $r(G)$ と書く.

2.1 Partial Burnside rings

G を群とする. G の部分群 H に対し, (H) は H の G 共役類, すなわち, $(H) := \{gH \mid g \in G\}$, ただし, ${}^g H := gHg^{-1}$ ($g \in G$) とする. X が有限 G 集合のとき, $[X]$ は, X を含む有限 G 集合の同型類を表す. G のバーンサイド環 $\Omega(G)$ は, $[G/H]$, ただし, $(H) \in C(G)$, のすべての \mathbb{Z} 線形結合からなる加群であり, 積が

$$[G/H] \cdot [G/K] = \sum_{HgK \in [H \backslash G/K]} [G/(H \cap {}^g K)],$$

ただし, $C(G)$ は G のすべての部分群の G 共役類全体の集合, $[H \backslash G/K]$ は, G の部分群 H と K による両側剰余類の集合, で与えられた可換環である. しばしば, $\Omega(G)$ の単位元 $[G/G]$ を 1 と書く. 位数 1 の G の部分群を e と書く. G の部分群の族 \mathcal{D} に関する一般バーンサイド環 (簡単のため GBR と書く) $\mathcal{O}\Omega(G, \mathcal{D})$ は [Yo90] で導入された. ここで, G の部分群の族 \mathcal{D} は, G 共役を取る操作で閉じている G の部分群の集合とする. $\Omega(G, \mathcal{D})$ は \mathbb{Z} -基底 $\{[G/H] \mid (H) \in C(\mathcal{D})\}$, ただし, $C(\mathcal{D}) = \{(H) \mid H \in \mathcal{D}\}$, をもつ $\Omega(G)$ の \mathbb{Z} -部分加群である. G -集合 X は, 任意の $x \in X$ の G における安定化群 G_x が \mathcal{D} に含まれるとき, (G, \mathcal{D}) -集合と呼ばれる.

加群 $\Omega(G, \mathcal{D})$ は, (G, \mathcal{D}) -集合と G -写像の圏の Grothendieck 群である. \mathcal{D} が G のすべての部分群の族のとき, $C(\mathcal{D}) = C(G)$ である. G の部分群の族 \mathcal{D} は共通部分を取る操作でとじていて, G を含むとき, $\Omega(G, \mathcal{D})$ は $\Omega(G)$ の部分環である. このとき, G の \mathcal{D} に関する GBR $\Omega(G, \mathcal{D})$ は, G の \mathcal{D} に関する部分バーンサイド環 (*partial Burnside ring*) (簡単のため PBR と書く) と呼ばれる ([Yo90, 3.15 (b)], [Ta06], [OTY16] 参照). 部分群 $H \leq G$ と (左) G -集合 X に対し,

$$\text{inv}_H(X) = \{x \in X \mid hx = x \text{ for all } h \in H\}$$

と書く. [Yo90, Theorem 3.11] により, 任意の $(K) \in C(\mathcal{D})$ に対し,

$$\varphi_H : [G/K] \mapsto |\text{inv}_H(G/K)|, (H) \in C(\mathcal{D})$$

で与えられる写像 $\varphi = (\varphi_H) : \Omega(G, \mathcal{D}) \rightarrow \tilde{\Omega}(G, \mathcal{D}) := \prod_{(H) \in C(\mathcal{D})} \mathbb{Z}$ (ゴースト環と呼ばれる) は単射環準同型である。写像 φ は, $\Omega(G, \mathcal{D})$ のマーク準同型と呼ばれる。PBR $\Omega(G, \mathcal{D})$ の単元群は, ゴースト環の単元群 $\Omega(G, \mathcal{D})^\times$ の部分群なので, 基本可換 2 群である。

2.2 PBR of a Coxeter group

この部分節では, コクセター群のパラボリック部分群の族に関する PBR を復習する。 W は, コクセター系 (W, S) をもつコクセター群とする。 W の部分群は, 標準パラボリック部分群 $W_J := \langle s \mid s \in J \rangle$, ただし $J \subset S$, と W において共役であるときパラボリック部分群という。 \mathcal{P} は, W のすべてのパラボリック部分群の族とする。このとき, 集合 \mathcal{P} は, 共通部分を取る操作で閉じていて, W を含む ([So76] 参照) ので, $\Omega(W, \mathcal{P})$ は W の \mathcal{P} に関する PBR である。 $\Omega(W, \mathcal{P})$ の積公式

$$[W/W_J] \cdot [W/W_K] = \sum_{W_J g W_K \in [W_J \setminus W/W_K]} [W/(W_J \cap {}^g W_K)]$$

が, [So76] で与えられたこと, $\Omega(W, \mathcal{P})$ に関するいくつかの研究結果があること (たとえば [BBTH92], [GP00], [OTY16] を参照) を注意する。 A_{n-1} 型のコクセター群 W の \mathcal{P} に関する PBR の単元群 $\Omega(W, \mathcal{P})^\times$ は, [IO15] と [OTY16] で論じられている。

2.3 Coxeter element

$W = \langle S \rangle$ でコクセター系 (W, S) をもつコクセター群とする。 W の元 c は, $c = \prod_{x \in S} x \in W$ と表されるとき *Coxeter 元* と呼ばれる。 W のコクセター元の全体は, W の一つの共役類をなす (たとえば, [Ca72, Theorem 10.3.1] 参照), すなわち, 共役類 $(c_S) \in cl(W)$ が存在して, c_S がコクセター元であるようなものとれる。 ε は, $s \in S$ に対し, $\varepsilon(s) = -1$ で定まる群準同型 $W \rightarrow \mathbb{R}^\times$ とする。本稿では, それを W の符号という。 W の符号であることを強調したい場合は, しばしば, ε^W のように書く。

Lemma 2.1. *Let (W, S) be a Coxeter system. Let P be a parabolic subgroup of W with $(P) = (W_J) \in C(\mathcal{P})$, where $J \subset S$. Then P includes an element σ_P with $(\sigma_P) = (c_J) \in cl(W)$, where c_J is a Coxeter element of the standard parabolic subgroup W_J . In particular, $\varepsilon^W(\sigma_P) = \varepsilon^W(c_J) = (-1)^{|J|}$.*

Proof. 仮定より, 元 $w \in W$ が存在し $P = {}^w W_J$ を満たすので, $\sigma_P = w c_J w^{-1}$, ただし, c_J は W_J のコクセター元) とおくことにより条件を満たす元が得られる。コクセター元の定義から等式が従う。 \square

2.4 Sign unit

この節では, PBR $\Omega(W, \mathcal{P})$ の元 α (Eq. 2.1) を構成し, α がその PBR の単元群に含まれることを示す。

任意の部分群 $H \leq W$ に対し, H を含むすべてのパラボリック部分群の共通部分として得られるパラボリック部分群を P_H と書く。 Lemma 2.1 により, $(P) = (W_J)$ を満たす W の任意のパラボリック部分群 P は, $P = P_{(\sigma_P)}$, ただし $(\sigma_P) = (c_J)$ を満たす元 σ_P を含む。元 α を

$$\alpha = \sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} [W/W_J] \in \Omega(W, \mathcal{P}) \quad (2.1)$$

とおく。元 α は, $\Omega(W)$ にも含まれる。

Lemma 2.2. *Let φ be the mark homomorphism of $\Omega(W, \mathcal{P})$ and let ε be the signature of W . If $\varphi(\alpha) = (\alpha_H)_{(H) \in C(W)}$, then $\alpha_H = \alpha_{P_H}$ for all $(H) \in C(W)$, and $\alpha_P = \varepsilon(\sigma_P)$ for all $(P) \in C(\mathcal{P})$, where σ_P is a W -conjugate for some Coxeter element of P .*

Proof. If H is a subgroup of W , then by the definition of P_H ,

$$\text{inv}_{P_H}(W/W_J) = \{\sigma W_J \mid P_H \leq \sigma W_J\} = \{\sigma W_J \mid H \leq \sigma W_J\} = \text{inv}_H(W/W_J)$$

for all $J \subset S$. Hence we have that $\alpha_H = \alpha_{P_H}$ for all $(H) \in C(W)$. Since $P = P_{(\sigma_P)}$ for $P \in \mathcal{P}$, we have

$\text{inv}_P(W/W_J) = \text{inv}_{\langle \sigma_P \rangle}(W/W_J)$ for all $J \subset S$. By [So66, Theorem 2], we obtain that for each $P \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma_P) &= \sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} \pi_J(\sigma_P) \\ &= \sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} \varphi_{\langle \sigma_P \rangle}([W/W_J]) \\ &= \sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} \varphi_P([W/W_J]) \\ &= \varphi_P \left(\sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} [W/W_J] \right) \\ &= \alpha_P. \end{aligned}$$

□

Remark 1. Lemma 2.2 follows from [GP00, 3.1.8] also.

Lemma 2.2 は次の定理を証明する.

Theorem 2.3. *Let W be a Coxeter group with Coxeter system (W, S) and let α be an element*

$$\sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} [W/W_J]$$

of $\Omega(W, \mathcal{P})$. Then α is a non-identity unit of $\Omega(W, \mathcal{P})$.

本稿では α を $\Omega(W, \mathcal{P})$ の符号単元 (*sign unit*) とよぶ.

Corollary 2.4. *Let $\Omega(W, \mathcal{P})$ be a PBR relative to \mathcal{P} of W and α the sign unit of $\Omega(W, \mathcal{P})$. Then there exists a subgroup of the unit group $\Omega(W, \mathcal{P})^\times$ generated by -1 and the sign unit α of $\Omega(W, \mathcal{P})$.*

$G = S_n$ に対する仮定 [IO15, Lemma 3.1] と [Yo90, Proposition 7.2] により, 上の Corollary 2.4 の系として [IO15] の Corollary 5.2 の別証明を得る.

Corollary 2.5. [IO15, Corollary 5.2] *Let $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ be a PBR relative to the collection \mathfrak{Y}_n of Young subgroups of S_n for $n \geq 2$ and α the sign unit. Then*

$$\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)^\times = \langle -1, \alpha \rangle.$$

3 Reducible Coxeter groups

3.1 Tensor product

この部分節を通して以下の記法を用いる. $W = W_1 \times W_2$ は有限コクセター群, \mathcal{P} は, W のパラボリック部分群の族とする. このとき, \mathcal{P} は, $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$, ただし, \mathcal{P}_i は W_i ($i = 1, 2$) のパラボリック部分群の族, と等しいことがよく知られている. 最初に, 以下の事実を証明する.

Lemma 3.1. *If X_i is a (W_i, \mathcal{P}_i) -set for $i = 1, 2$, then $X_1 \times X_2$ is a $(W_1 \times W_2, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2)$ -set with the action defined by*

$$(w_1, w_2) \cdot (x_1, x_2) = (w_1 x_1, w_2 x_2),$$

for $w_i \in W_i$ and $x_i \in X_i$.

Proof. Since the correspondence $(w_1, w_2) \mapsto (w_1, w_2)$ induces an isomorphism from $(W_1 \times W_2)_{(x_1, x_2)}$ to $W_{1x_1} \times W_{2x_2}$ for each $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ and $W_{ix_i} \in \mathcal{P}_i$ for $i = 1, 2$, $W_1 \times W_2$ -set $X_1 \times X_2$ is a $(W_1 \times W_2, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2)$ -set indeed. □

Denote by Ω_i the PBR $\Omega(W_i, \mathcal{P}_i)$ relative to \mathcal{P}_i of W_i for $i = 1, 2$.

Proposition 3.2. *Let $W = W_1 \times W_2$ be a reducible Coxeter group and let \mathcal{P} be the collection of parabolic subgroups of W . Then the correspondence $(X_1, X_2) \mapsto X_1 \times X_2$ induces a bilinear map from $\Omega_1 \times \Omega_2$ to $\Omega(W, \mathcal{P})$, hence a homomorphism*

$$\pi : \Omega_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega_2 \rightarrow \Omega(W, \mathcal{P})$$

which is an isomorphism, preserving identity elements.

Proof. If X_i and X'_i are (W_i, \mathcal{P}_i) -sets for $i = 1, 2$, the map

$$\begin{aligned} ((x_1, x'_1), (x_2, x'_2)) &\in (X_1 \times X'_1) \times (X_2 \times X'_2) \\ &\mapsto ((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) \in (X_1 \times X_2) \times (X'_1 \times X'_2) \end{aligned}$$

is an isomorphism of $(W_1 \times W_2, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2)$ -sets by Lemma 3.1. This shows that π is a ring homomorphism. Moreover if X_i is a W_i -set of cardinality 1 for $i = 1, 2$, then $X_1 \times X_2$ is a $(W_1 \times W_2, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2)$ -set of cardinality 1, so π preserves identity elements.

Since Ω_i is a free abelian group with basis $\{[W_i/P_i] \mid (P_i) \in C(\mathcal{P}_i)\}$ for $i = 1, 2$, $\Omega_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega_2$ is a free abelian group with basis $\mathcal{B} = \{[W_1/P_1] \otimes [W_2/P_2] \mid ((P_1), (P_2)) \in C(\mathcal{P}_1) \times C(\mathcal{P}_2)\}$.

It is easy to see $\pi([W_1/P_1] \otimes [W_2/P_2]) = [(W_1 \times W_2)/(P_1 \times P_2)]$. Since the subgroups $P_1 \times P_2$, for $((P_1), (P_2)) \in C(\mathcal{P}_1) \times C(\mathcal{P}_2)$, lie in different conjugacy classes of parabolic subgroups of $W_1 \times W_2$, it follows that the image by π of the basis \mathcal{B} is a subset of a \mathbb{Z} -basis of $\Omega(W_1 \times W_2)$. So π is injective. On the other hands, each parabolic subgroup $P \in \mathcal{P}$ there exist parabolic subgroups $P_1 \in \mathcal{P}_1$ and $P_2 \in \mathcal{P}_2$ such that $P \cong P_1 \times P_2$. Hence π is surjective. \square

Corollary 3.3. *Let φ be the mark homomorphism of $\Omega(W, \mathcal{P})$. Let φ_i be the mark homomorphism of Ω_i for $i = 1, 2$. Then there exists a commutative diagram*

$$\begin{array}{ccc} \Omega_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega_2 & \xrightarrow{\pi} & \Omega(W, \mathcal{P}) \\ \varphi_1 \otimes \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \varphi_1(\Omega_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \varphi_2(\Omega_2) & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \varphi(\Omega(W, \mathcal{P})) \end{array}$$

where $\tilde{\pi}$ is defined by

$$(a_{P_1, P_2})_{(P_1), (P_2)} \mapsto (a_{P_1, P_2})_{(P_1 \times P_2)},$$

of isomorphism of rings.

また、Proposition 3.2 は、以下の系を示す。

Corollary 3.4. *Let ℓ be an integer with $\ell \geq 2$. Let $W = W_1 \times \cdots \times W_\ell$ be a reducible Coxeter group, where W_i is an irreducible Coxeter group. Let \mathcal{P} be the set of parabolic subgroups of W .*

1. *There exists the set \mathcal{P}_i of parabolic subgroups of W_i for $1 \leq i \leq \ell$ such that the map*

$$\pi : \bigotimes_{i=1}^{\ell} \Omega(W_i, \mathcal{P}_i) \rightarrow \Omega(W, \mathcal{P})$$

induced by an ℓ -multilinear map $\prod_{i=1}^{\ell} \Omega(W_i, \mathcal{P}_i) \rightarrow \Omega(W, \mathcal{P})$ is a ring isomorphism.

2. *Let φ be the mark homomorphism of $\Omega(W, \mathcal{P})$. Let φ_i be the mark homomorphism of Ω_i for $1 \leq i \leq \ell$. Then there exists a commutative diagram*

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{i=1}^{\ell} \Omega_i & \xrightarrow{\pi} & \Omega(W, \mathcal{P}) \\ \bigotimes_{i=1}^{\ell} \varphi_i \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \bigotimes_{i=1}^{\ell} \varphi_i(\Omega_i) & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \varphi(\Omega(W, \mathcal{P})) \end{array}$$

where $\tilde{\pi}$ is defined by

$$(a_{P_1, \dots, P_\ell})_{(P_1), \dots, (P_\ell)} \mapsto (a_{P_1, \dots, P_\ell})_{(P_1 \times \cdots \times P_\ell) \in C(\mathcal{P})},$$

of isomorphism of rings.

4 Character ring

この節では、有限群の指標環に関するいくつかの結果を復習する。

$R(G)$ は、有限群 G の指標環とする。 $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ は n 文字の対称群 S_n のすべてのヤング部分群の族に関する PBR とする。

Lemma 4.1. [Dr86][Yo90, Lemma 7.2] *There exists a ring isomorphism*

$$\pi : \Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n) \rightarrow R(S_n)$$

defined by $[S_n/Y_\lambda] \mapsto \chi_{M_\lambda}$ where χ_{M_λ} is the character afforded by the permutation module M_λ corresponds to a partition λ of n .

\widehat{G} は G の一次指標の群とする。 $R(G)^\times$ のねじれ元からなる単元群 $R(G)_t^\times$ は、直積 $\{\pm 1\} \times \widehat{G}$ と同型であることが、よく知られている。以下の事実を引用する：

Lemma 4.2. [Ya96, Lemma 2.2] *Let G be a finite group. Then $R(G)_t^\times$ is isomorphic to $\{\pm 1\} \times \widehat{G}$.*

Lemma 4.3. [Ya91, Theorem 4.3] *Let S_n be a symmetric group of n -letters. Then $R(S_n)_t^\times = R(S_n)^\times = \{\pm 1, \pm \varepsilon^{S_n}\}$. In particular, $r(R(S_n)^\times) = 2$.*

G_1 と G_2 を二つの有限群とする。 χ_1 と χ_2 が、それぞれ G_1 と G_2 の既約指標であるならば、 $\chi_1 \otimes \chi_2$ は、 $G_1 \times G_2$ の既約指標である。一方、 $G_1 \times G_2$ の任意の既約指標 χ は、 G_1 と G_2 既約指標 χ_1 と χ_2 を用いて $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$ と表される。従って以下の補題を得る。

Lemma 4.4. *If G_1 and G_2 are finite groups, then $\widehat{G_1 \times G_2}$ is isomorphic to $\widehat{G_1} \times \widehat{G_2}$.*

5 Unit group

この節では、以下の記法を用いる。 ℓ は $\ell \geq 2$ を満たす非負整数。 $W = W_1 \times \cdots \times W_\ell$ 、ただし、 W_i はコクセター系 (W_i, S_i) ($1 \leq i \leq \ell$) をもつ有限コクセター群とする。 \mathcal{P} は W のパラボリック部分群の族とする。このとき、 \mathcal{P} は $\mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_\ell$ 、ただし、 \mathcal{P}_i は W_i のパラボリック部分群の族 $1 \leq i \leq \ell$ 、と等しいことがよく知られている。 W_i の \mathcal{P}_i に関する PBR $\Omega(W_i, \mathcal{P}_i)$ ($1 \leq i \leq \ell$) を Ω_i と書く。環 $\otimes_{i=1}^\ell \Omega_i$ の単元群の部分集合

$$\{u \in (\otimes_{i=1}^\ell \Omega_i)^\times \mid \exists u_i \in \Omega_i^\times, (1 \leq i \leq \ell) \text{ s.t. } u = u_1 \otimes \cdots \otimes u_\ell\}$$

を U_ℓ と書く。 U_ℓ は単元群 $(\otimes_{i=1}^\ell \Omega_i)^\times$ の部分群である。

$(u_1, \dots, u_\ell) \mapsto u_1 \otimes \cdots \otimes u_\ell$ で定義される写像

$$\prod_{i=1}^\ell \Omega_i^\times \rightarrow U_\ell$$

を ρ_ℓ と書く。

Lemma 5.1. *The map ρ_ℓ is a surjective group homomorphism.*

Proof. By the definition of ρ_ℓ , it is surjective. For any two elements

$$\begin{aligned} (u_1, \dots, u_\ell), (u'_1, \dots, u'_\ell) &\in \prod_{i=1}^\ell \Omega_i^\times \\ \rho_\ell((u_1, \dots, u_\ell)(u'_1, \dots, u'_\ell)) &= \rho_\ell((u_1 u'_1, \dots, u_\ell u'_\ell)) \\ &= (u_1 u'_1) \otimes \cdots \otimes (u_\ell u'_\ell) \\ &= (u_1 \otimes \cdots \otimes u_\ell)(u'_1 \otimes \cdots \otimes u'_\ell) \\ &= \rho_\ell((u_1, \dots, u_\ell))\rho_\ell((u'_1, \dots, u'_\ell)). \end{aligned}$$

This shows the lemma. □

Lemma 5.2. *If $r(\Omega_i^\times) = 2$ for $i = 1, \dots, \ell$, then U_ℓ is isomorphic to an elementary abelian group of rank $\ell + 1$.*

Proof. Let α_i be the sign unit of Ω_i for $i = 1, \dots, \ell$. Since Ω_i^\times is generated by -1 and α_i , by Theorem 2.3, we have that

$$\ker \rho_\ell = \{(a_i) \in \prod_{i=1}^{\ell} \Omega_i^\times \mid a_i \in \{\pm 1\}, \prod_{i=1}^{\ell} a_i = 1\}.$$

Since the order of $\ker \rho_\ell$ is

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor} \binom{\ell}{2k} = 2^{\ell-1},$$

the order of $U_\ell \cong (\prod_{i=1}^{\ell} \Omega_i^\times) / \ker \rho_\ell$ is $\{(2^2)^\ell\} / (2^{\ell-1}) = 2^{2\ell - (\ell-1)} = 2^{\ell+1}$ by Lemma 5.1. \square

環 $\otimes_{i=1}^{\ell} \Omega_i$ の単位元 $1 \otimes \dots \otimes 1$ を E_ℓ と書く.

$$e_k = 1 \otimes \dots \otimes \alpha_k \otimes \dots \otimes 1 \in \bigotimes_{i=1}^{\ell} \Omega(W_i, \mathcal{P}_i)$$

ただし, α_k は $\Omega(W_k, \mathcal{P}_k)$ ($k = 1, \dots, \ell$) の符号単元, とおく.

Lemma 5.3. *If $r(\Omega_i^\times) = 2$ for $i = 1, \dots, \ell$, then the set $G_\ell = \{-E_\ell, e_1, \dots, e_\ell\}$ is a generator of U_ℓ .*

Proof. Let φ_i be the mark homomorphism of Ω_i for $1 \leq i \leq \ell$. Then since $(\otimes_{i=1}^{\ell} \varphi_i)(g)$, for $g \in G_\ell \subset U_\ell$, are different values, the set G_ℓ is a generator of U_ℓ by Lemma 5.2. \square

PBR $\Omega(W, \mathcal{P})$ の符号単元は, 単元 e_1, \dots, e_ℓ から得られる.

Lemma 5.4. *Let $W = \prod_{i=1}^{\ell} W_i$ with the W_i Coxeter group with Coxeter system (W_i, S_i) for $i = 1, \dots, \ell$. Then the element $\pi(e_1 \otimes \dots \otimes e_\ell)$ is the sign unit $\alpha_{1, \dots, \ell}$ of $\Omega(W, \mathcal{P})$.*

Proof. Let (W, S) be a Coxeter system. Since any subset $J \subset S$ is a disjoint union $J_1 \cup \dots \cup J_\ell$, where J_i is isomorphic to a subset of S_i for $1 \leq i \leq \ell$, we have

$$\begin{aligned} \varphi(\pi(e_1 \otimes \dots \otimes e_\ell)) &= \tilde{\pi}(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_\ell)(e_1 \otimes \dots \otimes e_\ell) \quad (\text{Corollary 3.3}) \\ &= \tilde{\pi}(\varphi_1(e_1) \otimes \dots \otimes \varphi_\ell(e_\ell)) \\ &= \tilde{\pi}((-1)^{|J_1|}_{(W_{J_1})} \otimes \dots \otimes (-1)^{|J_\ell|}_{(W_{J_\ell})}) \quad (\text{Lemmas 2.1, 2.2}) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{\ell} (-1)^{|J_i|} \right)_{(\prod_{i=1}^{\ell} W_{J_i})} \\ &= ((-1)^{|\cup_{i=1}^{\ell} J_i|})_{(W_{\cup_{i=1}^{\ell} J_i})} \\ &= ((-1)^{|J|})_{(W_J)} \\ &= \varphi(\alpha_{1, \dots, \ell}) \quad (\text{Lemmas 2.1, 2.2}). \end{aligned}$$

The injectivity of φ shows the lemma. \square

Theorem 5.5. *Let $W = \prod_{i=1}^{\ell} W_i$ be a reducible finite Coxeter group of type A_{n_i} for integers $n_i \geq 1$. Then the unit group $\Omega(W, \mathcal{P})^\times$ of the PBR $\Omega(W, \mathcal{P})$ relative to \mathcal{P} of W is isomorphic to U_ℓ of rank $\ell + 1$. Moreover, a set*

$$\{\pi(-E_\ell), \pi(e_1), \dots, \pi(e_\ell)\}$$

is a generator of $\Omega(W, \mathcal{P})^\times$ and $\pi(e_1 \otimes \dots \otimes e_\ell)$ is the sign unit $\alpha_{1, \dots, \ell}$ of $\Omega(W, \mathcal{P})$.

Proof. By Corollary 3.4 and Lemma 4.1,

$$\Omega(W, \mathcal{P}) \cong \otimes_{i=1}^{\ell} \Omega(W_i, \mathcal{P}_i) \cong \otimes_{i=1}^{\ell} R(W_i) \cong R\left(\prod_{i=1}^{\ell} W_i\right) \cong R(W).$$

Since $\widehat{\prod_{i=1}^{\ell} W_i} \cong \prod_{i=1}^{\ell} \widehat{W_i}$ by Lemma 4.4 and $R(W)_t^\times = R(W)^\times$, we have

$$R(W)^\times \cong \{\pm 1\} \times \prod_{i=1}^{\ell} \widehat{W_i}.$$

Lemma 4.2 shows that $r(\Omega(W, \mathcal{P})) = \ell + 1$. On the other hands, the subgroup U_ℓ of $(\otimes_{i=1}^{\ell} \Omega(W_i, \mathcal{P}_i))^\times$ has same rank by Lemma 5.3 and 4.3. Hence $U_\ell = (\otimes_{i=1}^{\ell} \Omega(W_i, \mathcal{P}_i))^\times$. Therefore we have $\Omega(W, \mathcal{P})^\times \cong (\otimes_{i=1}^{\ell} \Omega(W_i, \mathcal{P}_i))^\times$ by Corollary 3.4 again. Lemmas 5.3 and 5.4 show the theorem. \square

6 謝辞

佐藤巖先生をはじめとして、世話人および関係者の皆様に感謝します。

参考文献

- [BBTH92] Bergeron, F.; Bergeron, N.; Howlett, R.B.; Taylor, D.E.: *A Decomposition of the Descent Algebra of a Finite Coxeter Group*, J. Algebraic Combinatorics **1** (1992) 23–44.
- [Bo07] Bouc, S.: *The functor of units of Burnside rings for p -groups*, Comm. Math. Helv. **82** (2007), 583–615.
- [Ca72] Carter, R. W.: *Simple groups of Lie type*, Pure and Applied Mathematics, **28**, John Wiley & Sons, London-New York-Sydney, 1972.
- [Dr86] Dress, A.W.M.: *Congruence relations characterizing the representation ring of the symmetric group*, J. Algebra **101** (1986) no. 1, 350–364.
- [GP00] Geck, M.; Pfeiffer, G.: *Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras*, London Mathematical Society Monographs. New Series, **21**, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.
- [IO15] Idei, H.; Oda, F.: *The table of marks, the Kostka matrix, and the character table of the symmetric group*, J. Algebra **429** (2015), 318–323.
- [OTY16] Oda, F.; Takegahara, Y.; Yoshida, T.: *The unit group of a partial Burnside ring relative to the Young subgroups of the symmetric group*, J. Algebra **460** (2016), 370–379.
- [OW] Oda, F.; Wakatake, M.: *The unit group of a partial Burnside ring of a reducible Coxeter group of type A*, to appear in Hokkaido Mathematical Journal.
- [So66] Solomon, L.: *The orders of the finite Chevalley groups*, J. Algebra **3**, (1966), 376 – 393.
- [So76] Solomon, L.: *A Mackey Formula in the Group Ring of a Coxeter Group*, J. Algebra **41**, (1976), 255 – 264.
- [Ta06] Tambara, D.: *A partial Burnside ring of $GL(n, q)$ relative to line stabilizers*, J. Algebra **296** no. 1, (2006), 301–322.
- [Ya91] Yamauchi, K.: *A unit group in a character ring of an alternating group*, Hokkaido Math. J. **20** (1991), no. 3, 549–558.
- [Ya96] Yamauchi, K.: *On the Structure of the Character Ring of a Finite Group*, PhD thesis, Kyushu University (1996).
- [Yo90] Yoshida, T.: *The generalized Burnside ring of a finite group*, Hokkaido Math. J. **19** (1990), 509–574.

A commutative nonassociative algebra for $3S_7$

熊本大学大学院先端科学研究部
千吉良直紀

1 序

次のような条件を満たす群 G を考える。

- G は位数 3 の正規部分群 Z をもち, G/Z は 3-transposition group である。
- $G' = C_G(Z)$, $|G : G'| = 2$, G'/Z は単純群である。

ここで, 群 K が 3-transposition group であるとは K の位数 2 の元の共役類 D で,

$$g, h \in D \text{ ならば } gh \text{ の位数 } o(gh) \text{ は } 1, 2, 3 \text{ のいずれかである}$$

をみたすものがあるときをいう。

Fischer による 3-transposition group の分類や単純群の Schur multiplier の計算などから

$$G'/Z \cong A_6, A_7, U_4(3), O_7(3), Fi'_{24}$$

のいずれかになることが知られている ([3])。したがって G は

$$3S_6, 3S_7, 3U_4(3) : 2_2, 3O_7(3) : 2, 3Fi_{24}$$

となる。群の名前の書き方は ATLAS に従う。

$3S_6$ を除いた 4 つの群に対してある既約加群 W で次の条件を満たすものが存在することが知られている。

- W には対称双一次形式 $(,)$ がスカラー倍を除いて一意に定まる。
- W には可換な積 \cdot がスカラー倍を除いて一意に定まる。
- $u, v, w \in W$ に対して, $(u, v \cdot w) = (u \cdot v, w)$ が成立する。

この双一次形式と積を込めて W は Conway-Norton 代数と呼ばれている。この代数の積は associative ではないことに注意する。

4 つの Conway-Norton 代数 W はそれぞれ次元が 12, 42, 54, 1566 である。 $3S_7$ に関する W は Smith によって構成されている ([3])。 $3U_4(3) : 2_2$, $3O_7(3) : 2$, $3Fi_{24}$ に関する W は Kitazume によって構成され, それぞれ $\text{Aut}(W) \cong 3U_4(3) : 2^2$, $3O_7(3) : 2$, $3Fi_{24}$ であることが示されている ([2])。 $3S_6$ も 12 次元に作用するが, 積が一意的には定まらないことが指標の計算で分かる。

ここでは, Smith が構成した $3S_7$ に関する Conway-Norton 代数を \mathbb{Q}^{63} の中に "自然に" 構成する。また, W の基底をうまくとることによって基底の間の積が hexacode の言葉で記述できることについて述べる。

2 W の構成

$G = 3S_7$ とする。記号は前のセクションのものを用いる。 $Z = \langle z \rangle$ とする。 G には 63 個の元からなる位数 2 の元の共役類 \mathcal{D} がある。これは $G/Z \cong S_7$ の互換の共役類に対応している。 \mathcal{D} の 2 元の積の位数は 1, 2, 3, 6 のいずれかである。

$\mathcal{D} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{63}\}$ と番号付けをして G を \mathcal{D} に作用させることで G を $\Omega = \{1, \dots, 63\}$ 上の置換群とすることが出来る。 σ_j と $j \in \Omega$ ($1 \leq j \leq 63$) を同一視して、混乱のない限り、記述しやすい方で書くことにする。

H を 1 の固定部分群とする。 $H \cong 2 \times S_5$ で $Z(H) = \langle \sigma_1 \rangle$ である。 H の Ω 上の軌道は 5 つある。

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 &= \{1\}, & \mathcal{O}_2 &= \{j \mid \sigma_j \in \{\sigma_1^z, \sigma_1^{z^2}\}\}, & \mathcal{O}_3 &= \{j \mid o(\sigma_1 \sigma_j) = 2\}, \\ & & \mathcal{O}_4 &= \{j \mid o(\sigma_1 \sigma_j) = 6\}, & \mathcal{O}_5 &= \{j \mid o(\sigma_1 \sigma_j) = 3\} \end{aligned}$$

と分かれて

$$|\mathcal{O}_1| = 1, \quad |\mathcal{O}_2| = 2, \quad |\mathcal{O}_3| = 10, \quad |\mathcal{O}_4| = 20, \quad |\mathcal{O}_5| = 30$$

となる。

V を \mathbb{Q} 上の 63 次元ベクトル空間とし、 $\{e_1, \dots, e_{63}\}$ を V の標準基底とする。 e_j と $j \in \Omega$ を同一視して、 G を置換行列として作用させる。置換行列と置換も同一視して記述しやすい方で書くことにする。 V の部分空間 U と G の部分集合 L に対して、

$$\text{Fix}_U(L) = \{u \in U \mid u^g = u \text{ for any } g \in L\}$$

とおくことにする。 $\text{Fix}_U(L)$ は L の元の U における固有値 1 の固有空間の共通部分である。ここでは、 L の元は置換行列だと思っていることに注意する。 $1 \leq k \leq 5$ に対して

$$v_k = \sum_{j \in \mathcal{O}_k} e_j$$

とおく。

Lemma 1. $\text{Fix}_V(H) = \langle v_1 \cdots v_5 \rangle$. □

$$w_1 = 4v_1 - 2v_2 + 2v_3 - v_4 \in \text{Fix}_V(H)$$

とおく。 w_1 の添字 1 は H が 1 の固定部分群であることに由来して付けている。 $|G : H| = 63$ であるから、 $\#\{w_1^g \mid g \in G\} = 63$ である。

$$\{w_1^g \mid g \in G\} = \{w_1, \dots, w_{63}\}$$

として、この添字も $j \in \Omega$ に対応して付けることにする。

$$W = \langle w_1^g \mid g \in G \rangle$$

とおく。

Lemma 2. (i) $\dim(W) = 12$.

(ii) 任意の $w \in W$ に対して $w + w^z + w^{z^2} = 0$.

□

この W が我々のターゲットである G の作用で既約な部分空間である。
 V の標準内積 $(,)$ を考える。 w_j 達の間の内積は以下ようになる。

$$(w_i, w_j) = \begin{cases} 84 & \text{if } i = j \\ -42 & \text{if } \sigma_j \in \{\sigma_i^z, \sigma_i^{z^2}\} \\ 42 & \text{if } o(\sigma_i \sigma_j) = 2 \\ -21 & \text{if } o(\sigma_i \sigma_j) = 6 \\ 0 & \text{if } o(\sigma_i \sigma_j) = 3, \sigma_j \notin \{\sigma_i^z, \sigma_i^{z^2}\} \end{cases}$$

3 W の積

前述の通り, W に一意的に定まる対称双一次形式として標準内積 $(,)$ をとる。 G は座標の置換として作用するので, $u, v \in W, g \in G$ に対して

$$(1) (u^g, v^g) = (u, v)$$

が成り立つ。また, W における積 \cdot は, $u, v, w \in W, g \in G$ に対して

$$(2) (u \cdot v)^g = u^g \cdot v^g$$

$$(3) (u, v \cdot w) = (u \cdot v, w)$$

をみたすように構成する。

$h \in H$ に対して $w_1^h = w_1$ なので,

$$(w_1 \cdot w_1)^h = w_1^h \cdot w_1^h = w_1 \cdot w_1$$

となるので,

$$w_1 \cdot w_1 \in \text{Fix}_W(H)$$

である。

Lemma 3. $\text{Fix}_W(H) = \langle w_1 \rangle$

□

これより, ある λ が存在して

$$w_1 \cdot w_1 = \lambda w_1$$

となることがわかる。以下簡単のため, $\lambda = 1$ として話を進める。

$1 \leq i < j \leq 63$ に対して

$$L_{i,j} = \{g \in G \mid w_i^g = w_j, w_j^g = w_i\}$$

とおく。 W の積が可換であることに注意すると, $g \in L_{i,j}$ に対して

$$(w_i \cdot w_j)^g = w_i^g \cdot w_j^g = w_j \cdot w_i = w_i \cdot w_j$$

となり, $w_i \cdot w_j \in \text{Fix}_W(L_{i,j})$ である。

Lemma 4.

$$\text{Fix}_W(L_{1,j}) = \begin{cases} \langle w_1 + w_j \rangle & \text{if } j \in \mathcal{O}_2 \\ \langle w_1 + w_j \rangle & \text{if } j \in \mathcal{O}_3 \\ \langle w_1 + w_j, w_1^z + w_j^{z^2} \rangle & \text{if } j \in \mathcal{O}_4 \\ \langle w_1 + w_j, w_1^{\sigma_j} \rangle & \text{if } j \in \mathcal{O}_5 \end{cases}$$

となる。 □

これと内積と積の性質 (1), (2), (3) を用いて次のことがわかる。

Proposition 1. $1 \leq i \leq 63$ に対して $w_i \cdot w_i = w_i$ とする。このとき ,

$$w_i \cdot w_j = \begin{cases} w_i & \text{if } i = j \\ -w_i - w_j & \text{if } \sigma_j \in \{\sigma_i^z, \sigma_i^{z^2}\} \\ \frac{1}{3}(w_i + w_j) & \text{if } o(\sigma_i \sigma_j) = 2 \\ \frac{1}{3}(w_i^{z^2} + w_j^z) & \text{if } o(\sigma_i \sigma_j) = 6 \text{ and } o(\sigma_i \sigma_j^z) = 6 \\ \frac{1}{3}(w_i^z + w_j^{z^2}) & \text{if } o(\sigma_i \sigma_j) = 6 \text{ and } o(\sigma_i \sigma_j^z) = 2 \\ \frac{1}{3}w_i^{\sigma_j} & \text{if } o(\sigma_i \sigma_j) = 3 \text{ and } \sigma_j \notin \{\sigma_i^z, \sigma_i^{z^2}\} \end{cases}$$

となる。 □

$(w_i, w_j) = 0$ となるのは, $o(\sigma_i \sigma_j) = 3$ かつ $\sigma_j \notin \{\sigma_i^z, \sigma_i^{z^2}\}$ のときであった。このとき, $\langle \sigma_i, \sigma_j \rangle \cong S_3$ であり, もう 1 つ共役な位数 2 の元が存在する。それを $\sigma_{i \circ j}$ と書くことにすると, $w_i^{u_j} = w_{i \circ j}$ となる。したがって

$$w_i \cdot w_j = \frac{1}{3}w_{i \circ j}$$

となる。

4 W の基底と hexacode

S_7 では

$$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7)$$

の 6 個の互換をとると互いに積の位数が 3 になる。これに対応して次のことがいえる。

Proposition 2. $\{w_1, \dots, w_{63}\}$ の中に内積が互いに直交する 6 個からなるベクトルの集合が存在する。 □

記号が煩雑になるが $\{x_1, \dots, x_6\} \subset \{w_1, \dots, w_{63}\}$ が互いに直交するベクトルの集合であるとする。互いに直交するので x_1, \dots, x_6 は一次独立である。

Lemma 5. $\{x_1, \dots, x_6\} \cup \{x_1^z, \dots, x_6^z\}$ は W の基底となる。 □

Lemma 6. $v, w \in W$ に対して $v \cdot w^z = v^z \cdot w = (v \cdot w)^{z^2}$ が成り立つ。 □

$v, w \in W$ に対して $v^z \cdot w^z = (v \cdot w)^z$ であるから, $\{x_1, \dots, x_6\}$ の間の積が分かれば, Lemma 6 より W の基底 $\{x_1, \dots, x_6\} \cup \{x_1^z, \dots, x_6^z\}$ のベクトルの間の積が記述できることになる。

\mathbb{F}_4 を 4 元体とし, $\mathbb{F}_4^\times = \langle \omega \rangle$ とする。

$$\mathcal{H} = \left\{ (a_1, \dots, a_6) \in \mathbb{F}_4^6 \mid (a_4, a_5, a_6) = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

を hexacode という。 \mathcal{H} は $[6, 3, 4]_4$ code で weight distribution は

weight	0	4	6
個数	1	45	18

であり, $\text{Aut}(\mathcal{H}) \cong 3A_6$ である。 weight 4 のベクトルには 2カ所 0 の場所があるが, 0 以外の数は

(i) 2カ所だけ同じ数である, あるいは

(ii) 4つとも同じ数である

という性質がある。

$x \in W$ に対して $\Phi_x : \mathbb{F}_4 \rightarrow W$ を

$$\Phi_x(0) = 0, \quad \Phi_x(1) = x, \quad \Phi_x(\omega) = x^z, \quad \Phi_x(\omega^2) = x^{z^2} = -x - x^z$$

で定義する。また,

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathcal{H} &\longrightarrow W \\ \cup & \\ \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_6) &\longmapsto \Phi(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^6 \Phi_{x_i}(a_i) \end{aligned}$$

と定める。例えば $(\omega, \omega^2, 0, 1, 0, 1) \in \mathcal{H}$ に対して

$$\Phi((\omega, \omega^2, 0, 1, 0, 1)) = x_1^z + x_2^{z^2} + x_4 + x_6 = x_1 + (-x_2 - x_2^z) + x_4 + x_6$$

である。

Theorem 1. x_1, \dots, x_6 の順番を必要であれば適当にとりかえると次のことが成り立つ。

$1 \leq i < j \leq 6$ に対して $\mathbf{a} \in \mathcal{H}$ を 0 の場所が i, j であるような weight 4 の code word で 1 が 2カ所以上あるものとする。このとき,

$$x_i \cdot x_j = \frac{1}{6} \Phi(\mathbf{a})$$

となる。 □

これにより, $\{x_1, \dots, x_6\} \cup \{x_1^z, \dots, x_6^z\}$ の間の積は hexacode の weight 4 の code word を用いて完全に書けてしまうことがわかる。

例えば $i = 3, j = 5$ のときには $(\omega, \omega^2, 0, 1, 0, 1) \in \mathcal{H}$ をとることとなり,

$$x_3 \cdot x_5 = \frac{1}{6}(x_1 - x_2 - x_2^z + x_4 + x_6)$$

となる。

5 積に関する固有空間分解

$x \in W$ と $m \in \mathbb{Q}$ に対して,

$$E(x, k) = \{y \in W \mid x \cdot y = my\}$$

とおく。 x の積に関する固有値 m の固有空間である。

Proposition 3. 各 w_i に対して,

$$\begin{aligned} E(w_i, 1) &= \langle w_i \rangle, & \dim(E(w_i, 1)) &= 1 \\ E(w_i, -1) &= \langle w_i^z - w_i^{z^2} \rangle, & \dim(E(w_i, -1)) &= 1 \\ E(w_i, \frac{1}{3}) &= \langle w_j + w_j^{\sigma_i} \mid o(\sigma_i \sigma_j) = 3 \rangle, & \dim(E(w_i, \frac{1}{3})) &= 5 \\ E(w_i, -\frac{1}{3}) &= \langle w_j - w_j^{\sigma_i} \mid o(\sigma_i \sigma_j) = 3 \rangle, & \dim(E(w_i, -\frac{1}{3})) &= 5 \end{aligned}$$

が成り立つ。特に w_i の積に関する固有空間分解は

$$W = E(w_i, 1) \oplus E(w_i, -1) \oplus E(w_i, \frac{1}{3}) \oplus E(w_i, -\frac{1}{3})$$

である。 □

$1 \leq i \leq 63$ に対して

$$\varphi_i = \begin{cases} id & \text{on } E(w_i, 1) \oplus E(w_i, \frac{1}{3}) \\ -id & \text{on } E(w_i, -1) \oplus E(w_i, -\frac{1}{3}) \end{cases}$$

とおく。ここで, id は恒等写像を表す。

Theorem 2. $1 \leq i \leq 63$ に対して, φ_i は W 上で σ_i と一致する。 □

したがって

$$\langle \varphi_i \mid 1 \leq i \leq 63 \rangle \cong 3S_7$$

である。つまり, w_i 達の積の言葉で自己同型群の部分群である $3S_7$ が記述できることがわかる。

6 終わりに

$\text{Aut}(W)$ をきちんと決定したいというのがこの研究の当面の目標である。講演の際には出来ていると思っていたが, 少し議論が足りていないところがあり, まだ決定できていない。

3-transposition group に関連した Conway-Norton 代数に限らず, 既約加群の上に一意的に可換非結合代数の構造が入るものは意外とたくさんある ([1, 3.4] 参照)。積を決定する方法はここで述べたようにすれば大抵出来るはずである。自己同型群を決定する良い方法はないだろうか。また $3S_7$ の場合には hexacode という良い組み合わせ構造があって積が記述できるという現象が起こっている。このようなことが他の可換非結合代数にも起こっているだろうか。もしそうであれば, そこに興味深い関係が隠されているかもしれない。

References

- [1] 原田耕一郎, “モンスター”, 岩波書店 (1999).
- [2] M. Kitazume, The Conway-Norton algebra for $\Omega^-(6, 3)$, $\Omega(7, 3)$, Fi'_{24} , and their full automorphism groups, *Invent. Math.* **88** (1987) 277–318.
- [3] S. D. Smith, Nonassociative commutative algebras for triple covers of 3-transposition groups, *Michigan J. Math.* **24** (1977) 273–287.

W代数の脇本表現

京都大学・数理解析研究所 元良 直輝*

Naoki Genra

Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

1 はじめに

本稿では(アファイン)W代数の脇本表現をアファイン Lie 環の脇本表現から構成し, 応用として A 型の W 代数の”coproduct”構造と呼ぶべきものを調べる. 有限次元 Lie 環 \mathfrak{g} , そのべき零元 f , 複素数 k の三つのデータによって定義される W 代数は, 定義の煩雑さゆえに生成元や関係式が一般には知られていない. しかしながら W 代数ならではの様々なアプローチを駆使することで, 生成元も関係式も詳しく分からないまま, その性質を調べたり表現を構成することができる. 特にスクリーニング作用素によるアプローチについて解説する.

2 W代数とは

二次元共形場理論の研究の中で Virasoro 代数

$$Vir = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} CL_n \oplus \mathbb{C}C$$

と呼ばれる無限次元の Lie 環が注目されるようになった. Lie 括弧は次で与えられる.

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{m^3 - m}{12} \delta_{m+n, 0} C, \quad [Vir, C] = 0.$$

C は中心なので, 既約表現を考える時にはスカラーで作用する. そのスカラーを中心電荷 (central charge) といい, 中心電荷の値が特別な時には面白い既約表現が現れる. さらにはその表現圏がモジュラーテンソル圏になったり, その fusion rule を記述する方法があったりなど数学的にも興味深い構造を豊富に与えてくれる. こうした状況の中で, Virasoro 代数のさらなる一般化を考えて, その構造や表現を考えるのは自然である. W 代数とはそうした動機を背景に発見された代数の族を指す.

一番初めに発見された W 代数は Zamolodchikov による W_3 代数である [Z]. Zamolodchikov は二次元共形場理論を分類したい, という動機のもと Virasoro 代数の一般化として W_3 代数を発見した. しかし困ったことに W_3 代数は単なる Lie 環とみなすことはできない. なぜならば Lie 括弧

*gnr@kurims.kyoto-u.ac.jp

の中に無限和が現れてしまうからである。実際、 \mathcal{W}_3 代数は単なる代数ではなく、頂点代数構造を持つ。 \mathbb{C} 上のベクトル空間 V が頂点代数とは、 V の元 A に対して $\text{End}V$ 係数の形式的べき級数

$$A(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_{(n)} z^{-n-1} \in \text{End}V \otimes \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]$$

が対応し、任意の $A, B \in V$ に対して

$$[A_{(m)}, B_{(n)}] = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{m}{j} (A_{(j)} B)_{(m+n-j)}$$

などの関係式を満たすものである。 $A(z)$ を $A \in V$ の場という。 上式の右辺は一般に無限和になる (が $\text{End}V$ の元としては well-defined になる)。 一般に \mathcal{W} 代数のほとんどでこの関係式が有限和にならず、従って単なる Lie 環と見做すことはできない。 なので表現を調べたり構成したりするのは非常に難しくなる。

Fateev-Lukyanov らによってさらなる \mathcal{W} 代数が発見された ([FL]) が、Drinfeld-Sokolov 還元と呼ばれるコホモロジーを用いて \mathcal{W} 代数を、有限次元 Lie 代数 \mathfrak{g} と複素数 k のデータに依存して構成したのは Feigin-Frenkel である [FF2]。これをここでは $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g})$ と表す。 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_2)$ は中心電荷が

$$c(k) = 1 - 6 \frac{(k+1)^2}{k+2}$$

の Virasoro 代数になり、 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_3)$ は \mathcal{W}_3 代数になる。その後様々な一般化を経て、知られている中で最も一般的な定義は Kac-Roan-Wakimoto によるものである [KRW]。構成には Drinfeld-Sokolov 還元が用いられているが、Lie 環 \mathfrak{g} 、複素数 k だけではなく \mathfrak{g} のべき零元 f にも依存する。これを $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ と書くと、

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_2, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = \text{Vir}, \quad \mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_3, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}) = \mathcal{W}_3$$

などが成り立つ。一般に $f = f_{prin}$ が主べき零元 (principal nilpotent) のとき $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{prin}) = \mathcal{W}^k(\mathfrak{g})$ となる。さらに $f = 0$ の時、 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, 0)$ は \mathfrak{g} のレベル k のアフライン Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}}$ となる。ここで $\hat{\mathfrak{g}}$ はベクトル空間としては

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}1$$

なる無限次元の Lie 環で、Lie 括弧は

$$[a \otimes f(t), b \otimes g(t)] = [a, b] \otimes f(t)g(t) + k(a|b) \text{Res}_{t=0} f'(t)g(t)dt$$

で与えられる。ただし $(a|b)$ は \mathfrak{g} 上の Killing 形式を適当に正規化したものである。 $\hat{\mathfrak{g}}$ は定義から、 \mathfrak{g} のループ代数 $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ の中心拡大になる。

3 \mathcal{W} 代数の構造

\mathcal{W} 代数は Drinfeld-Sokolov 還元による 0 次コホモロジーとして定義されるため、生成元や関係式が一般にはわかっていない。計算も \mathfrak{g} のランクが上がるほど煩雑になり、 \mathfrak{sl}_2 や \mathfrak{sl}_3 くらいの時にはなんとか直接計算できたが、 \mathfrak{sl}_4 ともなるとプログラムを作って計算させるのも大変なほどであ

る。従って W 代数の代数構造を知るにはなんらかの別のアプローチを考える必要がある。ここではスクリーニング作用素を用いた別構成法について説明する。

スクリーニング作用素とはもともと Fateev-Lukyanov らが W 代数を一般化するのに用いた、物理的視点に基づく構成法であり、Feigin-Frenkel は、自分たちの定義からスクリーニング作用素による構成法を再現できることを証明した [FF3]。もう少し詳しく述べると、 \mathfrak{h} を \mathfrak{g} の Cartan 部分代数 (\mathfrak{sl}_n であれば、 \mathfrak{h} は対角行列全体) とすると、 \mathfrak{h} に付随する Heisenberg 代数 ($=\hat{\mathfrak{h}}$) の Fock 空間 \mathcal{H} の中で W 代数 $W^k(\mathfrak{g})$ が次のように構成できることを示した:

$$W^k(\mathfrak{g}) \simeq \bigcap_{\alpha \in \Pi} \text{Ker} \int e^{-\frac{1}{\sqrt{k+h^\vee}} \int \alpha(z)} dz \subset \mathcal{H}.$$

ただし Π は単純ルートの集合、 h^\vee は双対 Coxeter 数と呼ばれる \mathfrak{g} によって定まる自然数、 $\alpha(z)$ は $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ と Killing 形式で対応する \mathfrak{h} の元によって定まる \mathcal{H} の場である。右辺の作用素たちをスクリーニング作用素という。この公式は k が generic であることを仮定する。 k が generic である、とは k がおおよそパラメーターのように扱うことのできることを指し、例えば k が超越数の時は generic になる。 k が generic ではなく特別な値の時、偶然の数字の悪戯によって W 代数の元ではないのにスクリーニング作用素の核に入ってしまうことがある。よって一般に右辺は $W^k(\mathfrak{g})$ より大きくなる可能性があり、従って generic という仮定が必要になる。

こうした構成法を用いて W 代数の生成元を計算するのは、定義に従って計算するよりずっと現実的になる。実際、 $W^k(\mathfrak{sl}_n)$ の生成元などはこの構成法を介して一般に計算されている。そこで Kac-Roan-Wakimoto らによる W 代数 $W^k(\mathfrak{g}, f)$ に対してもスクリーニング作用素による別構成法が期待されるが、それは実際可能であることを前に示した [G1]。この時、 W 代数を実現する空間は Heisenberg 代数の Fock 空間ではなく、一般には \mathfrak{g} の簡約 Lie 部分代数 $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ のアフィン化 $\hat{\mathfrak{r}}$ の表現空間 (=アフィン頂点代数) と $\beta\gamma$ システムと呼ばれる頂点代数のテンソル積の中で構成される。これほど複雑な空間の中で構成されるため、スクリーニング作用素自体も Feigin-Frenkel の時のように簡単な式では表すことができず、抽象的に作用素としての代数関係式が与えられるだけであった。せっかくスクリーニング作用素が構成できたのに、計算が煩雑なままでは意味がないので、もう少し簡単にする処方箋を与える必要がある。次節ではそのための準備として $\hat{\mathfrak{g}}$ の脇本表現を考える。

4 脇本表現

アフィン Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}}$ と複素数 k に付随して、アフィン頂点代数 $V^k(\mathfrak{g})$ が定義される。これは実は $\hat{\mathfrak{g}}$ の表現空間なのだが、同時に表現空間である $V^k(\mathfrak{g})$ が頂点代数の構造を持っている。Kac-Roan-Wakimoto らによる W 代数の定義は、 $V^k(\mathfrak{g})$ に対して Drinfeld-Sokolov 還元による 0 次コホモロジー

$$W^k(\mathfrak{g}, f) = H_{DS,f}^0(V^k(\mathfrak{g}))$$

を考えることで定義される。しかし Drinfeld-Sokolov 還元は $V^k(\mathfrak{g})$ に対してだけではなく、より一般には $V^k(\mathfrak{g})$ -加群 M (頂点代数 V に対してその加群というものがある) に対しても定義できる。すると構成から $H_{DS,f}^0(M)$ は W 代数 $W^k(\mathfrak{g}, f)$ -加群の構造を持つ。この $V^k(\mathfrak{g})$ -加群から $W^k(\mathfrak{g}, f)$ -加群への関手 $H_{DS,f}^0(?)$ を用いて W 代数の構造を解析することを考えたい。そこで $V^k(\mathfrak{g})$ -加群の構造を持つ $\hat{\mathfrak{g}}$ の脇本表現と呼ばれるもの考える。脇本表現は次のようにして構成される:

Lie 環 \mathfrak{g} に対応する Lie 群 G を考える (つまり $\text{Lie}(G) = \mathfrak{g}$) . G の広義下三角 Borel 部分群 B_- を考え ($G = GL_n(\mathbb{C})$ の時, B_- は G の元の中で対角成分を含む下三角行列全体), 旗多様体 G/B_- への G の左作用を考える. これにより Lie 代数 \mathfrak{g} は左不変ベクトル場として G/B_- 上の正則関数全体に作用する. G を代数群と思うと, G/B_- には Zariski 位相について極大稠密開集合 $N_+ \cdot \bar{e} \simeq N_+$ が存在する. ただし N_+ は下三角べき単部分群であり, \bar{e} は G の単位元 e の G/B_- での同値類である. \mathfrak{g} の作用を N_+ 上の正則関数に制限すると, N_+ は開集合なので, Lie 代数の射 $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{D}_{N_+}$ が得られる. ただし \mathcal{D}_{N_+} は N_+ の正則関数上の微分環である. また N_+ はべき単なので, 指数写像によって \mathfrak{g} のべき零 Lie 部分代数 \mathfrak{n}_+ とアファイン空間として同一視できる. 従って N_+ 上の正則関数全体は N_+ 上の多項式環である. 例えば \mathfrak{sl}_2 の場合は, $N_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ であり \mathfrak{sl}_2 の基底を $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\rho(e) = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \rho(h) = -2x \frac{\partial}{\partial x}, \quad \rho(f) = -x^2 \frac{\partial}{\partial x}$$

となる. さらに \mathfrak{g} の Cartan 部分代数 \mathfrak{h} の双対 \mathfrak{h}^* の元 $\chi \in \mathfrak{h}^*$ に対し, ρ を捻ることができ. それを ρ_χ とおくと上の場合には,

$$\rho_\chi(e) = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \rho_\chi(h) = -2x \frac{\partial}{\partial x} + \chi(h), \quad \rho_\chi(f) = -x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \chi(h)x$$

となる. この ρ のアファイン化を考えたい. そこで上の例で \mathcal{D}_{N_+} の Lie 括弧を考えると,

$$[\partial/\partial x, x] = 1, \quad [\partial/\partial x, \partial/\partial x] = [x, x] = 0$$

なのでその自然なアファイン化として

$$[a_m, a_n^*] = \delta_{m+n,0}, \quad [a_m, a_n] = [a_m^*, a_n^*] = 0$$

なる a_n, a_n^* で生成される代数 (=無限次元 Weyl 代数) を考える. 一般の \mathfrak{g} に対してはこのような a_n, a_n^* を $\dim \mathfrak{n}_+$ 個のペアだけ用意すれば良い. その無限次元 Weyl 代数の Fock 空間を $\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+}$, χ に対応する部分として \mathfrak{h} に付随する Heisenberg 代数の Fock 空間 \mathcal{H} を考えると, ρ はそのアファイン化 $\hat{\rho} : \hat{\mathfrak{g}} \rightarrow \text{End}(\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+} \otimes \mathcal{H})$ を持つ. さらに言えば, $\hat{\rho}$ は頂点代数の単射準同型

$$\hat{\rho} : V^k(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+} \otimes \mathcal{H}$$

にまで拡張される. \mathfrak{sl}_2 の場合には,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(e(z)) &= a(z), \\ \hat{\rho}(h(z)) &= -2 : a^*(z)a(z) : + b(z), \\ \hat{\rho}(f(z)) &= - : a^*(z)^2 a(z) : + b(z)a^*(z) + k \partial_z a^*(z) \end{aligned}$$

となる. ただし $b(z)$ は \mathcal{H} の h に対応する場であり, $u \in \mathfrak{g}$ に対し, 左辺の $u(z)$ は

$$u(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (u \otimes t^n) z^{-n-1}$$

である. また頂点代数 V の二つの場 $A(z), B(z)$ に対し $: A(z)B(z) :$ は正規順序積と呼ばれ,

$$: A(z)B(z) : = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m \geq 0} B_{(n)} A_{(m)} + \sum_{m < 0} A_{(m)} B_{(n)} \right) z^{-m-n-2}$$

で定義される. この時 $A(z)B(z)$ の各 z のべきの係数は無限和になるが, $\text{End}V$ の元として well-defined になる. 一方で単に場の積 $A(z)B(z)$ を考えるとこれは一般に well-defined にならない.

こうして構成された $\hat{\rho}$ により, $\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+} \otimes \mathcal{H}$ は $\hat{\mathfrak{g}}$ -加群になり, さらに頂点代数構造を持つ. そして $V^k(\mathfrak{g})$ -加群になる. この $\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+} \otimes \mathcal{H}$ を $\hat{\mathfrak{g}}$ の脇本表現という [W, FF1]. より一般には最高ウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を持つ Heisenberg 代数の Fock 空間を \mathcal{H}_λ として, $\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+} \otimes \mathcal{H}_\lambda$ は $\hat{\mathfrak{g}}$ -加群構造をもち, $\hat{\mathfrak{g}}$ の脇本表現と呼ぶ. $\hat{\rho}$ は単射なので, $V^k(\mathfrak{g})$ が $\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+} \otimes \mathcal{H}$ の中に埋め込まれているが, Feigin-Frenkel によればその像は generic な k に対して, スクリーニング作用素の核として書けることが知られている. すなわち

$$0 \rightarrow V^k(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\hat{\rho}} \mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+} \otimes \mathcal{H} \xrightarrow{\oplus S_\alpha} \bigoplus_{\alpha \in \Pi} \mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+} \otimes \mathcal{H}_{\lambda_\alpha} \quad (1)$$

なる完全系列が存在する. ただし $\lambda_\alpha = -\alpha/(k + h^\vee) \in \mathfrak{h}^*$ であり, $S_\alpha : \mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+} \otimes \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+} \otimes \mathcal{H}_{\lambda_\alpha}$ は

$$S_\alpha = \int \hat{\rho}^R(e_\alpha(z)) e^{\int \lambda_\alpha(z) dz}$$

で与えられる. ここで e_α は $\alpha \in \Pi$ に対応するルートベクトルであり, $\hat{\rho}^R$ は N_+ への N_+ の右作用から誘導された Lie 代数の反準同型 $\rho^R : \mathfrak{n}_+ \rightarrow \mathcal{D}_{N_+}$ のアフライン化である. 特に (1) から generic な k に対して

$$V^k(\mathfrak{g}) \simeq \bigcap_{\alpha \in \Pi} \text{Ker } S_\alpha$$

となる.

5 \mathcal{W} 代数の脇本表現

完全系列 (1) に対して関手 $H_{D,S,f}^0(?)$ を考えると, N_+ に適切な座標を与えれば

$$0 \rightarrow \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) \xrightarrow{\hat{\mu}} \mathcal{A}_{\mathfrak{r}_+} \otimes \mathcal{H} \otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}) \xrightarrow{\oplus Q_\alpha} \bigoplus_{\alpha \in \Pi} \mathcal{A}_{\mathfrak{r}_+} \otimes \mathcal{H}_{\lambda_\alpha} \otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}) \quad (2)$$

となる. ただし $\mathcal{A}_{\mathfrak{r}_+}$ は $\mathfrak{r}_+ = \mathfrak{n}_+ \cap \mathfrak{r}$ に対応する無限次元 Weyl 代数の Fock 空間であり $\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+}$ の部分頂点代数, $F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ はある $\beta\gamma$ システムである. また Q_α は S_α から誘導されたスクリーニング作用素である.

定理 5.1. Q_α は S_α の式から計算して陽に表示できる.

(2) から generic な k に対して

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) \simeq \bigcap_{\alpha \in \Pi} \text{Ker } Q_\alpha$$

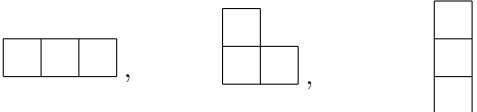
となる. Q_α が計算できるため \mathcal{W} 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ の生成元が (比較的) 容易に計算できる. また $\hat{\mu} : \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) \rightarrow \mathcal{A}_{\mathfrak{r}_+} \otimes \mathcal{H} \otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ を介して, 任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し $\mathcal{A}_{\mathfrak{r}_+} \otimes \mathcal{H}_\lambda \otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ を $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ -加群と見做すことができる. これを \mathcal{W} 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ の脇本表現と呼ぶことにする. $f = f_{\text{prin}}$ が主べき零元の時, $\mathcal{A}_{\mathfrak{r}_+} \otimes \mathcal{H} \otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}) = \mathcal{H}$ となりこれは Feigin-Frenkel の結果に一致する. また $f = 0$ の時, これは $\hat{\mathfrak{g}}$ の脇本表現そのものとなる. 従ってこの結果は $\hat{\mathfrak{g}}$ の脇本表現の \mathcal{W} 代数における自然な一般化を与えている.

6 ”Coproduct” 構造

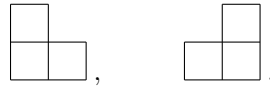
W 代数の協本表現の応用として, A 型の W 代数の ”coproduct” 構造について述べる. $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ とすると $W^k(\mathfrak{gl}_n, f) = W^k(\mathfrak{sl}_n, f) \otimes \mathcal{Z}$ となる. ただし \mathcal{Z} は \mathfrak{gl}_n の中心からなる Heisenberg 代数である. \mathfrak{gl}_n のべき零元 f_1 と f_2 が $GL_n(\mathbb{C})$ の作用で共役の時, \mathfrak{gl}_n の元としては f_1 と f_2 の性質は本質的に同じなので, 対応する W 代数 $W^k(\mathfrak{gl}_n, f_1)$ と $W^k(\mathfrak{gl}_n, f_2)$ は同型である. そこで \mathfrak{gl}_n のべき零元で共役でないものを考えれば十分である. それは Jordan 標準形で分類され, 特に n の分割で分類できる. 従って Young 図形を用いて表すことができる. $n = 3$ の時は次のようになる.

$$f = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

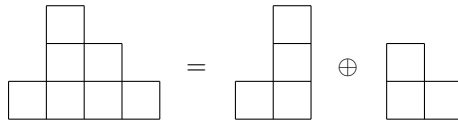
3 の分割: $(3), (2, 1), (1, 1, 1),$

Young 図形: 

ここで Young 図形のずらしを考える. Young 図形の一番下の段以外の箱を左右にずらす. この時ずらされた箱が浮いたり, はみ出したりしないように下の箱が上の箱を完全に支えるようにする. また二つ以上の箱に被さるように一つの箱を乗せることは許さない. 例えば上の例では真ん中の Young 図形だけ動かすことができ, 下の二つのずらし方のみが許される.



こうしてずらされた Young 図形をピラミッドと呼ぶ. ここでピラミッド \mathcal{P} の分割を考える. ピラミッド \mathcal{P} を縦のラインに沿って二つのピラミッド \mathcal{P}_1 と \mathcal{P}_2 に別れた時, それを $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$ で表す. 例えば



のような分割が考えられる. ピラミッド \mathcal{P} に対して元の Young 図形に対応する \mathfrak{gl}_n のべき零元を $f_{\mathcal{P}}$ とし, $W^k(\mathfrak{gl}_n, \mathcal{P}) = W^k(\mathfrak{gl}_n, f_{\mathcal{P}})$ で定義する.

定理 6.1. generic な k の時, 任意のピラミッドの分割 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$ に対し, 頂点代数の単射準同型

$$\Delta_{1,2} : W^k(\mathfrak{gl}_n, \mathcal{P}) \rightarrow W^{k_1}(\mathfrak{gl}_{n_1}, \mathcal{P}_1) \otimes W^{k_2}(\mathfrak{gl}_{n_2}, \mathcal{P}_2)$$

が存在する. ただし n_i は \mathcal{P}_i に含まれる箱の数, k_i は $k + n = k_1 + n_1 = k_2 + n_2$ を満たす.

証明. \mathcal{W} 代数の脇本表現から, generic な k に対して

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{gl}_n, \mathcal{P}) \simeq \bigcap_{i=1}^{n-1} \text{Ker } Q_{\alpha_i} \quad (3)$$

が成り立つ. Q_{α} の式を具体形を用いることで,

$$\mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{gl}_{n_1}) \simeq \bigcap_{i=1}^{n_1-1} \text{Ker } Q_{\alpha_i}, \quad \mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{gl}_{n_2}) \simeq \bigcap_{i=n_1+1}^{n-1} \text{Ker } Q_{\alpha_i} \quad (4)$$

となることがわかる. 一方で Q_{α_i} と Q_{α_j} は $|i-j| > 1$ なら可換なので,

$$0 \rightarrow \bigcap_{i=1}^{n-1} \text{Ker } Q_{\alpha_i} \rightarrow \bigcap_{i=1}^{n_1-1} \text{Ker } Q_{\alpha_i} \otimes \bigcap_{i=n_1+1}^{n-1} \text{Ker } Q_{\alpha_i} \xrightarrow{Q_{\alpha_{n_1}}} \mathcal{A}_{\mathfrak{r}_+} \otimes \mathcal{H}_{\lambda_{\alpha_{n_1}}} \otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}) \quad (5)$$

となる. (3)(4) と (5) を組み合わせることで, (5) の最初の単射準同型が求めたい $\Delta_{1,2}$ である. \square

\mathcal{W} 代数の有限版とも呼べるものとして, 有限 \mathcal{W} 代数がある. この時定理 6.1 の有限 \mathcal{W} 代数版が Brundan-Kleshchev によって与えられる [BK]. これは実際には A 型の Yangian の coproduct 構造から誘導されていることがわかる. 従って定理 6.1 の $\Delta_{1,2}$ は, 有限 \mathcal{W} 代数の coproduct 構造のファイブ版とも呼ぶべきものになっている.

参考文献

- [BK] J. Brundan, A. Kleshchev. Shifted Yangians and finite \mathcal{W} -algebras. *Adv. Math.*, 200(1):136–195, 2006.
- [FL] V. A. Fateev, S. L. Lukyanov. Additional symmetries and exactly solvable models of two-dimensional conformal field theory. *Sov. Sci. Rev. A. Phys.*, 15:1–117, 1990.
- [FF1] B. L. Feigin, E. Frenkel. A family of representations of affine Lie algebras. *Russ. Math. Surv.*, 43(5):221–222, 1988.
- [FF2] B. L. Feigin, E. Frenkel. Quantization of Drinfel’d-Sokolov reduction. *Phys. Lett., B* 246(1–2):75–81, 1990.
- [FF3] B. L. Feigin, E. Frenkel. Affine Kac-Moody algebras at the critical level and Gel’fand-Dikii algebras. *Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991)*, 197–215, Adv. Ser. Math. Phys., 16, *World Sci. Publ., River Edge, NJ*, 1992.
- [G1] N. Genra. Screening Operators for \mathcal{W} -algebras. *Selecta Math. (N.S.)*, 23(3):2157–2202, 2017.
- [G2] N. Genra. Coproducts for Affine \mathcal{W} -algebras. in preparation.
- [KRW] V. G. Kac, S.-S. Roan, M. Wakimoto. Quantum reduction for affine superalgebras. *Comm. Math. Phys.*, 241(2-3):307–342, 2003.
- [W] M. Wakimoto. Fock representations of affine Lie algebra $A_1^{(1)}$. *Comm. Math. Phys.*, 104:605–609, 1986.

- [Z] A. B. Zamolodchikov. Infinite extra symmetries in two-dimensional conformal quantum field theory. *Teoret. Mat. Fiz.*, 65(3):347–359, 1985.

ロンサム分解可能な行列について

鎌野 健* (大阪工業大学)

概要

ロンサム行列とは、成分が0または1の行列で、行和ベクトルと列和ベクトルから一意的に定まる行列のことである。本稿では、ロンサム分解可能行列という行列を導入し、行列がロンサム分解可能であることと、その行列がある特殊な行列を部分行列として含まないことが同値であることを証明する。また、 $m \times n$ のロンサム分解可能行列の個数 $D_k(m, n)$ に関する母関数表示を与え、 $D_k(m, n)$ に関する合同式を導く。なお、本内容の詳細に関しては、筆者による [5] をご参照頂きたい。

1 ロンサム行列

成分が0または1からなる行列 ((0,1)-行列とよぶ) で、行和ベクトルと列和ベクトルから一意的に定まる行列を**ロンサム行列** (lonesum matrix) という。

例 1.1. (1) 行和ベクトル ${}^t(1, 3)$, 列和ベクトル $(2, 1, 1)$ のとき,

$$\begin{matrix} & 2 & 1 & 1 \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ と一意的に定まるので, } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ はロンサム行列である.}$$

(2) 行和ベクトル ${}^t(2, 2)$, 列和ベクトル $(2, 1, 1)$ のとき,

$$\begin{matrix} & 2 & 1 & 1 \\ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ と一意的に定まらないので,}$$

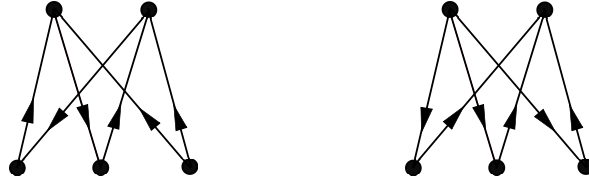
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ や } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ はロンサム行列でない.}$$

サイズが $m \times n$ のロンサム行列の個数を $L(m, n)$ と表す。また簡単のため、 $L(m, 0) = L(0, m) = 1$ ($m \geq 0$) と定める。ロンサム行列の個数 $L(m, n)$ は、様々な組み合わせ論的対象と関係があり、例えば次の事実が知られている。

*E-mail: ken.kamano@oit.ac.jp

命題 1.2 ([3]). $m, n \geq 1$ とする. 完全2部グラフ $K_{m,n}$ の各辺に向きを付けたとき, 有向サイクルを持たないものの個数は, $L(m, n)$ と一致する.

例えば次の図は, 完全2部グラフ $K_{2,3}$ の向き付けで, 左側は有向サイクルを持つもの, 右側は有向サイクルを持たないものである.



さて, $m \times n$ の $(0, 1)$ -行列 $A = (a_{ij})$ が条件

$$\begin{cases} a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{kj} = 0 & (k \geq i) \\ a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{il} = 0 & (l \geq j) \end{cases}$$

を満たすとき, A を**フェラーズ行列**という. この条件は, A の1の成分が全て左上に集まっていることを意味する. 例えば,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

はフェラーズ行列である. 次の結果は, 本質的に Ryser [7] によって示された.

命題 1.3. $(0, 1)$ -行列 A に対して, 次の条件は同値である:

- (i) A はロンサム行列.
- (ii) A は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を部分行列として持たない.
- (iii) A は, フェラーズ行列の行の入替および列の入替により得られる.

整数 k に対して, Kaneko [6] は多重ベルヌーイ数 $B_n^{(k)}$ を次のように定義した.

$$\frac{\text{Li}_k(1 - e^{-t})}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)} \frac{t^n}{n!}.$$

ここで, $\text{Li}_k(z)$ は $\text{Li}_k(z) := \sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^k$ で定義される関数である. 特に $k \geq 1$ のときは, この関数は多重対数関数と呼ばれる. また, $B_n^{(1)}$ は古典的なベルヌーイ数である.

Brewbaker は, $L(m, n)$ と多重ベルヌーイ数の間に, 次のような対応があることを証明した.

定理 1.4 (Brewbaker [2]).

$$L(m, n) = B_n^{(-m)} \quad (m, n \geq 0).$$

この結果より前に, Kaneko によって多重ベルヌーイ数の母関数表示が知られていたため, その結果を使えば, $L(m, n)$ は次の表示を持つこともわかる.

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} L(m, n) \frac{x^m y^n}{m! n!} = \frac{e^{x+y}}{e^x + e^y - e^{x+y}}.$$

2 ロンサム分解可能行列

サイズの等しい行列 A, B に対して, A と B が行の入替および列の入替で移り合うとき, $A \sim B$ と表す. $(0, 1)$ -行列 A が

$$A \sim \begin{pmatrix} L_1 & & & O \\ & L_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & L_k \end{pmatrix}$$

を満たすとき, A を**ロンサム分解可能行列**という. ただし, L_i ($1 \leq i \leq k$) はロンサム行列である. ロンサム行列はフェローズ行列から得られるので, ロンサム分解可能行列 A は, 次の形で表現することもできる.

$$A \sim \begin{pmatrix} F_1 & & & O \\ & F_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & F_k \\ & & & & O \end{pmatrix}.$$

ただし, F_i ($1 \leq i \leq k$) は零行, 零列のないフェローズ行列である. この表示は F_i たちの順序を除いて一意的であり, フェローズ行列の個数 k を A の**分解指数**という.

2×3 行列 U を

$$U := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と定める. U は, ロンサム分解可能でない行列のうち, 最もサイズの小さいものの1つである. 集合 \mathcal{N} を $\mathcal{N} = \{A \mid A \sim U \text{ または } A \sim {}^t U\}$ とする. すなわち, \mathcal{N} の元は次の12個の行列である:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

次の定理は、本稿の最初の主結果である。

定理 2.1. $(0, 1)$ -行列 A に対して、次の条件は同値である：

- (i) A はロンサム分解可能行列である。
- (ii) A は \mathcal{N} の元を部分行列として含まない。

証明. (i) \Rightarrow (ii) は明らかである。(ii) \Rightarrow (i) を帰納法で示す。 2×2 以下の行列では主張が成り立っており、転置をとってもロンサム分解可能の性質は変わらないので、 $m \times n$ 行列で主張が成り立つとすると、 $m \times (n+1)$ 行列でも成り立つ ($m, n \geq 2$) ことを示せば十分である。

A を $m \times (n+1)$ の $(0, 1)$ -行列で、 \mathcal{N} の元を含まないものとする。 A を $m \times n$ 行列に $n+1$ 列目を添えた行列と見れば、帰納法の仮定より、

$$A \sim \left(\begin{array}{ccc|c} F_1 & & O & \mathbf{b}_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ O & & F_k & \mathbf{b}_k \\ & & & \mathbf{c} \end{array} \right)$$

とできる。ただし、 F_i ($1 \leq i \leq k$) は零行、零列のないフェローズ行列であり、 \mathbf{b}_i ($1 \leq i \leq k$) と \mathbf{c} は $(0, 1)$ -ベクトルである。もし非零なベクトル $\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j$ ($i \neq j$) があるなら、部分行列 $\begin{pmatrix} F_i & O & \mathbf{b}_i \\ O & F_j & \mathbf{b}_j \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ を含んでしまうので、 \mathcal{N} の元を含まないことに矛盾する。よって、 $\mathbf{b}_1 = \cdots = \mathbf{b}_{k-1} = \mathbf{0}$ と仮定しても一般性を失わない。

さらに、次の2つの場合を考える。(i) \mathbf{c} が1の成分を持つ、(ii) \mathbf{c} が1の成分を持たない。

(i) の場合.

ベクトル \mathbf{b}_k が成分0, 1の両方を持てば、 $\begin{pmatrix} F_k & \mathbf{b}_k \\ O & \mathbf{c} \end{pmatrix}$ は部分行列として $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ま

たは $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を持つので、 A は \mathcal{N} の元を含まないことに矛盾する。よって、 $\mathbf{b}_k = \mathbf{1}$

または $\mathbf{0}$ である. $\mathbf{b}_k = \mathbf{1}$ のとき,

$$\left(\begin{array}{c|c} F_k & \mathbf{b}_k \\ \hline O & \mathbf{c} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & F_k & \\ \hline \mathbf{c} & & O \end{array} \right)$$

となる. この右辺はロンサム行列であるから, 主張が成り立つ. $\mathbf{b}_k = \mathbf{0}$ のとき,

$$\left(\begin{array}{c|c} F_k & \mathbf{b}_k \\ \hline O & \mathbf{c} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} F_k & \mathbf{0} & \\ \hline \mathbf{c} & & O \end{array} \right)$$

である. この右辺は指数 2 のロンサム分解可能行列であるから, やはり主張が成り立つ.

(ii) の場合.

このとき,

$$\left(\begin{array}{c|c} F_k & \mathbf{b}_k \\ \hline O & \mathbf{c} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} F_k & \mathbf{b}_k & \\ \hline \mathbf{0} & & O \end{array} \right)$$

である. 行列 $(F_k \mathbf{b}_k)$ はロンサム行列ではないとすると, 命題 1.3 より, これは $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を部分行列として持つ. ところが F_k はゼロ列を持たない

ので, 行列 $(F_k \mathbf{b}_k)$ は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を持つことになり, A が \mathcal{N} の元を含まないことに矛盾する. よって, $(F_k \mathbf{b}_k)$ はロンサム行列となり, この場合も主張が成り立つ. \square

3 母関数表示

整数 $k \geq 0$ に対して, 分解指数 k の $m \times n$ のロンサム分解可能行列の個数を $D_k(m, n)$ と表す. ただし, $D_k(m, 0) = D_k(0, m) = 0$ ($k \geq 1, m \geq 0$), $D_0(m, n) = 1$ ($m, n \geq 0$) とする. さらに, $D(m, n) := \sum_{k=0}^{\infty} D_k(m, n)$ ($m, n \geq 0$) とする. $L(m, n) = D_0(m, n) + D_1(m, n)$ であることに注意する. なお本稿の最後に, $D_1(m, n)$, $D_2(m, n)$, $D(m, n)$ の表を載せた.

D_k および D は, 次の母関数表示を持つことが示せる.

定理 3.1.

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} D_k(m, n) \frac{x^m y^n}{m! n!} = \frac{e^{x+y}}{k!} \left(\frac{1}{e^x + e^y - e^{x+y}} - 1 \right)^k \quad (k \geq 0),$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} D(m, n) \frac{x^m y^n}{m! n!} = \exp \left(\frac{1}{e^x + e^y - e^{x+y}} + x + y - 1 \right).$$

注意 3.2. Ju-Seo [4] は特定の 2×2 行列を含まないような行列の個数について調べ、それを係数に持つ母関数について考察した。一般に、ある特定の行列を含まないような行列の個数を数えるのは難しいようであるが、本定理は \mathcal{N} の元 (2×3 または 3×2 行列) を含まないような行列の個数の母関数を与えることに成功しており、興味深い。

さて、 $D_k(m, n)$ の母関数を $G_k(x, y) := \frac{e^{x+y}}{k!} \left(\frac{1}{e^x + e^y - e^{x+y}} - 1 \right)^k$ とおく。この関数は、

$$\frac{\partial}{\partial x} G_k = G_k + (e^y - 1) \left((k-1)G_k + G_{k-1} + \frac{\partial}{\partial y} G_k \right)$$

を満たすことが直接的な計算で確かめられる。この両辺の係数を比較することにより、次の漸化式が得られる。

命題 3.3. 整数 $k \geq 1, m, n \geq 0$ に対して、次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} D_k(m+1, n) \\ = D_k(m, n) + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} ((k-1)D_k(m, l) + D_{k-1}(m, l) + D_k(m, l+1)). \end{aligned}$$

4 $D_k(m, n)$ の合同式

$m \times n$ のロンサム行列の個数 $L(m, n)$ に関して、次の表示式が知られている。

$$L(m, n) = \sum_{j=0}^{\min(m, n)} (j!)^2 \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ j+1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ j+1 \end{matrix} \right\} \quad (m, n \geq 0).$$

ここで、 $\left\{ \begin{matrix} m \\ j \end{matrix} \right\}$ は第二種スターリング数である (e.g., [1] [2]). 次の命題は、 $D_k(m, n)$ も同様の表示式を持つことを言っている。

命題 4.1. 整数 $k \geq 1, m, n \geq 0$ に対して、次の式が成り立つ。

$$D_k(m, n) = \frac{1}{k!} \sum_{j=k}^{\min(m, n)} \binom{j-1}{k-1} (j!)^2 \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ j+1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ j+1 \end{matrix} \right\}.$$

証明. $D_k(m, n)$ の母関数を変形する.

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{x+y}}{k!} \left(\frac{1}{e^x + e^y - e^{x+y}} - 1 \right)^k \\
&= \frac{e^{x+y}}{k!} \left(\frac{(e^x - 1)(e^y - 1)}{1 - (e^x - 1)(e^y - 1)} \right)^k \\
&= \frac{e^{x+y}}{k!} \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j-1}{k-1} (e^x - 1)^j (e^y - 1)^j \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j-1}{k-1} \frac{1}{(j+1)^2} \frac{d}{dx} (e^x - 1)^{j+1} \frac{d}{dy} (e^y - 1)^{j+1}.
\end{aligned}$$

いま,

$$(e^z - 1)^m = m! \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} \frac{z^n}{n!}$$

なので,

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{x+y}}{k!} \left(\frac{1}{e^x + e^y - e^{x+y}} - 1 \right)^k \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j-1}{k-1} (j!)^2 \sum_{l=j}^{\infty} \sum_{m=j}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} l+1 \\ j+1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ j+1 \end{matrix} \right\} \frac{x^l y^m}{l! m!}
\end{aligned}$$

となる. よって示したい式が示せた. \square

第二種スターリング数にはその性質が詳しく調べられており, それらの結果を用いれば, 次の合同式を得ることができる.

定理 4.2. 正整数 k, m, m', n, n' , 素数 p に対して, 次の合同式が成り立つ.

(i) $k \geq p$ のとき,

$$D_k(m, n) \equiv 0 \pmod{p}.$$

(ii) $m \equiv m'$ かつ $n \equiv n' \pmod{p-1}$ のとき,

$$D_k(m, n) \equiv D_k(m', n') \pmod{p}.$$

(iii) $p > k$ のとき,

$$D_k(p-1, n) \equiv \begin{cases} 0 & (n \not\equiv 0 \pmod{p-1}) \\ \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} & (n \equiv 0 \pmod{p-1}) \end{cases} \pmod{p}.$$

(iv)

$$D_k(p, n) \equiv \begin{cases} 2^n - 1 & (k = 1) \\ 0 & (k \geq 2) \end{cases} \pmod{p}.$$

表 1: $D_1(m, n)$

$m \setminus n$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	3	7	15	31
2	0	3	13	45	145	453
3	0	7	45	229	1065	4717
4	0	15	145	1065	6901	41505
5	0	31	453	4717	41505	329461

表 2: $D_2(m, n)$

$m \setminus n$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	2	12	50	180
3	0	0	12	108	660	3420
4	0	0	50	660	5714	40860
5	0	0	180	3420	40860	391500

表 3: $D(m, n)$

$m \setminus n$	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	4	8	16	32
2	1	4	16	58	196	634
3	1	8	58	344	1786	8528
4	1	16	196	1786	13528	90946
5	1	32	634	8528	90446	833432

謝辞

第 34 回代数的組合せ論シンポジウムにて講演する機会を与えて下さった佐藤巖先生 (小山高専) および世話人の先生方, 講演者として推薦して下さい下さった大野泰生先生 (東北大学) に感謝致します. また, 本研究は JSPS 科研費 若手研究 (B) (16K17583) の助成を受けたものです.

参考文献

- [1] T. Arakawa and M. Kaneko: On poly-Bernoulli numbers, *Comment. Math. Univ. Sancti Pauli* **48** (1999), 159–167.
- [2] C. Brewbaker: A combinatorial interpretation of the poly-Bernoulli numbers and two Fermat analogues, *Integers* **8** (2008), A02.
- [3] P. J. Cameron and C. A. Glass: Acyclic orientations and poly-Bernoulli numbers, [arXiv:1412.3685](https://arxiv.org/abs/1412.3685).
- [4] H.-K. Ju and S. Seo: Enumeration of $(0, 1)$ -matrices avoiding some 2×2 matrices, *Discrete Math.* **312** (2012), 2473–2481.
- [5] K. Kamano: Lonesum decomposable matrices, [arXiv:1701.07157](https://arxiv.org/abs/1701.07157).
- [6] M. Kaneko: Poly-Bernoulli numbers, *J. Theor. Nombres Bordeaux* **9** (1997), 221–228.
- [7] H. J. Ryser: Combinatorial properties of matrices of zeros and ones, *Canad. J. Math.* **9** (1957), 371–377.

Jordan Matsuo algebras over fields of characteristic 3

矢部 貴大 (東京大学大学院数理科学研究科)

1 はじめに

partial triple system に対して、associated Matsuo algebra と呼ばれる可換非結合的代数の族が [3]([4]) において定められた。特に、Fischer space については、[2] によって、primitive axial algebra of Jordan type という class に含まれていることが述べられている。この associated Matsuo algebra が Jordan algebra でもあるような Fischer space の分類は [1] によりはじめられた。しかし、この論文においては、標数 3 の体上におけるある特殊な場合が述べられていない。今回の成果は、標数 3 の体上における分類を完成させたというものである。

2 準備

partial triple system とは、集合 \mathcal{P} とその位数 3 の部分集合の族 \mathcal{L} の組で、任意の二元 $p, q \in \mathcal{P}$ についてその双方を含む \mathcal{L} の元が高々 1 つであるようなものを言う。 \mathcal{P} の元を point, \mathcal{L} の元を line と言い、相異なる二元 $p, q \in \mathcal{P}$ が同一の line 上にあるとき collinear と言って $p \sim q$ と書く。 \sim の生成する同値関係の同値類を連結成分と言う。partial triple system $(\mathcal{P}', \mathcal{L}') \subset (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ で、 \mathcal{P}' の 2 点を通る line が常に \mathcal{L}' に含まれるものを subsystem と言う。 $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ 自身を生成するような point の集合の大きさで最小なものを $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ の rank という。partial triple system の例としては、次の二つが挙げられる。dual affine plane of order 2 $DA(2, 2)$ は位数 2 の射影平面から 1 点とそれを通る直線を全て取り除くことで得られる。位数 3 の n 次元 affine 空間 $AG(n, 3)$ は、各ベクトルを point、各 1-flat を line とすることで partial triple system とみなせる。Fischer space とは、二つの相異なり、交わる line の生成する subsystem が $DA(2, 2)$ か $AG(2, 3)$ であるような partial triple system である。

後で用いる Fischer space の例を二つ挙げる。 $AG(n, 3)$ は、明らかに Fischer space である。 n 次対称群に含まれる互換を point とし、3 次対称群を生成するような 3 つの互換の集合を line とすれば、これは Fischer space を定める。以下この Fischer space を $FSS(n)$ と書く。

partial triple system $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ 、体 \mathbb{F} 、定数 $\delta \in \mathbb{F}$ について、associated Matsuo algebra $M((\mathcal{P}, \mathcal{L}), \delta, \mathbb{F})$ は、 \mathbb{F} -線型空間 $\bigoplus_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{F}a(p)$ 上に、次のように積を定めることで得られる。

- (1) 任意の point p に対し、 $a(p)^2 = a(p)$ 。
- (2) 相異なる point p, q が collinear でないとき、 $a(p)a(q) = 0$ 。
- (3) $\{p, q, r\}$ が line のとき、 $a(p)a(q) = \delta(a(p) + a(q) - a(r))$ 。

3 主定理

次に述べる定理が、標数3の体上で Jordan であるような Matsuo algebra を定める Fischer space の分類を与える。

定理. \mathbb{F} を標数3の体、 Π を rank が有限で、連結な Fischer space とする。この時、 $M(\Pi, \frac{1}{4}, \mathbb{F})$ が Jordan 代数となることは、 Π が $FSS(n)$ か $AG(n, 3)$ と同型となることと同値である。

n が3以上の時、 $AG(n, 3)$ は標数3の体上でのみ Jordan algebra を定めている。その他の場合においては、標数が2でない体上においても Jordan algebra を定める。

各 $a(p)$ について、 $a(p)$ 倍写像の固有空間分解を考えれば、Matsuo algebra が Jordan になるのは $\delta = \frac{1}{4}$ のときに限ることはすぐわかるため、定理においては δ の値を固定している。

$M(FSS(n), \frac{1}{4}, \mathbb{F})$ は、 n 次正方形のなす Jordan algebra の subalgebra となることが [1] で示されている。 $M(AG(n, 3), \frac{1}{4}, \mathbb{F})$ については、linearized Jordan identity とされる次の関係式が常に満たされる。

$$((xy)z)w + ((yw)z)x + ((wx)z)y - (xy)(zw) - (yw)(zx) - (wx)(zy) = 0$$

標数3の体上でも、べき等元で張られている algebra についてはこの関係式から Jordan identity が示される。Jordan identity から linearized Jordan identity が導かれることについては、例えば [5] などに述べられている。

rank が4以下のものについては各場合ごとに計算することで、Jordan であるような Matsuo algebra を与えるのは定理に述べられた2通りの物のみであることが示される。この時、rank 4での構造がこの2通りに限られることにより、全体の構造も定まってしまう。よって rank が5以上の時も Matsuo algebra が Jordan となるような Fischer space がこれらの場合に限られることが証明され、これによって定理が示される。

参考文献

- [1] T. De Medts, F. Rehren, *Jordan algebras and 3-transposition groups*, J. algebra **478** (2017), 318–340.
- [2] J.I. Hall, F. Rehren, and S. Spectorov, *Primitive axial algebras of Jordan type*, J. algebra **437** (2015), 79–115, arXiv:1403.1898.
- [3] A. Matsuo, *3-transposition groups of symplectic type and vertex operator algebras*, Preprint, arXiv:math/0311400.
- [4] A. Matsuo, *3-transposition groups of symplectic type and vertex operator algebras*, J. Math. Soc. Japan **57**, 3 (2005), 639–649.
- [5] K. McCrimmon, *A taste of Jordan algebras*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2004.

アダマール行列と超共形代数

宮本雅彦（筑波大学数理物質系）、千吉良直紀（熊本大学理学部）

2017年6月15日@小山

1 プロローグ

この講演の主目的は、以下のような生成関係式が複雑な中心電荷 6 の $N = 4$ 超共形代数 $\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$ を 12 次のアダマール行列を使って構成することである。この方法をきっかけとして、マシュー群 M_{24} の元の作用で不変な超共形代数 $\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$ が構成でき、マシュー・ムーニンシャイン予想の別証明を与えた。

中心電荷 6 の $N = 4$ 超共形代数 $\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$ とは、以下の関係式を満たす 8 グループの元

$$L(m), T^1(m), T^2(m), T^3(m), G^1(m), G^2(m), \bar{G}^1(m), \bar{G}^2(m) \quad (m \in \mathbb{Z})$$

で生成される代数のことである。

(1) $L(m)$ は中心電荷 6 のヴィラソロ代数の生成関係式（交換関係式）を満たす。

$$[L(m), L(n)] = (m - n)L(m + n) + \delta_{m, -n} \frac{m^3 - m}{2}$$

(2) $T^i(m)$ ($i = 1, 2, 3$) はリー交換式

$$[T^i(m), T^j(n)] = \sqrt{-1} \epsilon^{ijk} T^k(m + n) + \frac{1}{2} m \delta_{m+n, 0} \delta_{ij}$$

を満たす。ここで、 $e^{i,j,k}$ は物理で使われる記号で、 $\{i, j, k\} \neq \{1, 2, 3\}$ なら $\epsilon^{ijk} = 0$ であり、 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ なら $\epsilon^{ijk} = \text{sgn}(i, j, k) \in \{\pm 1\}$ である $\text{Span}_{\mathbb{C}}\{T_0^i : i = 1, 2, 3\}$ だけ見ると、3次元の単純リー代数 sl_2 と同型なリー代数となっている。

ヴィラソロ代数との関係は、 $[L_m, T_n^i] = -n T_{m+n}^i$ であり、後で示すように、これは頂点作用素代数の立場でみると、ウエイト $\text{wt}(T^i) = 1$ を意味している。

(3) 元 $G^a(r), \bar{G}^a(r)$ ($a = 1, 2, r \in \mathbb{Z}$) は、超代数のパリティが奇部分の元であり、関係式は反交換関係式 $\{A, B\} = AB + BA$ で与えられる。

$$\begin{aligned} \{G^a(r), G^b(s)\} &= \{\bar{G}^a(r), \bar{G}^b(s)\} = 0, \\ \{G^a(r), \bar{G}^b(s)\} &= 2\delta_{a,b} L(r + s) - 2(r - s)\sigma_{ab}^i T^i(r + s) + \frac{1}{2}(4r^2 - 1)\delta_{r+s, 0} \end{aligned}$$

パリティが偶部分の元との交換関係式は

$$[T^i(m), G^a(r)] = -\frac{1}{2} \sum_b \sigma_{a,b}^i G^b(m + r), \quad [T^i(m), \bar{G}^a(r)] = \frac{1}{2} \sum_b \sigma_{ab}^{i*} \bar{G}^b(m + r)$$

で与えられる。ここで、 $0* = 0, 1* = 2, 2* = 1$ で、記号 $\sigma_{a,b}^i$ は $(\{a, b, i\} = \{1, 2, 3\})$ なら 1 で、それ以外は 0 である。また、 $L(m)$ との関係は

$$[L(m), G^a(r)] = \left(\frac{1}{2}m - r\right)G^a(m + r), \quad [L(m), \bar{G}^a(r)] = \left(\frac{1}{2}m - r\right)\bar{G}^a(m + r)$$

であり、ウエイト $\text{wt}(G^a) = \text{wt}(\bar{G}^a) = 3/2$ である。

後で、これを構成するより簡単な方法を説明するので、上記の定義は忘れてよい。ただ、頂点作用素代数 (VOA) との関係を見るために、上記の関係式や記号について少し説明しておこう。 $T^i(n)$ のように括弧付きインデックスは、実質的には時空間 z を変数とする作用素 $T^i(z)$ があって、それをフーリエ展開した

$$T^i(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} T^i(n) z^{-n-1}$$

の z^{-n-1} の係数を表していると考ええる。だから、セット $T^i(n)$ ($n \in \mathbb{Z}$) で、一つの作用素 $T^i(z)$ を表す (z を略することが多い)。 $L(n), G^a(n), \bar{G}^a(n)$ なども同様である。このような作用素 $a(z) = \sum a(n) z^{-n-1}$ にはウエイト $\text{wt}(a)$ が定義されており、

$$[L(0), a(n)] = (-n - 1 + \text{wt}(a))a(n)$$

という関係式を満たしている。上記の関係式 (1),(2),(3) から分かるが、超共形代数 $\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$ は4つの元 $G^1(z), G^2(z), \bar{G}^1(z), \bar{G}^2(z)$ で生成されている。これが $N = 4$ と表記する意味である。

当然、他の N に対しても超共形代数はある。例えば、 $N = 2$ の場合、2つの作用素 G_n, \bar{G}_n で生成された超共形代数で、ウエイト1のリー代数部分 $\text{Span}_{\mathbb{C}}\{T^i\}$ (実際には $i = 1$ のみ) は1次元可換リー代数になっている。この $N = 2$ 超共形代数は、有名なミラー対称の研究で、代数的にかなり興味ある結果を与えている。それで、 $N = 4$ も何か有用な応用があるのではないかと期待されていた。この $N = 4$ 超共形代数が注目されたのは、マシュームーンシャイン予想である。次にこれの紹介をしよう。

2010年に、江口、大栗、立川さんたちが、非常に興味ある現象を発見した。物理の場の理論では、10次元での理論を考えるが、我々は4次元 (3次元空間と時間の1次元) しか認識できていない。その差の6次元を矮小化するために、2次元球面の補空間である4次元空間の研究が必要となり、 $K3$ -曲面は重要な候補である。この $K3$ -曲面に対して、楕円種数関数

$$Z_{K3}^{\text{elliptic}}(z, q) \quad (z \in \mathbb{C}, q = e^{2\pi i \tau}, \tau \in \mathbb{H})$$

(以下、略して $Z(z, q)$ で表す) が定義できるが、これはウエイト1、指数0の弱ヤコビ形式で、 q^0 の係数は $20 + 2e^{2\pi iz} + 2e^{-2\pi iz}$ である。Wittenの結果から、この関数が、上で説明した超共形代数 $\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$ の無限個の既約加群の指標 $\text{ch}_{n,m}(z, q)$ の整数係数無限和で表示できることが分かっている。即ち、次のような形になる。

$$Z(z, q) = 24\text{ch}_{1/4,0}(z, q) + \sum_{n=0}^{\infty} A(n)\text{ch}_{n+1/4,1/2}(z, q)$$

そこで、上記の3名は、最初のいくつかの係数を実際に求めてみた。

$$\begin{aligned} Z(z, q) = & 24\text{ch}_{1/4,0}(z, q) - 2\text{ch}_{1/4,1/2}(z, q) + 90\text{ch}_{5/4,1/2}(z, q) \\ & + 462\text{ch}_{9/4,1/2}(z, q) + 1540\text{ch}_{13/4,1/2}(z, q) + \dots \end{aligned}$$

そして、出てきた係数 24, -2, 90, 462, ... がマシュー群 M_{24} の既約指標

$$\chi_1(1) = 1, \chi_2(1) = 23, \chi_3(1) = 45, \chi_4(1) = 45, 231, 231, 252, 253, 483, 770, 770, 990, \dots$$

の簡単な和で表示できることに気づいたのである。

そこで、3人は、マシュー・ムーンシャイン予想: 「 $A(n)$ はすべて M_{24} の表現の次数である」を提案した。これは、有名はモストラス・ムーンシャイン予想を産み出すきっかけとなった McKay の発見を彷彿させる。McKay の観察 (と Thompson の考察) とは、楕円モジュラー関数 $J(\tau) = q^{-1} + 244 + 196884q + \dots$ の係数と有限散在型単純群の中で最大位数を持つモンスター単純群の既約指標の次数 $1, 196883, \dots$ との関係を描いたものである。モストラス・ムーンシャイン予想は、頂点作用素代数を生み出し、共形場理論の再発展を与えている。モストラス・ムーンシャイン予想では、トンプソンがマッカイの観察を無視せず、その指導の下、コンウェイ達 (アトラスグループ) の努力により、モンスター単純群のすべての元 g 毎に楕円モジュラー関数に対応するトンプソン級数 $\text{Th}_g(\tau)$ を定義した。マシュー・ムーンシャイン予想の場合も、 K_3 -曲面のツイスト型楕円種数関数が複数の研究者によって考えられ、最終的に江口と樋上により、すべての $g \in M_{24}$ 毎に楕円種数関数 $Z_g(z, q)$ が導入され、マシュー・ムーンシャイン予想を

$$Z_g(z, \tau) = (1 + \chi_2(g))\text{ch}_{1/4,0}(z, q) - 2\text{ch}_{1/4,1/2}(z, q) + \sum_{n=1} A_n(g)\text{ch}_{1/4+n,1/2}(z, q)$$

という指標レベルに拡張した。

モストラス・ムーンシャイン予想において、トンプソン級数はすべて種数がゼロのモジュラー関数であるという不思議な性質を持っている。同じように、マシュー・ムーンシャイン予想では

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(g)q^n$$

がラマヌジャンが導入した神秘的な Mock モジュラー関数となっている。 K_3 曲面の自己同型群はすべて M_{24} (実際は M_{23}) の部分群 (向井の結果、金銅により拡張) という結果など、 K_3 曲面とマシュー群との間には神秘的な関係が観察されていたので、 K_3 曲面、超共形代数、マシュー群、モックモジュラー関数という4つの対象が結びつくマシュー・ムーンシャイン予想はかなり大きなインパクトを与えた。

いくつかの研究グループが争って、計算機を使い次から次へと A_n をマシュー群の指標の和で表示し、 $n > 300$ まで求めていった。最終的に、2012年にギャノン氏が、「もう十分だ」ということで、Much Ado about Mathieu (シェイクスピアの喜劇 Much Ado about Nothing に懸けて) というタイトルの論文を書き、残りの係数はモックモジュラー関数の性質を使って、それまでに求められていた係数達の積の和として表示できることを示し、マシュー・ムーンシャイン予想が正しいことを証明した。

2 研究動機

マシュー・ムーンシャイン予想自体は証明されたが、対象であるマシュー群や超共形代数そのものはギャノンの証明には出てこない。しかし、マシュー・ムーンシャイン予想の本質的な魅力は、 K_3 曲面の楕円種数関数とマシュー群、超共形代数の関係である。そこで、モックモジュラー関数であることを忘れ、マシュー群と超共形代数の作用を中心とし

てこの問題を再考察しようというのが我々の研究動機である。特に、マシュー群は非常に扱い易い単純群であり、モックモジュラー関数であることを忘れた方が、モックモジュラー関数が現れる本当の理由がわかると考えている。これを示すために、マシュー群の元で不変な超共形代数 $\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$ の存在を証明する必要がある。

3 舞台の設営

我々の結果の論文タイトルは Mcuh Ado about Mathieu への返歌として、同じウイリアム・シェイクスピアの有名な喜劇「12夜」(Twelfth Night or What Mathieu Will)である。それでは、 K_3 曲面の楕円種数関数、マシュー群 M_{24} , $N = 4$ 超共形代数が活躍する喜劇の舞台を設定しよう。2015年に、Duncan 達は D_{12} 型のルート格子を使った格子頂点作用素超代数 $V_{D_{12}+}$ と中心電荷 $c = 12$ の超共形代数 $\mathcal{A}_{cc=12}^{N=4}$ から、いくつかのモックモジュラー関数を構成した。格子頂点作用素超代数 (格子 VOSA と略す) 構成は次の節で紹介するので、ここでは言葉だけで説明を続ける。彼らが構成したものは我々の目的である超共形代数 $\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$ ではないが、この格子 VOSA $V_{D_{12}+}$ の頂点作用素代数 (VOA) 部分 $V_{D_{12}}$ を使う。ここで、

$$D_{12} = \left\{ \sum_{i=1}^{12} a_i x_i \mid a_i \in \mathbb{Z}, \sum a_i \equiv 0 \pmod{2} \right\} \subseteq \mathbb{Q}x_1 + \cdots + \mathbb{Q}x_{12}$$

は D_{12} 型ルート格子で、 x_1, \dots, x_{12} は正規直交基底である。その双対格子 D^* は

$$D_{12}^* = D_{12} \cup \{D_{12} + x_1\} \cup \{D_{12} + f\} \cup \{D_{12} + (f - x_1)\} \quad \left(f = \frac{x_1 + \cdots + x_{12}}{2} \right)$$

と表示できるので、格子 VOA の理論から、 $V_{D_{12}}$ は丁度4つの既約加群

$$V := V_{D_{12}}, W^1 := V_{D_{12}+f}, W^2 := V_{D_{12}+x_1}, V_{D_{12}+f+e}$$

を持つことが分かる。しかも、 $\text{Span}_{\mathbb{C}}\{D_{12}, x_1\}$, $\text{Span}_{\mathbb{C}}\{< D_{12}, f\}$, $\text{Span}_{\mathbb{C}}\{D_{12}, f - x_1\}$ はすべてユニモジュラー奇格子なので、 $V_{D_{12}} \oplus W^i$ ($i = 1, 2, 3$) はユニモジュラー VOSA である。すると、VOA の表現論の結果から、その上でのトレイス関数

$$\text{Tr}_{V \oplus W^i} e^{2\pi iz(x_1(0)+x_2(0))} q^{L(0)-1/2}$$

はすべてウェイト0、指数1の弱ヤコビ形式であり、その差

$$\text{Tr}_{V \oplus W^1} e^{2\pi iz(x_1(0)+x_2(0))} q^{L(0)-1/2} - \text{Tr}_{V \oplus W^3} e^{2\pi iz(x_1(0)+x_2(0))} q^{L(0)-1/2}$$

も弱ヤコビ形式である。ここで、 $L(0)$ の固有値が次数であり、 $x_i(0)$ は後で示すように正規直交基底のベクトル x_i から定義される作用素 $Y(x_i(-1)e^0, z)$ の次数を保つ作用である。 q^0 の係数を比較することで分かるが、これは K_3 -曲面の楕円種数関数 $Z(z, q)$ と一致するのである。この式から第1項と第2項で同じ値をとる V 上のトレイス Tr_V を除き、 W^2 上のトレイス Tr_{W^2} を両項に加えると、

$$Z(z, q) = \text{Tr}_{W^1 \oplus W^2} e^{2\pi iz(x_1(0)+x_2(0))} q^{L(0)-1/2} - \text{Tr}_{W^2 \oplus W^3} e^{2\pi iz(x_1(0)+x_2(0))} q^{L(0)-1/2}$$

となる。この形で重要なのは、 $W^1 \oplus W^2$ はホロモルフィック VOSA $V_{D_{12}} \oplus W^3$ の既約加群であり、 $W^2 \oplus W^3$ はホロモルフィック VOSA $V_{D_{12}} \oplus W^1$ の既約加群である。

ここで証明を紹介するのは難しいが、 $V_{D_{12}}$ の自己同型群は非常に大きく、24 次複素直交群 $O(24, \mathbb{C})$ である。特に、 M_{24} は $V_{D_{12}}, W^1, W^2, W^3$ のそれぞれに自己同型として作用している。

4 ラティス型の頂点作用素超代数の構成

格子頂点作用素超代数はモジュラー不変を議論するときによくの例を与えてくれるので、重要な対象である。ただ、全体の代数構造が VOSA になることを示す証明は非常に難しいが、それは利用者に必要ない。さらに、我々研究者でも利用するのは、通常ウエイトが小さい（2 以下）部分だけである。それでは、アダマール行列と格子 VOSA の関係を見るために、構成していこう。正確な定義は少し難しいが、格子を異なる 2 通りの見方で捉え、それを結合したものと理解できる。あたかも、ピカソの「椅子に座る女」のように、前面と側面から見たひとりの女性を合成するのである。

以下、対称正則 \mathbb{Q} -値 \mathbb{Z} -両線形 \langle, \rangle を持つランク n の格子 L を考える。これから 2 段階で格子頂点作用素超代数を構成する。

4.1 第一ステップ（フリーボゾン型 VOA）

フリーボゾン型頂点作用素代数 $M^2(1)$ を次のように構成する。 L を複素ベクトル空間 $\mathcal{H} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} L$ に埋め込み、内積 \langle, \rangle を \mathcal{H} に拡張する。 \mathcal{H} を（可換）リー代数だと見て、対応するアフィンリー代数

$$\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$$

を考える。リー積を直接書くと、 $x, y \in \mathcal{H}, m, n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$[x \otimes t^m, y \otimes t^n] = \delta_{m+n, 0} m \langle x, y \rangle c$$

となる。これを Heisenberg 代数と呼ばれている。記号を簡単にするために、 $x \otimes t^m$ を $x(m)$ で記す。2 つの部分代数

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}}^+ = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{\mathcal{H}(m) \mid m \geq 0\} \oplus \mathbb{C}c, \quad \hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}}^- = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{\mathcal{H}(m) \mid m \leq -1\}$$

で

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}} = \hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}}^+ \oplus \hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}}^-$$

と分解できる。各 $u \in \mathcal{H}$ に対して、 $\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}}^+$ の一次元表現 $\mathbb{C}e^u$ を

$$ce^u = e^u, \quad x(0)e^u = \langle x, u \rangle e^u, \quad x(m)e^u = 0 \quad \forall m > 0$$

と定義する。それを $\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}}$ まで誘導した加群

$$M^n(1)e^u = U(\hat{\mathcal{H}}) \otimes_{U(\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}}^+)} e^u$$

を考える。ここで $U(\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}})$ は普遍包絡環 $\text{Span}_{\mathbb{C}}\{u^1(m_1) \cdots u^k(m_k) \mid u^i \in \mathcal{H}, m_j \in \mathbb{Z}\}$ である。 $u = 0$ の場合がフリーボゾン型 VOA のフォック空間（基礎のベクトル空間） $M^n(1)e^0$

を与え、それ以外の $0 = u \in \mathcal{H}$ は既約加群 $M^n(1)e^u$ を与えている。関係式 $h^1(n)h^2(m) - h^2(m)h^1(n) = \delta_{m+n,0}\langle h^1, h^2 \rangle$ に注意すると、空間 $M^n(1)e^u$ の元は、

$$h^1(n_1)\dots h^k(n_k)e^u \quad (h^j \in \mathcal{H}, n_1 \leq \dots \leq n_k < 0)$$

という形の元の線形和で表示でき、他の関係式がないので、 h^i を \mathcal{H} の基底 $\{\beta^1, \dots, \beta^n\}$ の基でとれば、表示がほぼ一意的となる。さらに、ウエイトを

$$\text{wt}(h^1(n_1)\dots h^k(n_k)e^u) = -n_1 - \dots - n_k + \frac{\langle u, u \rangle}{2}$$

で定義すると、次数空間分解 $M^n(1)e^u = \bigoplus_{m=0}^{\infty} (M^n(1)e^u)_{m+\langle u, u \rangle/2}$ を得る。少し複雑になってきたが、先ほど話したように通常利用するのは、ウエイト 2 以下であり、 $M^n(1)e^0$ の場合には、ウエイト 0 の空間 $(M^n(1)e^0)_0$ は $\mathbb{C}e^0$ のみ。ウエイト 1 の空間 $(M^n(1)e^0)_1$ は $\text{Span}_{\mathbb{C}}\{\beta^i(-1)e^0 \mid i = 1, \dots, n\}$ であり、ウエイト 2 の空間 $(M^n(1)e^0)_2$ は、 $\text{Span}_{\mathbb{C}}\{\beta^i(-1)\beta^j(-1)e^0, \beta^i(-2)e^0 \mid i \leq j = 1, \dots, n\}$ である。より、一般に、 $M^n(1)e^0$ の次数空間は、 $\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}}$ の対称テンソル代数に同型であり、 $M^n(1)e^u$ の指標は、

$$q^{-n/24} \sum_{m=0}^{\infty} \dim((M^n(1)e^u)_{m+\langle u, u \rangle/2}) q^{m+\langle u, u \rangle/2} = q^{\frac{\langle u, u \rangle}{2}} \frac{1}{\eta(\tau)^n}$$

である。 $M^n(1)e^0$ は VOA であり、 e^0 は真空と呼ばれ、 $\mathbf{1}$ という記号を使って表す。

$h(-1)\mathbf{1} \in (M^n(1))_1$ は $h \in \mathcal{H}$ と同一視してよい。この元の頂点作用素 $Y(h(-1)\mathbf{1}, z)$ は

$$Y(h(-1)\mathbf{1}, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) z^{-n-1}$$

で与えられる。例えば、格子が D_{12} の場合、正規直交基底の基 x_i を $x_i(-1)\mathbf{1} \in (M^{12}(1)e^0)_1$ と同一視し、その次数を保つ作用 $x_i(0)$ が 3 節でヤコビ形式を定義するトレース関数の定義に出てきたものである。

4.2 第 2 ステップ (群環 $e^L = \bigoplus_{\alpha \in L} \mathbb{C}e^\alpha$ の変形)

次に、格子 L を群とみて、 L の中心拡大 \hat{L}

$$1 \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow \hat{L} \rightarrow L \rightarrow 1$$

を次のように定義する。 $v \in L$ に対して、形式的元 $e^v \in \hat{L}$ を定義し、関係式 $e^v e^u = (-1)^{\langle v, u \rangle} e^u e^v$ を考える。ただし、 $e^u e^u$ は少し面倒 (奇格子の場合には $\sqrt{-1}$ が必要な時もある) なので、ここでは略す。これと上の $M^n(1)$ とを合わせた

$$V_L = M^n(1) \otimes \left(\sum_{\alpha \in L} \mathbb{C}e^\alpha \right) = \bigoplus_{\alpha \in L} M^n(1) \otimes e^\alpha$$

が目的の格子 VOSA のベクトル空間 (フォック空間) である。より一般的に、 \mathcal{H} の部分集合 U に対しても、同様の定義を行い、 V_U で表す。

事実 L が偶格子なら V_L は VOA となる。また、 V_{v+L} ($v \in L^*$) は V_L の既約加群となる。逆に、 V_L の既約加群はすべて上で与えられる。 L が奇格子なら V_L は VOSA となり、整数ウエイト部分が VOA であり、半整数ウエイト部分が超代数の奇パリティ部分である。

4.3 頂点作用素

では $v \in V_L$ に対して頂点作用素 $Y(v, z)$ の定義を始めよう。

まず、真空 $\mathbf{1} = e^0$ に対しては、 $Y(\mathbf{1}, z)$ は恒等変換 1_{V_L} である。頂点作用素代数の基本的な性質の一つに、「結合法則」と呼ばれるものがある。即ち、 $v, u \in V$ に対して、 $Y(v, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}$ 、 $Y(u, z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} u_m z^{-m-1}$ が分かっているとき、 $v_n u$ の頂点作用素 $Y(v_n u, z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (v_n u)_m z^{-m-1}$ の係数には、

$$(v_n u)_m = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} (-1)^j \{v_{n-j} u_{m+j} - (-1)^{n+|v||u|} u_{n+m-j} v_j\}$$

という関係が入る。ここで、 $|v|$ は v のパリティが偶なら 0、奇なら 1 を表す。これにより、VOSA としての生成元たちの頂点作用素が分かれば、すべての元の頂点作用素が分かることになる。 $h \in \mathcal{H}$ に対して、 $h(-1)e^0$ の頂点作用素 $Y(h(-1)e^0, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n)z^{-n-1}$ はすでに与えてあるので、 \hat{L} の元 e^α の頂点作用素を紹介しよう。まず、

$$\begin{aligned} E^+(\alpha, z) &= \exp\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{\alpha(n)}{n} z^{-n}\right) \in \text{End } S(\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}}^-)[[z^{-1}]] \\ E^-(\alpha, z) &= \exp\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{\alpha(-n)}{-n} z^n\right) \in \text{End } S(\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}}^-)[[z]] \end{aligned}$$

を定義する。ここで、 $\exp(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi^m}{m!}$ である。これを使って、

$$Y(e^\alpha, z) = E^-(-\alpha, z)E^+(-\alpha, z)e^\alpha z^\alpha$$

と置く。ただし、VOSA のウェイトの重要な性質の一つとして、

$$\text{wt}(v(n)u) = \text{wt}(v) + \text{wt}(u) - n - 1$$

がある。 z^α の項はこれが成り立つように次数を調節するためのものなので、上の次数の関係式を中心に考えれば十分である。

これらの定義から、 \mathcal{H} の正規直交基底 $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ を取ってきて

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \beta_i (-1)^2 \in V(0)$$

と置くと、中心電荷 n のヴィラソロ元となっている。この構成は菅原構成法と呼ばれている。これで、格子 VOSA が完成したわけである。

5 中心電荷 $c = 6$ の $N = 4$ 超共形代数 $\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$ の構成

最後に、前節の構成の記号を使って、サイズ 12 のアダマール行列から、 $V_{D_{12}+W^3}$ の中に超共形代数 $\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$ が構成できることを紹介する。利用するのは、次の Mason-Tuite-Yamsukula による最近の結果である。

定理 [MTY(2016)] L を正定値奇格子で、最小ウェイト $\text{wt}(L)$ は 2 以上とする。さらに、 V_L のウェイト $3/2$ の空間の中に、2 つの 2 次元ベクトル空間 A, B があって、 A, B で生成される部分頂点代数 $V = VA(A, B)$ が次の条件を満たすとする。

- (i) $V = \mathbb{C}\mathbf{1} \oplus V_1 \oplus V_{3/2} \oplus \cdots$
(ii) A と B は sl_2 の 2次元表現空間 (この sl_2 は (iii) で与えられる)
(iii) $A(1)B \cong sl_2$, ($\text{wt}(A) = \text{wt}(B) = 3/2$ より $\text{wt}(A(1)B) = 3/2 + 3/2 - 1 - 1 = 1$)
(iv) $A(1)A = B(1)B = 0$,
(v) sl_2 は L のルート元を含む。 (今回の場合、 $e^{x_1+x_2} \in sl_2$)
この時、 A, B の中に元 $G^1, G^2, \bar{G}^1, \bar{G}^2$ が見付き、それら元の頂点作用素の係数 $G^1(n), G^2(n), \bar{G}^1(n), \bar{G}^2(n)$ 達が超共形代数の関係式を満たす。

話を $V = V_{D_{12}} + V_{D_{12}+f}$ の場合に適用してみよう。この時、 $D_{12} \cup (D_{12} + f)$ のウエイトは、 $0, 2, 3, \dots$ なので、 $V_{D_{12}} + V_{D_{12}+f} + V_{D_{12}+f-x_1}$ のウエイト $3/2$ の空間は

$$\sum_{h_1, \dots, h_{12} \in \{\pm 1\}} \mathbb{C}\mathbf{1} \otimes e^{\frac{1}{2} \sum h_i x_i}$$

である。即ち、 $h_1, \dots, h_{12} \in \{\pm 1\}$ を決めると、ウエイト $3/2$ の元 $e^{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{12} h_i x_i} \in (V_{D_{12}+f})_{3/2}$ (または $\in (V_{D_{12}+f-x_1})_{3/2}$) を与える。

命題 (h_{ij}) をサイズ 12 のアダマール行列とし、正規化して、1列目はすべて 1、2列目は上半分が 1 で下半分は -1 とする。この時、

$$\begin{aligned} G^1 &= \sum_{i=1}^6 e^{\frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{12} h_{ij} x^j)}, & G^2 &= \sum_{i=1}^6 e^{\frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{12} h_{ij} x^j) - x_1 - x_2} \\ \bar{G}^1 &= \sum_{i=1}^6 e^{-\frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{12} h_{ij} x^j)}, & \bar{G}^2 &= \sum_{i=1}^6 e^{-\frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{12} h_{ij} x^j) + x_1 + x_2} \end{aligned}$$

と置くと、 $A = \mathbb{C}G^1 + \mathbb{C}G^2$, $B = \mathbb{C}\bar{G}^1 + \mathbb{C}\bar{G}^2$ は上記の定理 [MTY] の条件を満たす。

[証明] 簡単に証明を紹介しておこう。1積 $G^1(1)G^2$ を見ると、群 \hat{L} の積の関係から群環 $e^L = \bigoplus_{\alpha} \mathbb{C}e^{\alpha}$ 部分の α としては、 $\frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{12} h_{ij} x^j) + \frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{12} h_{kj} x^j) - x_1 - x_2 \in \sum_{j=1}^{12} \mathbb{Z}x^j$ しか出てこない。一方、 $\text{wt}(G^1(1)G^2) = 1$ なので、 α の可能性は $\pm x^i \pm x^j$ だけである。しかし、アダマール行列の性質からそのようなものはないので、 $G^1(1)G^2 = 0$ である。同様に、 $G^1(1)G^1 = 0 = G^2(1)G^2$ であり、 \bar{G} 同士の 1積も同様である。次に、 G と \bar{G} の 1積を考えてみる。すると同じ議論で、 $G^1(1)\bar{G}^2 = 6e^{x_1+x_2}$ であり、 $G^2(1)\bar{G}^1 = 6e^{-x_1-x_2}$ であることが分かる。 $G^1(1)\bar{G}^1$ の場合には、ウエイト 1 以下の群環部分には e^0 しかないので、

$$E^{-}\left(\frac{\sum_{i=1}^{12} h_{ij} x_j (-1)\mathbf{1}}{2}, z\right) = \exp\left\{\sum_{m \in \mathbb{Z}_+} \sum_{j=1}^6 \frac{\sum_{i=1}^{12} h_{ij} x_j (-m)}{2m} z^m\right\}$$

のウエイト 1 を増やす作用 $\sum_{j=1}^6 \sum_{i=1}^{12} h_{ij} x_j (-1)/2$ も必要となるが、アダマール行列の性質から、 $\sum_{i=1}^6 h_{ij} = 6$ ($j = 1, 2$) かつ $\sum_{i=1}^6 h_{ij} = 0$ ($j \geq 3$) を満たしているので、

$$G^1(1)\bar{G}^1 = 6(x_1(-1) + x_2(-1))e^0$$

となることがわかる。 $G^2(1)\bar{G}^2$ も同様である。これで、 $A(1)A = B(1)B = 0$, $A(1)B = B(1)A = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{e^{x_1+x_2}, e^{-x_1-x_2}, x_1(-1)e^0 + x_2(-1)e^0\} \cong sl_2$, A と B は sl_2 -加群であることが分かり、上記の定理の条件がすべて満たしている。 [証明終]

Reguralities of the positive support of Grover walk

Norio KONNO

Department of Applied Mathematics, Faculty of Engineering, Yokohama National University

Hodogaya, Yokohama 240-8501, Japan

Iwao SATO

Oyama National College of Technology

Oyama, Tochigi 323-0806, Japan

Etsuo SEGAWA

Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

Sendai 980-8579, Japan.

1 Introduction

Discrete-time quantum walks appeared as one of the useful tools to accomplish so called quadratically quantum speed up algorithm (see [1] and its reference therein). Now a day, quantum walks have been explored from various kind of research fields [15]. In this paper, we consider graph structures from a view point of spectrum of a quantum walk [3, 4]. The quantum walk model treated here is called the Grover walk which is one of the intensively studied models by not only quantum information but also graph theory and spectral scattering theory's research fields [3, 7, 9, 11, 15]. In this paper, we address to consider a relation to some graph zeta and the Grover walk. We introduce a function $\zeta_G^{(n)}(u)$ determined by

$$\zeta_G^{(n)}(u) = \det(1 - uS(U_G^n))^{-1}.$$

Here for a real valued matrix M , $S(M)$ is the support matrix of M , such that,

$$(S(M))_{i,j} = \begin{cases} 1 & : (M)_{i,j} > 0, \\ 0 & : \text{otherwise.} \end{cases}$$

For $n = 1$ case, it is known that this is nothing but the Ihara's zeta function [13, 16]. For $n = 2$ case, we obtain a spectral mapping theorem from the adjacency matrix G and find some graph structures induced by this zeta function [12]. For $n = 3$ case, there is an interesting conjecture related to the graph isomorphic problem [4]: the spectrum of the positive support of 3-iteration of the Grover walk determines the isomorphism of the strongly regular graph;

$$G \cong H \Leftrightarrow \sigma(S(U_G^3)) = \sigma(S(U_H^3)).$$

Recently, Godsil et al [8] provide a counter example for this conjecture partially using numerics. In this paper, we obtain a spectrum mapping theorem of $S(U_G^3)$ from adjacency matrix

of G with its girth $g(G) > 5$. Taking positive supports sometimes kills some regularities of the original unitary operators. We present a necessary and sufficient condition for keeping its regularities. We provide our main theorems with respect to ‘‘Jordan decomposition’’ of positive supports of first, square and cube of Grover walks on k -regular graph with some condition.

2 Main theorem

Let $G = (V(G), E(G))$ be a connected graph (possibly multiple edges and loops) with the vertex set $V(G)$ and the edge set $E(G)$. We set $D(G)$ as the set of induced symmetric arcs by $E(G)$; the terminus and origin of $e \in D(G)$ are denoted by $t(e), o(e) \in V(G)$, respectively; the inverse arc of e is denoted by \bar{e} , that is, $t(\bar{e}) = o(e)$ and $o(\bar{e}) = t(e)$; we describe the support edge of an arc $e \in D(G)$ by $|e| \in E(G)$. Thus $D(G) = \{e, \bar{e} \mid |e| \in E(G)\}$. The degree $\deg v = \deg_G v$ of a vertex v of G is the number of edges incident to v . For a natural number k , a graph G is called k -regular if $\deg_G v = k$ for each vertex v of G .

Let $b_1(G)$ be the first Betti number, and we denote $\mathbf{1}_B = 1$ if G is bipartite, $\mathbf{1}_B = 0$ if G is non-bipartite. Now we are ready to show our main theorems as follow.

Theorem 2.1. *Let G be a connected k regular graph with $k \geq 3$. Then we have the following Jordan decomposition of $S(U)$. There exists P_1 such that*

$$P_1^{-1}S(U)P_1 = \bigoplus_{\mu \in \sigma(M) \setminus \{\pm k, \Sigma_*\}} \begin{bmatrix} w_+^{(1)}(\mu) & 0 \\ 0 & w_-^{(1)}(\mu) \end{bmatrix} \oplus \bigoplus_{\mu_* \in \Sigma_*} \begin{bmatrix} w_+^{(1)}(\mu_*) & 1 \\ 0 & w_+^{(1)}(\mu_*) \end{bmatrix} \\ \oplus (k-1) \oplus \{-\mathbf{1}_B(k-1) + (1-\mathbf{1}_B)\emptyset\} \\ \oplus \mathbf{I}_{b_1(G)} \oplus (-\mathbf{I})_{b_1(G)+1-\mathbf{1}_B}, \quad (2.1)$$

where

$$w_{\pm}^{(1)}(x) = \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{(\mu/2)^2 - k + 1}$$

Theorem 2.2. *Let G be a connected k regular graph with $k \geq 3$. Then we have the following Jordan decomposition of $S(U^2)$. There exists P_2 such that*

$$P_2^{-1}S(U^2)P_2 = \bigoplus_{\mu \in \sigma(M) \setminus \{\pm k, \Sigma_*\}} \begin{bmatrix} w_+^{(2)}(\mu) & 0 \\ 0 & w_-^{(2)}(\mu) \end{bmatrix} \oplus \bigoplus_{\mu_* \in \Sigma_*} \begin{bmatrix} w_+^{(2)}(\mu_*) & 1 \\ 0 & w_+^{(2)}(\mu_*) \end{bmatrix} \\ \oplus (k^2 - 2k + 2) \oplus \{\mathbf{1}_B(k^2 - 2k + 2) + (1 - \mathbf{1}_B)\emptyset\} \\ \oplus 2\mathbf{I}_{2b_1(G)+1-\mathbf{1}_B}, \quad (2.2)$$

where

$$w_{\pm}^{(2)}(x) = \frac{\mu^2 - 2k + 4}{2} \pm \mu \sqrt{(\mu/2)^2 - k + 1} \\ \Sigma_* = \sigma(\mathbf{M}) \cap \{\pm 2\sqrt{k-1}\}.$$

Corollary 2.1. *(Non regularity of the first and square) Let G be a connected k -regular graph with $k \geq 3$. Then*

- (1) Both $S(U)$ and $S(U^2)$ are invertible for any $k \geq 3$.
- (2) $S(U)$ and $S(U^2)$ are non-diagonalizable if and only if $\Sigma_* \neq \emptyset$.

Theorem 2.3. *Let G be connected k regular graph with $k \geq 3$ and also $g(G) \geq 5$. Then we have the following Jordan decomposition of $S(U^3)$. There exists P_3 such that*

$$\begin{aligned}
P_3^{-1}S(U)P_3 = & \bigoplus_{\mu \in \sigma(M) \setminus \{\pm k, \Sigma_{*,3}\}} \begin{bmatrix} w_+^{(3)}(\mu) & 0 \\ 0 & w_-^{(3)}(\mu) \end{bmatrix} \oplus \bigoplus_{\mu_* \in \Sigma_{*,3}} \begin{bmatrix} w_+^{(3)}(\mu_*) & 1 \\ 0 & w_+^{(3)}(\mu_*) \end{bmatrix} \\
& \oplus (k-1)(k^2 - 2k + 2) \oplus \{-\mathbf{1}_B(k-1)(k^2 - 2k + 2) + (1 - \mathbf{1}_B)\emptyset\} \\
& \oplus 2\mathbf{I}_{b_1(G)} \oplus (-2\mathbf{I}_{b_1(G)+1-\mathbf{1}_B}) \quad (2.3)
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
w_{\pm}^{(3)}(x) = & \frac{1}{2}x(x^2 - 3k + 4) \\
& \pm \frac{1}{2}\sqrt{x^6 - 2(3k-2)x^4 + (13k^2 - 24k + 16)x^2 - 8(k-1)(k^2 - 2k + 2)} \quad (2.4)
\end{aligned}$$

and

$$\Sigma_{*,3} = \sigma(M) \cap \begin{cases} \{\pm\sqrt{\frac{9-\sqrt{17}}{2}}, \pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{\frac{9+\sqrt{17}}{2}}\} & : k = 3 \\ \{\pm\mu_{*,k}\} & : k \geq 4 \end{cases} \quad (2.5)$$

Here an explicit expression for μ_* is

$$\begin{aligned}
\mu_{*,k}^2 = & \frac{2(3k-2)}{3} \\
& - \frac{3k^2 - 24k + 32}{3 \left\{ (-27k^3 + 126k^2 - 144k + 8) + 6(k-2)\sqrt{3(7k^4 - 41k^3 + 83k^2 - 100k + 76)} \right\}^{1/3}} \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Corollary 2.2. *(Non regularity of the cube.) Let G be a connected k -regular graph with $k \geq 3$ and $g(G) \geq 5$. Then*

- (1) $S(U^3)$ is invertible if and only if $\{2k-2, (k-1)^2+1\} \cap \sigma(M^2) \neq \emptyset$.
- (2) $S(U^3)$ is non-diagonalizable if and only if $\Sigma_{*,3} \neq \emptyset$.

We will describe the eigenspace of each eigenvalue in the next sections.

Finally we give the orbits of $w_{\pm}^{(j)}(x)$ ($j = 1, 2, 3$) for $k = 3, 4, 5$ cases. The upper figures depict $\text{Re}(w^{(j)}(x))$ (green line) and $\text{Im}(w^{(j)}(x))$ $x \in [-k, k]$ (gray line) ($j = 1, 2, 3$). The horizontal and vertical axes in the lower figures are $\text{Re}(w^{(j)}(x))$ and $\text{Im}(w^{(j)}(x))$, respectively. The branch points in the upper figures kills the diagonalibility, and the zero's of $w^{(j)}$ kills the invertibility of the original unitary matrices.

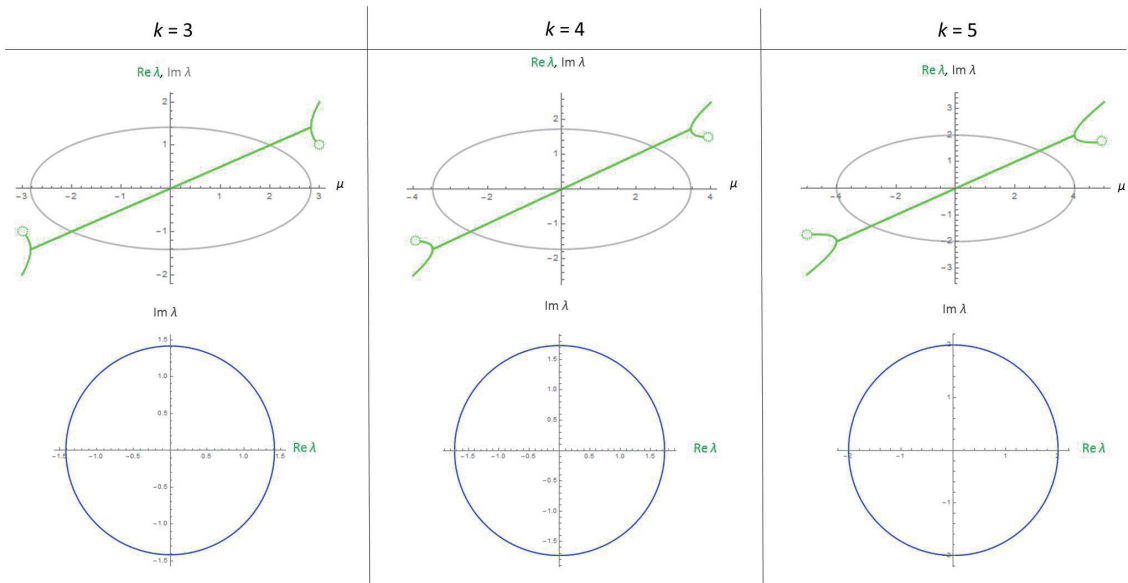


Figure 1: Orbit of $w_{\pm}^{(1)}(\mu)$

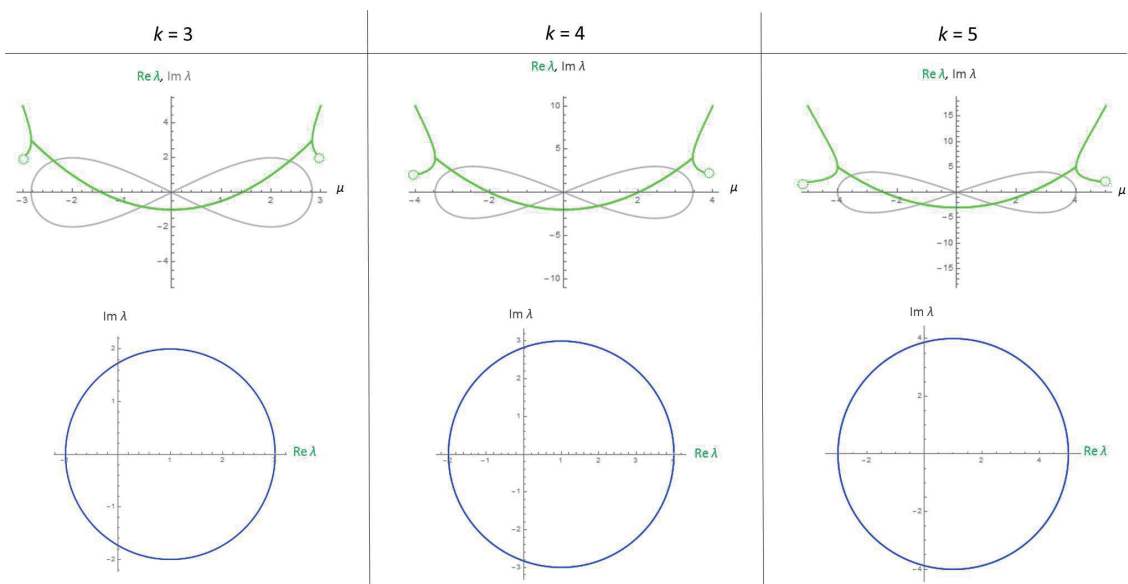


Figure 2: Orbit of $w_{\pm}^{(2)}(\mu)$

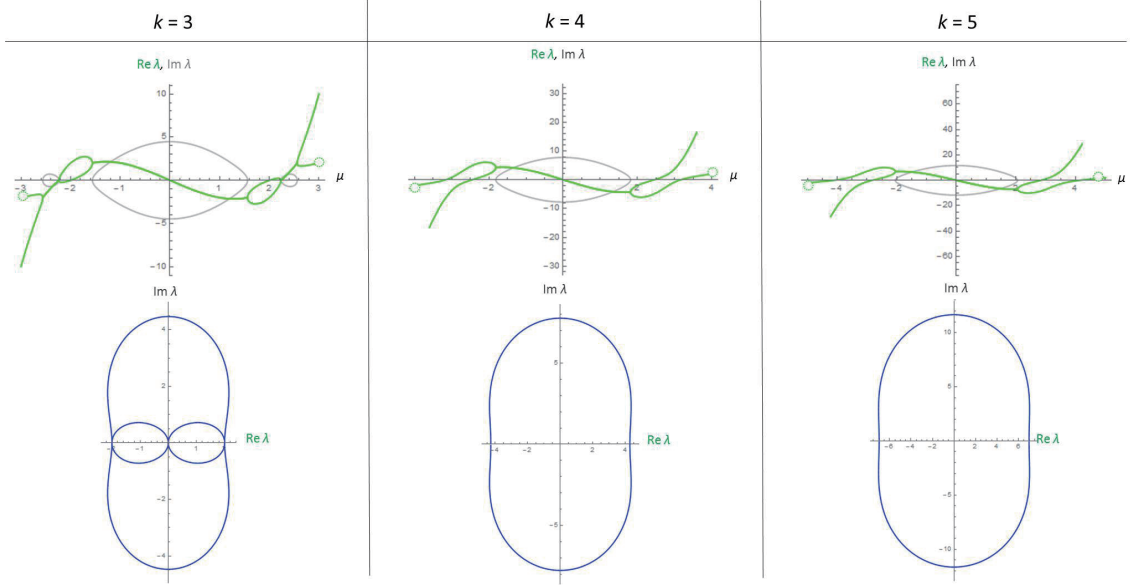


Figure 3: Orbit of $w_{\pm}^{(3)}(\mu)$

3 Sketch of the proof

Let G be a connected graph with n vertices and m edges. Then we consider $\ell^2(V(G))$ and $\ell^2(D(G))$. Set $C_0 = \ell^2(V(G))$ and $C_1 = \ell^2(D(G))$. The standard basis of C_0 and C_1 are given as follows:

$$C_0 = \text{span}\{\delta_v \mid v \in V(G)\}; \quad C_1 = \text{span}\{\delta_e \mid e \in D(G)\},$$

where δ_v is the function such that $\delta_v(u) = \delta_{uv}$ etc. Here δ_{uv} is the Kronecker delta. The inner products $\langle \cdot, \cdot \rangle_{C_0}$ and $\langle \cdot, \cdot \rangle_{C_1}$ over C_0 and C_1 are defined as follows:

$$\langle f, g \rangle_{C_0} = \sum_{v \in V(G)} \overline{f(v)}g(v), \quad \langle \phi, \psi \rangle_{C_1} = \sum_{e \in D(G)} \overline{\phi(e)}\psi(e),$$

where $f, g \in C_0$ and $\phi, \psi \in C_1$. Now, we consider two boundary operators $\partial_A, \partial_B : C_1 \rightarrow C_0$ such that

$$(\partial_A \psi)(v) = \sum_{o(e)=v} \psi(e), \quad (\partial_B \psi)(v) = \sum_{t(e)=v} \psi(e),$$

where $v \in V(G), e \in D(G), \psi \in C_1$. Furthermore, the adjoint operators $\partial_A^*, \partial_B^* : C_0 \rightarrow C_1$ are determined so that $\langle f, \partial_A \psi \rangle = \langle \partial_A^* f, \psi \rangle$ and $\langle f, \partial_B \psi \rangle = \langle \partial_B^* f, \psi \rangle$ for every $f \in C_0$ and $\psi \in C_1$. Thus ∂_A^* and ∂_B^* can be expressed by

$$(\partial_A^* f)(e) = f(o(e)), \quad (\partial_B^* f)(e) = f(t(e)),$$

where $v \in V(G), e \in D(G), f \in C_0$.

For a graph G , we denote adjacency operator and degree operator $M, D : C_0 \rightarrow C_0$, by

$$(Mf)(v) = \sum_{e:t(e)=v} f(o(e)), \quad (Df)(v) = \deg v f(v).$$

Furthermore, we also define operators on C_1 , B and J_0 , as follows:

$$(B\psi)(e) = \sum_{f:t(f)=o(e)} \psi(f), \quad (J_0\psi)(e) = \psi(\bar{e}).$$

Remark that B is the adjacency operator of the line digraph of G . We call J_0 corresponding to the back track a swap operator. The operator $B - J_0$ is called the edge operator. Remark that $\partial_A = \partial_B J_0$, $\partial_A^* = J_0 \partial_B^*$. By definitions of ∂_A and ∂_B , it is easily check the following statements

Lemma 3.1.

- (1) $\partial_A \partial_A^* = \partial_B \partial_B^* = D$,
- (2) $\partial_A \partial_B^* = \partial_B \partial_A^* = M$,

Note that in general, $\partial_B^* \partial_A = B^* \neq B$. In the following, we consider G as a k -regular graph. Then we have $D = k\mathbf{1}_{C_0}$. Moreover the positive support matrix $S(U)$ is expressed by using J_0 and ∂_B and it is known that $S(U^3)$ for $g(G) > 5$ and $S(U)$ are expressed by using $S(U)$ as follows:

Lemma 3.2.

$$\begin{aligned} S(U) &= J_0(\partial_B^* \partial_B - 1). \\ S(U^2) &= I + S(U)^2, \\ S(U^3) &= {}^T S(U) + S(U)^3. \quad (g(G) > 5) \end{aligned}$$

Using the properties given by Lemmas 3.1, it is easy to obtain the following lemma.

Lemma 3.3. *For any $j \in \mathbb{N}$, we have*

$$\begin{aligned} S^j(U)L &= L\tilde{M}^j \\ {}^T S^j(U)L &= L\sigma_X \tilde{M}^j \sigma_X, \end{aligned}$$

where $L : C_0^2 \rightarrow C_1$, such that $L(f, g) = \partial_B^* f + \partial_A^* g$, and $\sigma_X : C_0^2 \rightarrow C_0^2$ such that $\sigma_X(f, g) = (g, f)$. The matrix expression for \tilde{M} is given by

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ k-1 & \mathbf{M} \end{bmatrix}.$$

Then using these fact, we obtain, for example,

$$S(U^3)L = L(\sigma \tilde{M} \sigma + \tilde{M}^3).$$

The eigenequation $S(U)^3 L\psi = \lambda L\psi$ with $\psi \notin \ker L$ is reduced to

$$L(\tilde{K}_3 - \lambda)\psi = 0,$$

where $\tilde{K}_3 = \sigma \tilde{M} \sigma + \tilde{M}^3$. We can show the following lemma:

Lemma 3.4.

$$\ker L = \ker(1 - \tilde{M}^2).$$

Therefore the eigenequation is reduced to

$$(1 - \tilde{M}^2)(\lambda - \tilde{K})\psi = 0.$$

From this expression, we can see the regularity of $S(U^3)$ shown in our main theorems.

References

- [1] Ambainis, A.: Quantum walks and their algorithmic applications. *Int. J. Quantum Inf.* **1**, 507–518 (2003)
- [2] Bass, H.: The Ihara-Selberg zeta function of a tree lattice. *Internat. J. Math.* **3**, 717–797 (1992)
- [3] Emms, D., Hancock, E. R., Severini, S., Wilson, R. C., A matrix representation of graphs and its spectrum as a graph invariant. *Electr. J. Combin.* **13**, R34 (2006)
- [4] Emms, D., Severini, S., Wilson, R. C., Hancock, E. R.: Coined quantum walks lift the cospectrality of graphs and trees. *Pattern Recognition* **42**, 1988–2002 (2009)
- [5] Foata, D., Zeilberger, D.: A combinatorial proof of Bass’s evaluations of the Ihara-Selberg zeta function for graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.* **351**, 2257–2274 (1999)
- [6] Gamble, J. K., Friesen, M., Zhou, D., Joynt, R., Coppersmith, S. N.: Two particle quantum walks applied to the graph isomorphism problem. *Phys. Rev. A* **81**, 52313 (2010)
- [7] Godsil, C., Guo, K.: Quantum walks on regular graphs and eigenvalues. *Electron. J. Combin.* **18**, R165 (2011)
- [8] Godsil, C., Guo, K., Myklebu, Tor G.J.: Quantum Walks on Generalized Quadrangles, arXiv:1511.01962.
- [9] Guo, K.: Quantum walks on strongly regular graphs. Master’s thesis, University of Waterloo, (2010)
- [10] Hashimoto, K.: Zeta Functions of Finite Graphs and Representations of p -Adic Groups. In: “*Adv. Stud. Pure Math.*” Vol.15, pp.211–280, Academic Press, New York (1989)
- [11] Higuchi, Yu., Konno, N., Sato, I., Segawa, E.: A note on the discrete-time evolutions of quantum walk on a graph. *J. Math-for-Ind.* **5B** (2013), 103–109.
- [12] Higuchi, Yu., Konno, N., Sato, I., Segawa, E.: A remark on zeta functions of finite graphs via quantum walks”, *Pacific Journal of Math-for-Industry* 6 (2014) 73-84.
- [13] Ihara, Y.: On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p -adic fields. *J. Math. Soc. Japan* **18**, 219–235 (1966)
- [14] Konno, N.: Quantum Walks. In: *Lecture Notes in Mathematics: Vol.1954*, pp.309–452, Springer-Verlag, Heidelberg (2008)
- [15] Konno, N., Sato, I.: On the relation between quantum walks and zeta functions *Quantum Information Processing* (in press)
- [16] Ren, P., Aleksic, T., Emms, D., Wilson, R. C., Hancock, E. R.: Quantum walks, Ihara zeta functions and cospectrality in regular graphs. *Quantum Inf. Proc.* (in press).
- [17] Sato, I.: A new Bartholdi zeta function of a graph. *Int. J. Algebra* **1**, 269–281 (2007)
- [18] Serre, J. -P.: *Trees*, Springer-Verlag, New York (1980)

- [19] Shiao, S. -Y., Joynt, R., Coppersmith, S. N.: Physically-motivated dynamical algorithms for the graph isomorphism problem. *Quantum Inf. Comput.* **5**, 492–506 (2005)
- [20] Stark, H. M., Terras, A. A.: Zeta functions of finite graphs and coverings. *Adv. Math.* **121**, 124–165 (1996)
- [21] S. E. Venegas-Andraca, Quantum walks: a comprehensive review, arXiv:1201.4780

一般ベータ木における Grover ウォークの周期性

谷口 哲至 (広島工業大学, t.taniguchi.t3@cc.it-hiroshima.ac.jp)

1 はじめに

量子ウォークはランダムウォークの量子版として知られている。これまでスペクトラルグラフ理論研究集会 [2] において、この分野の研究者の方々に講演いただいていた。このモデルは、出発点に留まり続けるだけでなく、線形的広がりもみせる。それ故、ランダムウォークとは異なる様々な挙動を示す。量子コンピュータへの応用などで注目されている。量子ウォークには、離散時間と連続時間の2種類がある。スペクトラルグラフ理論の立場からいうと、離散時間のモデルの一つであるグラフ上の量子ウォーク（特に Grover ウォーク）には固有値問題として興味深いものが多いように思える。

今回取り扱うのは Szegedy ウォークの一種である Grover ウォークである。有限グラフ上で周期性を持つのはどのようなグラフであるかは、動機の一つである。これらを分類、特徴付けすることが我々のこの領域におけるゴールと言ってよい。[1] では、完全グラフ、完全二部グラフ、強正則グラフで周期性をもつかどうか研究された。本研究は、ある木のクラスで周期性をもつものを特徴付け、決定したいという発想からスタートした。この領域ではどのようなグラフが周期性をもつのか、ほとんど知られていないと言ってよい。

本研究は東北大学の瀬川氏、久保田氏、吉江氏との共同研究である。

2 Grover ウォーク

量子ウォークの話を始めからすると、煩雑なものになりがちである。ここではスペクトラルグラフ理論で扱いやすいよう、簡単な形式で説明する。

まず、 $G = (V, E)$ を多重辺、ループをゆるす無向グラフとする。また $D(G) := E \cup \bar{E}$ をグラフ G の辺に双方向の向き付をした有向辺 (arc) の集合とする。そして $p : D(G) \rightarrow [0, 1]$ を推移確率とする。つまり任意の頂点 $v \in V$ について $\sum_{e:o(e)=v} p(e) = 1$ が成立する。以下を満たす $(2m \times 2m)$ -

行列 U を Grover 遷移行列という :

$$(U)_{ef} := \begin{cases} \frac{2}{\deg o(e)} - \delta_{\bar{e}f} & \text{if } t(f) = o(e) \text{ and } f \neq \bar{e} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

この行列によって時間発展が与えられる $D(G)$ 上の離散時間量子ウォークを, G の離散時間 Grover 量子ウォークという。更に, ある自然数 k によって $U^k = I_{2m}$ となる時 U は周期的であるという。また U が周期的であることと, ある自然数の列 $N \subset \mathbb{N}$ によって, U の特性方程式 $\varphi_U(\lambda)$ が $\varphi_U(\lambda) = \prod_{n \in N} \Phi_n(\lambda)^{m_n}$ を満たすことは同値であることが知られている (cf. [1])。但し, m_n は n によって定まる自然数で, $\Phi_n(\lambda)$ は円分多項式である。また,

$$(P)_{uv} := \begin{cases} \sum_{o(e)=u, t(e)=v} \sqrt{p(e)p(\bar{e})} & \text{if } e = uv \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とするとき,

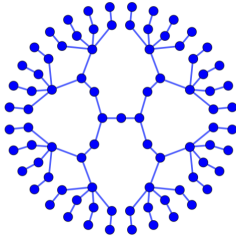
$$\varphi_U(\lambda) = 2^n \lambda^n (\lambda^2 - 1)^{m-n} \varphi_P \left(\frac{\lambda + \lambda^{-1}}{2} \right) \quad (1)$$

であることが知られている。グラフ G の Grover 遷移行列が周期的であるとき, G は周期性を持つということにする。

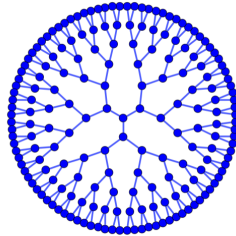
3 一般ベーテ木

ベーテ木とは次数が一定である無限木, 或いは葉以外の点の次数が一定の有限木として知られている。ここでは葉から根 (root) に向かって $(d_1, \dots, d_k$ など) 次数を定めていくことで一般化をはかる。そのようにして得られる木を $T(d_1, \dots, d_k)$ と表す。例えば, $T(2, 2, 2)$ は長さ 6 のパス, $T(2, 1)$ は長さ 2 のパス, $T(3)$ は次数 3 の Star (或いは 3-Claw) である。

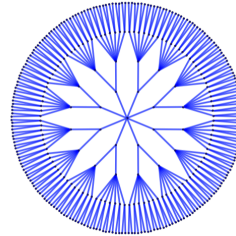
$T(2, 5, 3, 2, 3, 2)$



$T(3, 3, 3, 3, 3, 3)$



$T(3, 8, 3, 8)$



S_k を $T(d_1, \dots, d_k)$ の推移確率行列とする。また, $j \leq k$ に対し, S_k の左上 $(j \times j)$ -部分行列を S_j とする。この時, 次を得る。

定理 3.1. $\Omega := \{j \mid 0 \leq j \leq k \text{ and } d_{j+1} \geq 3 - \delta_{k,j+1}\}$ とする。但し, $d_{k+1} := \infty$ とする。このとき, $\sigma(P(T)) = \cup_{j \in \Omega} \sigma(S_j)$ が成立する ($\sigma(M)$ は行列 M のスペクトルを表す)。

定理 3.2. T を一般ベータ木 $T(d_1, \dots, d_k)$, $\Omega := \{j \mid 0 \leq j \leq k \text{ and } d_{j+1} \geq 3 - \delta_{k,j+1}\}$, $s_j := \det |\lambda I - S_j|$ とする。但し, $d_{k+1} := \infty$ とする。この時, 任意の $j \in \Omega$ に対し, ある $N_j \subset \mathbb{N}$ が存在し,

$$(2z)^{j+1} s_j \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right) = \prod_{n \in N_j} \Phi_n(z)^{m_n}$$

が成立する (m_n は n によって定まる自然数)。

4 周期性を持つグラフ

[1] では周期性をもつ強正則グラフの決定を行っている。以下の定理はその結果である。

定理 4.1 (cf. [1]). U を強正則グラフ $G = SRG(n, k, \lambda, \mu)$ で誘導される Grover 遷移行列とする。この時, U が周期的であるなら, $G = C_5, K_{k,k}, K_{\lambda,\lambda,\lambda}$ に限る。

パス, サイクル, 完全二部グラフは周期性を持つ簡単な例である。本研究では, 一般ベータ木について周期性を持つ条件を調べている。例えば, $T(4, 3, 1)$ は周期性を持つグラフの例である。

推移確率行列は,

$$S_{k(=3)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & & \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & \\ & \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ & & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

であり, これから S_0, S_1, S_2 をみるのだが, $d_3 = 1 < 3 - \delta_{3,3}$ なので, 定理 3.1 から $j = 2$ の場合が除外される。各 $j = 0, 1, 3$ について $(2z)^{j+1} s_j \left(\frac{z+z^{-1}}{2} \right)$ をみると, それぞれ, $z^2 + 1, z^4 - z^2 + 1, z^8 - z^6 - z^2 + 1$ となる。よって, $\varphi_U(z)$ はいくつかの円分多項式の積になることがわかる。

$T(3, 3, 1)$ は周期性を持たない。 $T(4, 3, 1)$ のときと同様にして計算を進めると, $j = 2$ の場合は除外されるものの, 各 $j = 0, 1, 3$ について $(2z)^{j+1} s_j \left(\frac{z+z^{-1}}{2} \right)$ は, それぞれ $z^2 + 1, z^4 - \frac{2}{3}z^2 + 1, z^8 - \frac{8}{9}z^6 - \frac{2}{9}z^4 - \frac{8}{9}z^2 + 1$ となり, $\varphi_U(z)$ が円分多項式の積になっていないことがわかる。すなわち, $T(3, 3, 1)$ は周期性を持たないということである。

5 まとめ

周期性を持つ一般ベエテ木の例として, $T(4, 3, 1)$, $T(m, 4)$ ($m \in \mathbb{N}$) がある。また, そうでない例として $T(3, 3, 1)$ がある。実は周期性をもつ一般ベエテ木のクラスはそんなに多くあるわけではなく, ある単純な特徴付けによって与えることが出来ることを突き止めた。現段階ではまだ非公表としているので, その部分については追って報告したい。

参考文献

- [1] Y. Higuchi, N. Konno, I. Sato and E. Segawa, *Periodicity of the Discrete-time Quantum Walk on a Finite Graph*, *Interdisciplinary Information Sciences* 23 (2017), 75–86.
- [2] スペクトラルグラフ理論および周辺領域, <http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~htanaka/docs/sgt6/>

量子ウォークの定常測度とその周辺

今野 紀雄 (横浜国立大学大学院 工学研究院)

量子ウォーク (quantum walk) は、ランダムウォークの量子版として導入されたモデルであるが、線形的な広がり、局在化、逆釣鐘型の極限分布など非常に異なる性質を有する。量子ウォークの本格的な研究が始まったのは、2000 年前後であり、その後、組合せ論的手法、フーリエ解析、停留位相法、母関数法など様々な手法で理論的側面は明らかになりつつある。一方、量子ウォークの実現方法の種々の提案や応用、例えば、強相関電子系、トポロジカル絶縁体、放射性廃棄物低減、光合成、量子探索、グラフ同型問題、場の理論、四元数への拡張なども盛んに研究されている。

本講演では、量子ウォークの数理的構造を主に概説するとともに、定常測度、及びそれと再帰性との関連についても発表した。最後に、今後の展望として、マルコフ過程の一般論に対応する量子過程の一般論構築の第一歩として、定常測度と極限測度との関係についても触れた。関連する最近の論文として、[1-6] がある。その他、講演で扱えなかった話題も多いが、基本的な数学の問題だけでなく、応用の問題も含め、量子ウォークは様々な分野で魅力あるテーマになりつつある [7-9]。

参考文献

- [1] Takako Endo, Norio Konno, Hideaki Obuse (2015) Relation between two-phase quantum walks and the topological invariant, arXiv:1511.04230
- [2] Takako Endo, Hikari Kawai, Norio Konno (2017) The stationary measure for diagonal quantum walk with one defect, Interdisciplinary Information Sciences, Vol.23, pp.57-64, arXiv:1603.08948
- [3] Takako Endo, Hikari Kawai, Norio Konno (2016) Stationary measures for the three-state Grover walk with one defect in one dimension, RIMS Kokyuroku 2010, pp.45-55, arXiv:1608.07402
- [4] Hikari Kawai, Takashi Komatsu, Norio Konno (2017) Stationary measures of three-state quantum walks on the one-dimensional lattice, arXiv:1702.01523
- [5] Takashi Komatsu, Norio Konno (2017) Stationary amplitudes of quantum walks on the higher-dimensional integer lattice, arXiv:1703.07059
- [6] Choon-Lin Ho, Yusuke Ide, Norio Konno, Etsuo Segawa, Kentaro Takumi (2017) A spectral analysis of discrete-time quantum walks with related to birth and death chains, arXiv:1706.01005
- [7] 今野紀雄 (2008) 量子ウォークの数理, 産業図書
- [8] 今野紀雄 (2014) 量子ウォーク, 森北出版
- [9] 町田拓也 (2015) 図で解る 量子ウォーク入門, 森北出版

2-posets と 2-posets を繋ぐ多重ゼータ関数*

大野 泰生 (東北大学大学院理学研究科)

概要

Riemann ゼータ関数の Arakawa-Kaneko 型多重化である Kaneko-Tsumura の多重ゼータ関数の負整数点での値は、多重ベルヌーイ数になり、多重ベルヌーイ数を自然に拡張した負インデックスの多重ベルヌーイ数は、ある種の有限 2 色半順序集合 (2-posets) あるいは、有向閉路を持たない有向完全 2 部グラフの数え上げに対応づけられる。他方、Kaneko-Tsumura の多重ゼータ関数の正整数点での値は、有限 2 色半順序集合に付随する $[0,1]$ 区間の反復積分表示をもつ。ここではこの事実について説明する。

1 負指数ベルヌーイ数

自然数 k, n に対して、 (k, n) 頂点の完全 2 部グラフを考え、それに有向閉路ができないように向き付けする方法の個数を $\mathcal{G}(k, n)$ で表す。簡単な議論によって $\mathcal{G}(k, n)$ は、サイズ $k \times n$ のロンサム行列の個数と一致することが知られている。また、定義から明らかに

$$\mathcal{G}(k, n) = \mathcal{G}(n, k) \quad (k, n \geq 0)$$

が成立し、duality と呼ぶ。これは、頂点の部集合の入れ替え、あるいは行列の転置に対応している。そして $\mathcal{G}(k, n)$ は、以下で定義する、負インデックスの多重ベルヌーイ数とも一致することが知られている。

多重ベルヌーイ数 $B_n^{(k)}$ は古典的なベルヌーイ数の拡張として、Kaneko [3] により形式的べき級数 $\text{Li}_k(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^k$ を用いた母関数

$$\frac{\text{Li}_k(1 - e^{-t})}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n^{(k)}}{n!} t^n$$

で導入された。実際、 $k = 1$ のときは $\frac{\text{Li}_1(1 - e^{-t})}{1 - e^{-t}} = \frac{te^t}{e^t - 1}$ となり、ベルヌーイ数 (ただし、 $B_1^{(1)} = 1/2$) の母関数である。

一般に多重ベルヌーイ数 $B_n^{(k)}$ は、有理数になることが知られている。特に上指数が非正整数の場合には、整数になることが知られており、また、著しい性質のひとつとして、duality と呼ばれる次の関係式をもつ。

$$B_n^{(-k)} = B_k^{(-n)} \quad (k, n \geq 0)$$

*第 34 回代数的組合せ論シンポジウム 2017 @小山商工会議所会館 報告集原稿

C. R. Brewbaker [2] は、上指数が負の多重ベルヌーイ数とロンサム行列の個数の一致を導いた。このことから先ほど定義した、有向閉路を持たない完全有向2部グラフの個数との間に

$$B_n^{(-k)} = \mathcal{G}(k, n)$$

が得られ、2部グラフの数え上げと、多重ゼータ関数の特殊値が系統的に繋がることになった。

2 正指数ベルヌーイ数 と ゼータ関数の負整数点

Kaneko と Tsumura ([4]) は Riemann ゼータ関数のポリログによる多重化として、多重ゼータ関数

$$\eta_{\mathbf{k}}(s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{\text{Li}_{\mathbf{k}}(1 - e^{-t})}{1 - e^{-t}} t^{s-1} dt \quad (\text{Re}(s) > 1 - r)$$

を定義した。この関数は、先に定義されていた Arakawa-Kaneko の多重ゼータ関数 ([1])

$$\xi_{\mathbf{k}}(s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{\text{Li}_{\mathbf{k}}(1 - e^{-t})}{e^t - 1} t^{s-1} dt \quad (\text{Re}(s) > 0)$$

の‘双子の兄弟’とも呼ばれている。ただし、 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ を正の整数からなるインデックス、 s を複素変数、そして $\text{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ を multiple polylogarithm

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}(z) := \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{z^{n_r}}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} \quad (|z| < 1)$$

とする。多重ゼータ関数 $\eta_{\mathbf{k}}(s)$ および $\xi_{\mathbf{k}}(s)$ は複素全平面に整関数として解析接続される。

Kaneko と Tsumura は、これらのゼータ関数の負整数点での特殊値を、多重ベルヌーイ数を用いて明示した。本稿では、 $r = 1$ の場合の η_k に制限して [4] の結果のひとつを記すことにする。

定理 1. ([4]) 任意の $m \geq 0$, $k \geq 1$ に対して、

$$\eta_k(-m) = B_m^{(k)}$$

が成り立つ。

3 ゼータ関数の正整数点

Kaneko と Tsumura ([4]) は、 $\eta_{\mathbf{k}}(s), \xi_{\mathbf{k}}(s)$ の正整数点での特殊値を多重ゼータ値の線形和で記す公式も導いた。この証明は解析的な計算によるものであったが、その後、Kawasaki と筆者の研究 ([5]) により、Yamamoto ([6]) によって導入された “2-poset に付随する積分表示” を用いて、組合せ論的再証明が得られ、それにより線形和の係数の由来も明瞭になった。

まず、Yamamoto によって導入された 2-poset に付随する積分表示について復習する。

定義 1. 2-poset $X = (X, \delta_X)$ を poset X と labeling map $\delta_X : X \rightarrow \{0, 1\}$ の組とする。2-poset X が admissible であるとは、 X のすべての極大元 x に対して $\delta_X(x) = 0$ かつ、 X のすべての極小元 x に対して $\delta_X(x) = 1$ となることとする。

定義 2. *admissible 2-poset* X に付随する積分を

$$I(X) = \int_{\Delta(X)} \prod_{x \in X} \omega_{\delta_X(x)}(t_x)$$

で定義する。ただし、

$$\Delta(X) = \{(t_x)_x \in [0, 1]^X \mid t_x < t_y \text{ if } x < y\}$$

かつ、

$$\omega_0(t) = \frac{dt}{t}, \quad \omega_1(t) = \frac{dt}{1-t}$$

とする。さらに、*2-poset* は *Hasse* 図を用いて表示し、頂点の記号 \circ, \bullet, \odot は、それぞれ $\omega_0(t)$, $\omega_1(t)$, $\omega_0(t) + \omega_1(t)$ と対応するものとする。

このとき、Kaneko-Tsumura の多重ゼータ関数の正整数点での値は、次のように表示される。

定理 2. ([4, 5]) 任意の正の整数 k, m に対して、

$$\eta_k(m) = I \left(\left(\begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \odot \quad \bullet \\ \vdots \quad \vdots \\ \odot \quad \bullet \\ \vdots \quad \vdots \\ \bullet \end{array} \right) \right)^{m-1}.$$

また、[7] の中で Yamamoto は、次の $\eta_k(m)$ の duality を証明した。

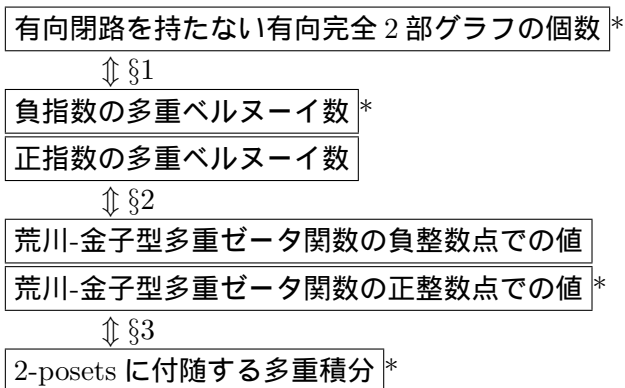
定理 3. ([7]) 任意の正の整数 k, m に対して、

$$\eta_k(m) = \eta_m(k)$$

が成り立つ。

4 まとめ

以上の流れをまとめると、



となっていて、2-posets の集合から 2-posets の集合まで、多重ゼータ関数を経由して繋がっていることがわかる。ただし、一方は数え上げであり、他方は個々の 2-poset に付随する積分値である。したがって、両端の 2-posets の間には何ら特別な対応が無い可能性もある。しかしながら筆者は、下記の 2 点を理由に何らかの意味づけが存在すべきではないか、情報が隠れているのではないかと考えている。

まず、Arakawa-Kaneko 型の多重ゼータ関数は、Riemann ゼータ関数の（ポリログを用いた自然な）多重化である。Riemann ゼータ関数には良く知られた関数等式が存在し、正整数点での値と負整数点での値に鮮明な関係がつく。一般の Arakawa-Kaneko 型の多重ゼータ関数には、現在までにこれに該当する関数等式が知られていない。正負両サイドが 2-posets と繋がることは何らかの関数等式を示唆しているのか、何らかの糸口なのか、興味深いところであるが、今のところこれへの明確な回答はない。

もうひとつは、“duality”の存在である。先の図で*印を付けた箇所には全て duality が存在している。*印の無い箇所とは、インデックスの正負あるいはゼータ関数の特殊値を取る整数点の正負の変化を介して*印の箇所と繋がっており、全体像としては、言わば“うら側”にまわっている部分と解釈できるため、duality の存在性が定かでないことにさほど違和感はない。むしろ問題にしている“おもて側”においては全ての箇所で“duality”が存在している、という点が注目に値する。“うら側”を間に挟んだ 2 つの“おもて側”が共有する duality に直接的な関係が見つかれば、構造解明の糸口となるかもしれない。

謝辞

この有意義かつ快適なシンポジウムを開催して下さった、佐藤巖先生（小山工業高等専門学校）、三橋秀生先生（法政大学）、森田英章先生（室蘭工業大学）、宗政昭弘先生（東北大学）、山内博先生（東京女子大学）に大変お世話になりました。心より御礼申し上げます。

参考文献

- [1] T. Arakawa and M. Kaneko, *Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions*, Nagoya Math. J., **153** (1999), 189–209.
- [2] C. R. Brewbaker, *A combinatorial interpretation of the poly-Bernoulli numbers and two Fermat analogues*, Integers, **8** (2008), A02.
- [3] M. Kaneko, *Poly-Bernoulli numbers*, J. Th. Nombre Bordeaux, **9** (1997), 199–206.
- [4] M. Kaneko and H. Tsumura, *Multi-poly-Bernoulli numbers and related zeta functions*, to appear in *Nagoya Math. J.*, arXiv:1503.02156 (2015).
- [5] N. Kawasaki and Y. Ohno, *Combinatorial proofs of identities for special values of Arakawa-Kaneko multiple zeta functions*, to appear in *Kyushu J. Math.*.
- [6] S. Yamamoto, *Multiple zeta-star values and multiple integrals*, to appear in *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, arXiv:1405.6499.
- [7] S. Yamamoto, *Multiple zeta functions of Kaneko-Tsumura type and their values at positive integers*, preprint 2016, arXiv:1607.01978.

古典準直交多項式の判別式の明示公式とそのデザイン理論への応用

澤 正憲 (神戸大学大学院システム情報学研究科)

正定値線形汎関数が付随し、かつスツルム・リウヴィル型微分方程式の固有関数をなす多項式は、ヤコビ多項式、ラゲール多項式、エルミート多項式に限られる。これらは古典直交多項式と呼ばれており、数学の諸分野において興味深い研究テーマを多々提供してくれる ([11]参照)。本稿では、多項式の判別式に着目し、その明示公式に関する最新の研究成果を簡単に紹介する。なお、本研究は内田幸寛氏 (首都大学東京) との共同研究に基づいている。

判別式は終結式の特例であり、多項式の係数に関する複雑な関数として表されるため、その計算は一般的には非常に難しい。Stieljes[9, 10]はヤコビ多項式とラゲール多項式の判別式を具体的に計算した。Hilbert[4]によるエルミート多項式に関する計算結果もあわせると、古典直交多項式については判別式の計算が完遂されている。一変数直交多項式列 $\{\Phi_n\}$ が与えられたとき、 $\Phi_n + c\Phi_{n-1}$ の形の多項式を (1階の) 準直交多項式という [12]。Dilcher-Stolarsky[2]は、第2種準チェビシエフ多項式の判別式の明示公式を与えた。この公式は、多項式の変数パートに定数 c と n の適当な有理関数を代入して (n 次の) 準チェビシエフ多項式の判別式を記述するもので、非常にコンパクト、かつ優美な格好をしている。なお、Dilcherらの証明は判別式の (というよりはむしろ終結式の) 代数的な性質と多項式に関するユークリッドアルゴリズムに基づいている。

本研究では、Dilcherらの結果およびHilbert、Stieljesの結果の一般化として、古典準直交多項式の判別式の明示公式を与えた：

定理 1 (Sawa-Uchida[6]) c を実定数とする。 $\{P_n^{(\alpha, \beta)}\}$ をヤコビ多項式列として、

$P_{n;c}^{(\alpha, \beta)}(x) := P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + cP_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x)$ とおく。このとき、 $P_{n;c}^{(\alpha, \beta)}(x)$ の判別式 $\text{disc } P_{n;c}^{(\alpha, \beta)}$ は

$$\text{disc } P_{n;c}^{(\alpha, \beta)} = \frac{(2n + \alpha + \beta)^{2n-1}}{2^{n(n-1)}} \prod_{k=1}^n k^{k-2n+3} \cdot \prod_{k=1}^n (k + \alpha)^{k-1} (k + \beta)^{k-1} (n + k + \alpha + \beta)^{n-k-1} \\ \cdot \frac{(-c)^n P_{n;c}^{(\alpha, \beta)} \left(-\frac{2n(n+\alpha+\beta)c^2 + (\alpha^2 - \beta^2)c + 2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)^2 c} \right)}{(n + \alpha + cn)(n + \beta - cn)}.$$

定理 2 (Sawa-Uchida[6]) c を実定数とする。 $\{L_n^{(\alpha)}\}$ をラゲール多項式列として、

$L_{n;c}^{(\alpha)}(x) := L_n^{(\alpha)}(x) + cL_{n-1}^{(\alpha)}(x)$ とおく。このとき、

$$\text{disc } L_{n;c}^{(\alpha)} = \frac{1}{n + \alpha + cn} \prod_{k=1}^n k^{k-2n+3} \cdot \prod_{k=1}^n (k + \alpha)^{k-1} \cdot (-c)^n L_{n;c}^{(\alpha)} \left(\frac{nc^2 + (2n + \alpha)c + n + \alpha}{c} \right).$$

定理 3 (Sawa-Uchida[6]) c を実定数とする。 $\{H_n\}$ をエルミート多項式列として、

$H_{n;c}^{\lambda}(x) := H_n^{\lambda}(x) + cH_{n-1}^{\lambda}(x)$ とおく。このとき、

$$\text{disc } H_{n;c}^{\lambda} = 2^{n(3n-5)} \prod_{k=1}^{n-1} k^k \cdot (-c)^n H_{n;c}^{\lambda} \left(-\frac{c^2 + 2n}{2c} \right).$$

定理 1 の証明は、直交多項式の三項関係式に関する Schur の結果[8]と、古典直交多項式の諸性質（とりわけ微分に関する諸性質）に基づいている。定理 2 と定理 3 は、エルミート多項式とラゲール多項式がそれぞれヤコビ多項式の特殊ケースの極限操作で得られることによる。

上述の明示公式の、初等整数論あるいは組合せ論への応用に触れておく。標準的なガウス積分について、モーメント

$$a_k := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) dt, \quad k = 0, 1, \dots$$

を考える。これらはすべて有理数になる。

問題 1. 不定方程式系

$$\sum_{i=1}^m x_i y_i^j = a_j, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

は有理数解 $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m$ をもつか？

この不定方程式系は初等整数論のワーリング問題に関する Hausdorff のある仕事[2]に端を発している（[5]なども参照）。

不等式 $n \leq 2m - 1$ は、上の不定方程式系に解が存在するための自明な必要条件である。実際、不定方程式系の解は m 点上の有理数係数ガウシアン n -デザイン（以下、有理的ガウシアン n -デザインと呼ぶ）と等価であり、フィッシャー型不等式の導出と同じ議

論を用いると、 $n \leq 2m-1$ であるとわかる。この不等式においてタイトな場合、すなわち $n = 2m-1$ のとき、 y_1, \dots, y_m は m 次のエルミート多項式の零点にならなければならない。しかし、エルミート多項式は有理数体上で既約なので[7]、この場合、不定方程式系には解が存在しない。こうして、 $n = 2m-2$ のケースが自然に興味の対象となる。

定理 4 (Sawa-Uchida[6]) $r \equiv 3,4,5,6,7 \pmod{8}$ とし、 c を有理数定数とする。このとき $\text{disc } H_{r+1;c}$ は 2 進数体上で平方数にならない。

定理 4 の証明は、定理 3 と煩雑な付値の計算によるが、ここでは詳細を割愛する。

実は、 $(m,n) = (r+1,2r)$ に対してハウスドルフ型の不定方程式系が解をもつならば、適当な有理数 c について解 (の一部) y_1, \dots, y_{r+1} が準エルミート多項式の零点にならなければならないことがわかる。したがって、判別式の定義から、次の結果を得る：

系 1 (Sawa-Uchida[6]) $r \equiv 2,3,4,5,6 \pmod{8}$ のとき、ハウスドルフ型不定方程式に有理数解は存在しない。つまり、 $r \equiv 2,3,4,5,6 \pmod{8}$ のとき、almost tight な有理的ガウシアン $2r$ デザインは存在しない。

参考文献

- [1] Ei. Bannai, Etsu. Bannai. *Tight Gaussian 4-designs*. J. Algebr. Comb. **22** (2005), 22-39.
- [2] K. Dilcher, K.B. Stolarsky. *Resultants and discriminants of Chebyshev and related polynomials*. Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), 965-981.
- [3] F. Hausdorff. *Zur Hilbertschen Lösung des Waringschen Problems*. Math. Ann. **67** (1909), 301-305.
- [4] D. Hilbert, *Ueber die Discriminante der im Endlichen abbrechenden Hypergeometrischen Reihe*. J. Reine Angew. Math. **103** (1888), 337-345.
- [5] Y.V. Nesterenko. *On Waring's problem (elementary methods)*. (Russian) Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) **322** (2005), Trudy po Teorii Chisel, 149-175, 254; translation in J. Math. Sci. (N.Y.) **137** (2006), 4699-4715.
- [6] M. Sawa, Y. Uchida. *Compact formulas for resultants and discriminants of classical quasi-orthogonal polynomials*. In preparation.

- [7] I. Schur. *Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendungen auf Irreduzibilitätsfragen, II.* Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin Phys.-Math. Kl., 14 (1929), 370–391.
- [8] I. Schur. *Affektlose Gleichungen in der Theorie der Laguerreschen und Hermiteschen Polynome.* J. Reine Angew. Math., **165** (1931), 52–58.
- [9] T.J. Stieltjes. *Sur quelques th_eor_emes d'al_g_ebre.* C. R. Acad. Sci. Paris, **100** (1888), 439–440.
- [10] T.J. Stieltjes. *Sur les polyn^omes de Jacobi.* C. R. Acad. Sci. Paris, **100** (1888), 620–622.
- [11] G. Szegö. *Orthogonal Polynomials (4th ed.).* AMS Colloquium Publications, vol. 23, American Mathematical Society, Providence, 1975.
- [12] Y. Xu. *A characterization of positive quadrature formulae.* Math. Comp., **62** (1994), 703–718.

グラフ積の統一化と Godsil–McKay switching との可換性について

東北大学大学院情報科学研究科
久保田 匠

1 Introduction

2005 年, Van Dam 氏と Koolen 氏によって twisted Grassmann graph が導入された [8]. このグラフは, 直径に制限がない non-vertex-transitive な距離正則グラフという特異な性質を持ち, 数多くの研究がなされている ([3, 4, 9] など). twisted Grassmann graph は元々, point-line incidence structure の line の一部を変えることによって得られるものであるが, 2016 年に Munemasa 氏は twisted Grassmann graph が, 通常の Grassmann graph に Godsil–McKay switching を適用することによっても得られることを示した [13]. これら, 通常の Grassmann graph と twisted Grassmann graph のように, 同じ交差数を持つが非同型な距離正則グラフのペアは他にも数多く存在する. それらが Godsil–McKay switching によって互いに移し合うことはできるだろうか? というのが本研究のひとつの課題であるが, 今回, Doob graph と呼ばれる距離正則グラフが Hamming graph に switching を適用することでも得られることが分かった. その証明には, Godsil–McKay switching と Cartesian product とのある種の可換性を使う. 実は, この可換性はその他の非常に多くのグラフ積についても成立することがいえる.

2 Godsil–McKay switching

Γ をグラフとし, $\pi = \{C_1, \dots, C_t\}$ を点集合 $V(\Gamma)$ の分割とする. $[t] = \{1, 2, \dots, t\}$ とする. 任意の添え字 $i, j \in [t]$ と任意の点 $x \in C_i$ に対し, x と隣接している点で C_j に属している点の数が i, j によってのみ依存して決まる定数であるとき, この分割 π は *equitable partition* であるという.

以下は, Godsil 氏と McKay 氏によって導入された [10], グラフの固有値を不

変にしながらグラフを変形させる操作である。

Theorem 2.1. Γ をグラフとし, $\pi = \{C_1, \dots, C_t, D\}$ を点集合 $V(\Gamma)$ の分割とする. π が次のふたつの条件を満たしているとする:

- (i) $\{C_1, \dots, C_t\}$ は $V(\Gamma) \setminus D$ の equitable partition である.
- (ii) 任意の $x \in D$ と任意の添え字 $i \in [t]$ に対して, x と隣接している点で C_i に属している点の数が $0, \frac{1}{2}|C_i|, |C_i|$ のいずれかである.

このとき, 新しいグラフ $\text{sw}_\pi \Gamma$ を次のようにして構成する. 各 $x \in D$ と C_i 内の点について, x と隣接している点で C_i に属している点の数が $\frac{1}{2}|C_i|$ であるとき, 隣接関係を入れ替える. このようにして出来たグラフ $\text{sw}_\pi \Gamma$ は, 元のグラフ Γ と同じ固有値をもつ.

Γ から $\text{sw}_\pi \Gamma$ を得る操作を *Godsil-McKay switching* という. また, 上で用いた分割 π を *Godsil-McKay partition* と呼び, 特別な役割を果たすセル D を *Godsil-McKay cell* と呼ぶ.

3 Unification of graph products

Cartesian product や Kronecker product のように, グラフ積には様々なものが知られている. より具体的な例は表 1 にまとめた. この表において, A と B は元のグラフの隣接行列である. 表を見れば分かるように, 多くのグラフ積の隣接行列は, 単位行列と元のグラフの隣接行列と元のグラフの補グラフの隣接行列のテンソル積の線形結合で表すことができる. このようなグラフ積を統一的に扱いたい.

Γ, Δ をグラフとし, $A_0 = I_{|V(\Gamma)|}$, $A_1 = A(\Gamma)$, $A_2 = J - I - A(\Gamma)$, $B_0 = I_{|V(\Delta)|}$, $B_1 = A(\Delta)$, $B_2 = J - I - A(\Delta)$ とする. ただし, I は単位行列で, J は成分がすべて 1 の行列である. また, $i, j \in \{0, 1, 2\}$ に対して $s_{ij} \in \{0, 1\}$ とし, 次で定まるグラフ $\Gamma \star \Delta$ を考える:

$$A(\Gamma \star \Delta) = \sum_{i,j \in \{0,1,2\}} s_{ij} (A_i \otimes B_j).$$

$s_{00} = 0$ のとき, このグラフは simple になる. 列 $[0s_{01}s_{02}; s_{10}s_{11}s_{12}; s_{20}s_{21}s_{22}]$ をこのグラフ積の *type* と呼ぶことにする.

Name	Notation	Adjacency matrix	Type
Cartesian product	\square	$(A \otimes I) + (I \otimes B)$	[010; 100; 000]
Kronecker product	\otimes (or \times)	$A \otimes B$	[000; 010; 000]
strong product	\boxtimes	$(A \otimes I) + (I \otimes B) + (A \otimes B)$	[010; 110; 000]
lexicographic product	\circ	$(A \otimes J) + (I \otimes B)$	[010; 111; 000]
modular product	\diamond	$(A \otimes I) + (I \otimes B) + (A \otimes B) + (J - I - A) \otimes (J - I - B)$	[010; 110; 001]
weak modular product	∇	$(A \otimes B) + (J - I - A) \otimes (J - I - B)$	[000; 010; 001]
OR product	\vee	$(A \otimes J) + (J \otimes B) - (A \otimes B)$	[010; 111; 010]

表 1: 様々なグラフ積の例

4 Compatibility with switching

先の統一化されたグラフ積 $\Gamma \star \Delta$ について, Γ が Godsil-McKay partition π を持っている場合, $(\text{sw}_\pi \Gamma) \star \Delta$ が定義できる. 一方で, $\Gamma \star \Delta$ において, Godsil-McKay partition Π を見つけることはできるだろうか? もし見つかった場合, スイッチングをした後に積をとったグラフ $(\text{sw}_\pi \Gamma) \star \Delta$ と, 積をとった後にスイッチングを行ったグラフ $\text{sw}_\Pi(\Gamma \star \Delta)$ は同型になるだろうか? この section では, 以上の疑問に答える. 実は, Section 3 で定義したどの type のグラフ積についても, $\Gamma \star \Delta$ において Godsil-McKay partition Π を見つけることができ, しかも同型 $(\text{sw}_\pi \Gamma) \star \Delta \simeq \text{sw}_\Pi(\Gamma \star \Delta)$ が成立していることが分かる.

Theorem 4.1. Γ をグラフとし, Godsil-McKay partition $\pi = \{C_1, \dots, C_t, D\}$ を持つとする. Δ をグラフとし, $w \in V(\Delta)$ に対し $C_i^{(w)} = C_i \times \{w\}$ とし, $\mathcal{D} = D \times V(\Delta)$ と定め, $\Pi = \{C_i^{(w)} \mid i \in [t], w \in V(\Delta)\} \sqcup \{\mathcal{D}\}$ とおく. このとき, どの type の積 \star についても, Π は $\Gamma \star \Delta$ において \mathcal{D} を Godsil-McKay cell とする Godsil-McKay partition である. さらに, $(\text{sw}_\pi \Gamma) \star \Delta$ は $\text{sw}_\Pi(\Gamma \star \Delta)$ と同型である.

以上の定理より特に, 表 1 にあるグラフ積はすべて Godsil-McKay switching と Theorem 4.1 の意味で可換性が成立していることが分かる. しかも, bipartite double や extended bipartite double は Γ と K_2 とのある type のグラフ積となっているため, スイッチングを行った後に bipartite double をとったグラフと, bipartite double をとった後にスイッチングを行ったグラフは同型となる. extended bipartite double についても同様である.

5 Distance-regular graphs obtained by Godsil–McKay switching

Theorem 4.1 の応用として, Doob graph が Hamming graph から Godsil–McKay switching によって得られることが示せる. それだけでなく, グラフ積とスイッチングの可換性は, 他の距離正則グラフで同じ交差数を持つものをスイッチングによって移し合う可能性を示唆する.

5.1 The Hamming graphs and the Doob graphs

Hamming graph とは, サイズ q の d 個の完全グラフ K_q の Cartesian product によって得られるグラフであり, $H(d, q)$ と書かれる:

$$H(d, q) = \underbrace{K_q \square K_q \square \cdots \square K_q}_d$$

Hamming graph は距離正則グラフの中でも有名な例のひとつである. また, $(d, q) = (2, 4)$ のとき, このグラフは非同型な cospectral mate をもつ. $H(2, 4)$ の点集合を $[4] \times [4]$ と書き, $C = \{(x, x) \mid x \in [4]\}$ と定める. このとき, 点集合 $V(H(2, 4))$ の分割 $\pi = \{C, V(H(2, 4)) \setminus C\}$ は, $V(H(2, 4)) \setminus C$ を Godsil–McKay cell とする Godsil–McKay partition となっている. しかも, スwitchingを行ったグラフは元のグラフと非同型となる. このグラフは *Shrikhande graph* として知られている. これを Sh によって表す. *Doob graph* とは, m 個の Shrikhande graph と, n 個の K_4 の Cartesian product からなり, $D(m, n)$ で表される:

$$D(m, n) = \underbrace{Sh \square \cdots \square Sh}_m \square \underbrace{K_4 \square \cdots \square K_4}_n$$

$D(m, n)$ は $H(2m + n, 4)$ と同じ交差数をもつ距離正則グラフであり, $m \geq 1$ のとき, 両者は非同型なグラフとなる.

Theorem 5.1. $m \geq 1$ で $n \geq 0$ とする. Doob graph $D(m, n)$ は, Hamming graph $H(2m + n, 4)$ から Godsil–McKay switching を m 回適用することによって得られる.

5.2 Dual polar graphs and their extended bipartite double

この subsection の細かい定義などについては, [2] を参照されたい. V を次のいずれかの線形空間とし, 2 次形式 f が付随しているものとする:

Name	V	f
$[B_d(q)]$	\mathbb{F}_q^{2d+1}	a nondegenerate orthogonal form
$[C_d(q)]$	\mathbb{F}_q^{2d}	a nondegenerate symplectic form
$[D_d(q)]$	\mathbb{F}_q^{2d}	a nondegenerate orthogonal form of Witt index d

V の部分空間 U が *totally isotropic* であるとは, $U \subset U^\perp$ であることをいう. ここで $U^\perp = \{v \in V \mid f(v, u) = 0 (\forall u \in U)\}$ である. 極大な totally isotropic subspace は常に d 次元空間である. V 上の *dual polar graph* とは, 極大な totally isotropic subspace の全体を点集合とし, ふたつの部分空間 W_1, W_2 が隣接する条件が $\dim W_1 \cap W_2 = d - 1$ で定まるグラフである. $[B_d(q)], [C_d(q)], [D_d(q)]$ 上の dual polar graph をそれぞれ $B_d(q), C_d(q), D_d(q)$ で表す. これらのグラフも距離正則グラフであることが知られており, $B_d(q)$ と $C_d(q)$ は同じ交差数をもつ. また, 両者は q が偶数のときのみ同型となる. さらに, $B_d(q)$ や $C_d(q)$ の extended bipartite double は再び距離正則グラフとなる [6]. $B_d(q)$ の extended bipartite double は $D_{d+1}(q)$ であり, $C_d(q)$ の extended bipartite double は *Hemmeter graph* $\text{Hem}_{d+1}(q)$ として知られている. また, $D_{d+1}(q)$ と $\text{Hem}_{d+1}(q)$ は q が奇数のときは互いに非同型なグラフとなる. ここで, extended bipartite double をとる操作が *Godsil–McKay switching* と可換であったことを思い出すと, もし, $B_d(q)$ と $C_d(q)$ がスイッチングによって移り合うことが分かれば, 同時に, $D_{d+1}(q)$ と $\text{Hem}_{d+1}(q)$ が移り合うことも分かることになる. 以下の図に, ここでの議論をまとめて本稿を締めくくりにする.

$$\begin{array}{ccc}
 B_d(q) & \xrightarrow{\text{extended bipartite double}} & D_{d+1}(q) \\
 \text{switching? } \downarrow & & \downarrow \text{switching!} \\
 C_d(q) & \xrightarrow{\text{extended bipartite double}} & \text{Hem}_{d+1}(q)
 \end{array}$$

References

- [1] A. Abiad, A.E. Brouwer and W.H. Haemers, *Godsil–McKay switching and isomorphism*, Electron. J. Linear Algebra 28 (2015), 4–11.

- [2] A.E. Brouwer, A.M. Cohen and A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1989.
- [3] S. Bang, T. Fujisaki and J.H. Koolen, *The spectra of the local graphs of the twisted Grassmann graphs*, European J. Combin. 30 (2009), 638–654.
- [4] Benjian Lv, Li-Ping Huang and Kaishun Wang, *Endomorphisms of Twisted Grassmann Graphs*, Graphs Combin. 33 (2017), 157–169.
- [5] A.E. Brouwer, W.H. Haemers, *Spectra of Graphs*, Springer, New York, 2012.
- [6] A. Brouwer, J. Hemmeter, *A new family of distance-regular graphs and the $\{0, 1, 2\}$ -cliques in dual polar graphs*, European J. Combin. 13 (1992), 71–79.
- [7] Dragoš M. Cvetković, M. Doob, S. Horst, *Spectra of graphs*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1982.
- [8] E.R. van Dam and J.H. Koolen, *A new family of distance-regular graphs with unbounded diameter*, Invent. Math. 162 (2005), 189–193.
- [9] T. Fujisaki, J.H. Koolen and M. Tagami, *Some properties of the twisted Grassmann graphs*, Innov. Incidence Geom. 3 (2006), 81–87.
- [10] C.D. Godsil, B.D. McKay, *Constructing cospectral graphs*, Aequationes Math. 25 (1982), 257–268.
- [11] C.D. Godsil and G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 207, Springer, New York, 2001.
- [12] R. Hammack, W. Imrich and S. Klavžar, *Handbook of Product Graphs*, 2nd Ed. (CRC Press, Boca Raton, 2011).
- [13] A. Munemasa, *Godsil–McKay switching and twisted Grassmann graphs*, Des. Codes Cryptogr, to appear.
- [14] A. Munemasa and V.D. Tonchev, *The twisted Grassmann graph is the block graph of a design*, Innov. Incidence Geom. 12 (2011), 1–6.

第二固有値を固定したときの連結正則二部グラフの 頂点数に対する上界

野崎寛

愛知教育大学数学教育講座

hnozaki@aecc.aichi-edu.ac.jp

1 はじめに

連結な次数 k の正則グラフ G に対して、その最大固有値 k と第 2 固有値（二番目に大きな固有値）の差をスペクトルギャップという。スペクトルギャップが大きいグラフは、ある意味で良い連結性を持つことが知られている。先行研究である [2] では、次数 k と第 2 固有値を固定したときに、頂点数に対する上界を得て、その上界を達成するグラフが内周が大きい距離正則グラフになることを示した。本稿では、[2] の結果が正則二部グラフでも同様に示されることを紹介する。本研究は、S.M. Cioabă 氏と J.H. Koolen 氏との共同研究によるものである。

単純グラフ $G = (V, E)$ の隣接行列 A とは、 V により添字付けられる正方行列で、その (u, v) 成分 $A(u, v)$ が、

$$A(u, v) = \begin{cases} 1, & \{u, v\} \in E, \\ 0, & \{u, v\} \notin E \end{cases}$$

で定義される行列である。 A の固有値を、 G の固有値という。 G の異なる固有値を大きいものから順に $\lambda_1 = k, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ と表すことにする。 G のスペクトルギャップは、 G の最大固有値 k と第 2 固有値 λ_2 の差 $\tau(G) = k - \lambda_2$ で定義される。頂点集合 V の部分集合 S に対して、 S の境界 ∂S を

$$\partial S = |\{\{u, v\} \mid u \in S, v \in V \setminus S, \{u, v\} \in E\}|$$

と定義する。そのとき、等周定数 $h(G)$ は

$$h(G) = \min_{S \subset V, |S| \leq |V|/2} \frac{|\partial S|}{|S|}$$

で定義される値である。大きい等周定数 $h(G)$ をもつグラフは、どのような部分集合 S を取ってきたとしても、 S と $V \setminus S$ の間に一定の辺の本数が確保できるという意味で、よい連結性をもつということが出来る。 $h(G)$ は Cheeger 型の不等式

$$\tau(G)/2 \leq h(G) \leq \sqrt{2k\tau(G)}$$

により, $\tau(G)$ で評価できる [1]. 特に, 下界に注目すれば, $\tau(G)$ が大きいグラフは, $h(G)$ が大きくなり, よい連結性を持つとすることができる. 次数 k と $0 \leq \lambda < 2\sqrt{k-1}$ を満たす実数 λ を固定したとき, $\lambda_2 < \lambda$ を満たすグラフは有限個しかないことが知られており (Alon–Boppana, Serre), 最大の頂点数 $v(k, \lambda)$ をもつグラフの決定, 分類がここでの問題である.

2 $v(k, \lambda)$ に対する上界

この節では, 先行研究である [2] の結果を紹介する. $F_i^{(k)}(x)$ を次の3項間漸化式で定義される一変数多項式とする.

$$F_0^{(k)}(x) = 1, \quad F_1^{(k)}(x) = x, \quad F_2^{(k)}(x) = x^2 - k,$$

$$xF_{i-1}^{(k)}(x) = F_i^{(k)}(x) - (k-1)F_{i-2}^{(k)}(x) \quad (i \geq 3).$$

$v(k, \lambda)$ を決定するにあたって次の線形計画限界が有用である.

Theorem 2.1 ([5]). $G = (V, E)$ を連結な次数 k の正則グラフとし, その異なる固有値を $\lambda_1 = k, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ とする. 次の (1), (2) の性質を満たす実係数一変数多項式 $f(x) = \sum_{i=0}^s f_i F_i^{(k)}(x)$ が存在したと仮定する.

- (1) $f(k) > 0$ であり, 任意の $i = 2, \dots, r$ に対して, $f(\lambda_i) \leq 0$ が成り立つ.
- (2) $f_0 > 0$ であり, 任意の $i = 1, \dots, s$ に対して, $f_i \geq 0$ が成り立つ.

そのとき

$$|V| \leq \frac{f(k)}{f_0}$$

が成立する.

実数 $c \geq 1$, 2つの整数 $k \geq 3, t \geq 3$ に対して, 行列 T は

$$T = T(k, t, c) = \begin{pmatrix} 0 & k & & & & & & \\ 1 & 0 & k-1 & & & & & \\ & 1 & 0 & k-1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & 1 & 0 & k-1 & & \\ & & & & c & k-c & & \end{pmatrix}$$

で定義される t 次の3重対角行列とする. Theorem 2.1 を本質的に用いることで, 次の上界を得ることが出来る.

$v(k, \lambda)$	k	λ	graph
n	2	$2 \cos(2\pi/n)$	n -cycle C_n
$k+1$	k	-1	Complete graph K_{k+1}
$2k$	k	0	Comp. bipartite graph $K_{k,k}$
$2(q^2 + q + 1)$	$q+1$	\sqrt{q}	inc. graph of $PG(2, q)$
$2(q+1)(q^2 + 1)$	$q+1$	$\sqrt{2q}$	inc. graph of $GQ(q, q)$
$2(q+1)(q^4 + q^2 + 1)$	$q+1$	$\sqrt{3q}$	inc. graph of $GH(q, q)$
10	3	1	Petersen graph
35	4	2	Odd graph O_4
50	7	2	Hoffman–Singleton graph
16	5	1	Clebsch graph
56	10	2	Gewirts graph
77	16	2	M_{22} graph
100	22	2	Higman–Sims graph

(q : prime power)

Table 1: $T(k, t, c)$ を交叉行列に持つ距離正則グラフ

Theorem 2.2 ([2]). λ を行列 T の 2 番目に大きい固有値とする. そのとき,

$$v(k, \lambda) \leq 1 + \sum_{i=0}^{t-3} k(k-1)^i + \frac{k(k-1)^{t-2}}{c}$$

が成り立つ. 等号を達成する必要十分条件は, グラフが $T(k, t, c)$ を交叉行列に持つ距離正則グラフであることである.

$T(k, t, c)$ を交叉行列に持つ距離正則グラフはその内周を g , 異なる固有値の個数を r とするとき, $g \geq 2(r-1)$ を満たすグラフだと特徴づけられる. $T(k, t, c)$ を交叉行列に持つ距離正則グラフは, その直径が 7 以上であるとき, 存在しないことが知られている [3]. Table 1 に知られている $g \geq 2(r-1)$ を満たすグラフを示す.

3 正則二部グラフの頂点数に対する上界

正則グラフの線形計画限界で用いられた多項式 $F_i^{(k)}(x)$ の代わりに, 正則二部グラフの線形計画限界では, 次で定義される一変数多項式 $\mathcal{F}_i(x)$ を用いる.

$$\mathcal{F}_i(x) = F_{2i}(\sqrt{x}).$$

A を次数 k の正則二部グラフ G の隣接行列であるとすると,

$$A = \begin{pmatrix} O & B \\ B^\top & O \end{pmatrix}$$

k	λ	$v(k, \lambda)$	Name
2	$2 \cos(2\pi/n)$	n (even)	n -cycle C_n
k	0	$2k$	Complete bipartite graph $K_{k,k}$
k	$\sqrt{k - \lambda}$	$2(1 + \frac{k(k-1)}{\lambda})$	Symmetric (v, k, λ) -design
$r^2 - r + 1$	r	$2(r^2 + 1) \times (r^2 - r + 1)$	$pg(r^2 - r + 1, r^2 - r + 1, (r - 1)^2)$
q	\sqrt{q}	$2q^2$	$AG(2, q)$ minus a parallel class
$q + 1$	$\sqrt{2q}$	$2 \sum_{i=0}^3 q^i$	$GQ(q, q)$
$q + 1$	$\sqrt{3q}$	$2 \sum_{i=0}^5 q^i$	$GH(q, q)$
6	2	162	$pg(6, 6, 2)$

(q : prime power, r : power of 2)

Table 2: $T'(k, t, c)$ を交叉行列に持つ距離正則二部グラフ

References

- [1] N. Alon and V.D. Milman, λ_1 , isoperimetric inequalities for graphs, and superconcentrators, *J. Combin. Theory Ser. B* **38**(1985), 73–88.
- [2] S.M. Cioabă, J.H. Koolen, H. Nozaki, and J.R. Vermette, Maximizing the order of a regular graph of given valency and second eigenvalue, *SIAM J. Discrete Math.* **30** (2016), no. 3, 1509–1525.
- [3] R.M. Damerell and M.A. Georgiacidis, On the maximum diameter of a class of distance-regular graphs. *Bull. London Math. Soc.* **13**, 316–322 (1981).
- [4] F.J. Fuglister, On generalized Moore geometries. I, *Discrete Math.* **67** (1987), no. 3, 249–258.
- [5] H. Nozaki, Linear programming bounds for regular graphs, *Graphs Combin.* **31** (2015), no. 6, 1973–1984.

Hiroshi Nozaki

Department of Mathematics Education,
Aichi University of Education
1 Hirosawa, Igaya-cho,
Kariya, Aichi 448-8542,
Japan.
hnozaki@aecc.aichi-edu.ac.jp

Coverings and Homotopy of a Graph

Hiroshi Suzuki

International Christian University

June 16, 2017

1 Introduction

Distance-regular graphs (DRGs), especially Q -polynomial distance-regular graphs enjoy rich algebraic and combinatorial properties. Many algebraic methods are developed, and they are extremely powerful, especially when DRGs are Q -polynomial, and lots of information can be obtained on parameters of DRGs. However, it requires spectral information, and the information on eigenvalues can only be approximated when a part of the information of the graph is given. Moreover, a part of structural information can be obtained, but the detail and the identification of the graph require other methods.

If the determination of the parameter sets of DRGs is the goal, algebraic methods may be sufficient.

On the other hand, there are strong evidences that DRGs are characterized by ‘local’ information.

1. There are only finitely many DRGs with fixed valency $k (> 2)$.
2. Several local characterizations of DRGs (or graphs such that some parameters ‘exist’)
 - (a) If $(v, k, a_1, a_2, c_2, c_3) = (q^d, d(q-1), q-2, 2(q-2), 2, 3)$, then Γ is a Hamming graph or a Doob Graph. [Y. Egawa, BCN: Theorem 9.2.4]
 - (b) If Γ is bipartite and $c_2 = 1, c_3 = c_4 = c \geq 2$, then Γ is a bipartite Johnson graph or a bipartite q -Johnson graph: $J_q(n, d, d-1)$
 - (c) If Γ is a regular near polygon with $a_1 > 0$ and $c_2 \geq 3$, then Γ is completely classified: Dual Polar Graphs, etc.

The following is an interesting result by A. E. Brouwer, Proposition 4.3.6 in “Distance-Regular Graphs” by Brouwer, Cohen and Neumaier (BCN).

Proposition. *Suppose Γ is a graph of valency $k = n$ and $a_1 = 0, a_2 = 0, c_2 = 2, c_3 = 3$. Then there is a covering $\pi : \hat{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ preserving distances at most three, where $\hat{\Gamma}$ is a hypercube, i.e., $H(n, 2)$. Here, a covering is an onto locally bijective mapping.*

Note that in the result distance-regularity is not assumed. There are a few similar results, but not much is systematically studied about the covering.

In a classic of C. Chevalley, “Theory of Lie Groups” the following theorem is proved.

Theorem (C. Chevalley). *Let \mathfrak{V} be a connected and locally simply connected space. Then there is a topological space $\widehat{\mathfrak{V}}$ and a covering morphism $\pi : \widehat{\mathfrak{V}} \rightarrow \mathfrak{V}$ with universal property, and $\widehat{\mathfrak{V}}$ is uniquely determined up to homeomorphism.*

Is there a graph theoretic counterpart? What are the covering morphisms and universal properties we should investigate? What is a simply connected, and locally simply connected graph? Does a ‘points and lines geometry’ of distance-regular graphs such as completely regular clique graph structures or their incidence graphs help?

2 Notation and Terminologies

In the following, $\mathcal{P}(X, k)$ denotes all k -element subsets of a set X , and a *graph* $\Gamma = (V, E)$ is a pair of sets V and E such that $E \subset \mathcal{P}(V, 2)$. Let $\Gamma = (V, E)$ be a graph.

- A *walk* $w = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ is a sequence of vertices such that $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ for all i . Then the number n is the *length*, $i(w) = v_0$, the *initial vertex* and $t(w) = v_n$ the *terminal vertex*.
- The graph Γ is *connected* if there is a walk from x to y for all x and y in V .
- A walk $w = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ is a *path* if $v_{i+2} \neq v_i$ for all i .
- A path $w = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ is a *reduced path* if v_{i+2} is not adjacent to v_i for all i .
- Let $c = (v_0, v_1, \dots, v_n = v_0)$ be a closed walk. Then $c' = (v_1, \dots, v_n = v_0, v_1)$ is a *rotation* of c .
- All iterates of rotations of a closed walk c together with their inverses are called the *association class* of c .

Let $\Gamma = (V, E)$ be a connected graph.

- For $x, y \in V$, $\partial_\Gamma(x, y)$ denotes the *distance* between x and y , i.e., the length of a shortest walk connecting x and y . Then the function ∂_Γ defines a metric on Γ .
- The *diameter* $d(\Gamma)$ of Γ is defined by $d(\Gamma) = \max\{\partial(x, y) \mid x, y \in V\}$.
- For $x \in V$ and an integer i , $\Gamma_i(x) = \{y \in X \mid \partial(x, y) = i\}$. If $i < 0$ or $i > d(\Gamma)$, $\Gamma_i(x) = \emptyset$. We write $\Gamma(x)$ for $\Gamma_1(x)$.
- $c_i(x, y) = |\Gamma_{i-1}(x) \cap \Gamma(y)|$, $a_i(x, y) = |\Gamma_i(x) \cap \Gamma(y)|$ and $b_i(x, y) = |\Gamma_{i+1}(x) \cap \Gamma(y)|$ for $x, y \in V$ with $\partial(x, y) = i$.

Definition 1 (DRG). A connected graph $\Gamma = (V, E)$ is a *distance-regular graph* (DRG), if $c_i(x, y)$ and $b_i(x, y)$ depend only on $i = \partial(x, y)$ for all $i \in \{0, 1, 2, \dots, d(\Gamma)\}$.

Definition 2 (DSRG). Let $\Gamma = (X \cup Y, E)$ be a connected bipartite graph with bipartition $X \cup Y$. Let $d^X = d^X(\Gamma) = \max\{\partial(x, y) \mid x \in X, y \in X \cup Y\}$. Then Γ is a *distance-semiregular graph* (DSRG) (on X), if for all $i = \{0, 1, 2, \dots, d^X\}$, the numbers $c_i^X = c_i(x, y)$, and $b_i^X = b_i(x, y)$ depend only on $i = \partial(x, y)$ whenever $x \in X$ and $y \in X \cup Y$.

Definition 3 (Operations on the Set of Walks). Let $p = (p_0, p_1, \dots, p_\ell)$, $q = (q_0, q_1, \dots, q_m)$ and $r = (r_0, r_1, \dots, r_n)$ be walks in a graph $\Gamma = (V, E)$.

1. If $p_\ell = q_0$, the concatenation $(p_0, p_1, \dots, p_\ell = q_0, q_1, \dots, q_m)$ is a walk denoted by $p \circ q$.
2. If $p_\ell = q_0$ and $q_m = r_0$, both $(p \circ q) \circ r$ and $p \circ (q \circ r)$ are defined and the same. Hence we write $p \circ q \circ r$.
3. The *inverse* of the walk p denoted by p^{-1} is $(p_r, p_{r-1}, \dots, p_0)$.
4. The walk of the form $p \circ p^{-1}$ is called a *backtrack*.
5. Let $v \in V$. Then (v) is regarded as a walk of length 0, a closed walk, and a (simple) backtrack.

In the following, we mainly follow the account in *Points and Lines, Characterizing the Classical Geometries* by E. E. Shult, 2011 [4]. See also [1, 7].

Definition 4 (Morphisms of Graphs). Let $\Gamma = (V, E)$ and $\Gamma' = (V', E')$ be two graphs.

1. A *locally bijective morphism* is a mapping $f : V \rightarrow V'$ such that the restriction of f induces a bijection from $\Gamma(x)$ to $\Gamma'(f(x))$ for every $x \in V$.
2. A mapping $f : V \rightarrow V'$ is a *covering* if f is onto, locally bijective and the domain graph Γ is connected. In this case, Γ' is connected as well.

The following hold.

Lemma 1 (Lifts of Walks). Let $\hat{\Gamma} = (\hat{V}, \hat{E})$ and $\Gamma = (V, E)$ be graphs. Let $f : \hat{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ be a covering then the following hold.

- (i) Let $\hat{x} \in \hat{V}$ and $f(\hat{x}) = x$ and $y \in \Gamma(x)$. Then, there exists a unique $\hat{y} \in \hat{\Gamma}(x)$ such that $f(\hat{y}) = y$.
- (ii) For $x, y \in V$, $|f^{-1}(x)| = |f^{-1}(y)|$.
- (iii) Let x be a vertex of Γ and $w = (x = x_0, x_1, \dots, x_n)$ a walk. Let $\hat{x} \in f^{-1}(x)$. Then there is a walk $\hat{w} = (\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ in $\hat{\Gamma}$ such that $f(\hat{x}_i) = x_i$ for all i . The walk is called a *lift* of w with initial vertex \hat{x}_0 .
- (iii) If Γ is bipartite, then so is $\hat{\Gamma}$.

Let $r = |f^{-1}(x)|$ for $x \in V$. Then r does not depend on the choice of x by (ii), and $\hat{\Gamma}$ together with a covering map f is called an *r-fold cover* of Γ .

Lemma 2 (Properties of Lifts). Let f be a covering from $\hat{\Gamma} = (\hat{V}, \hat{E})$ to $\Gamma = (V, E)$. Let \hat{w} be a lift of a walk $w = (x_0, x_1, \dots, x_\ell)$. Then the following hold.

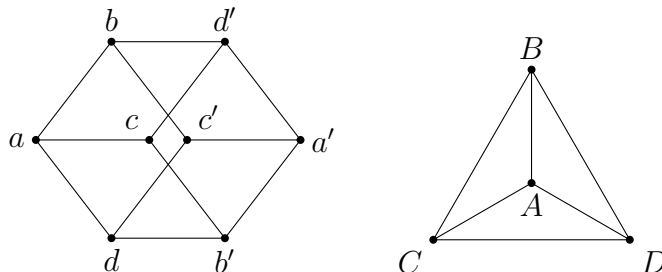
- (i) \hat{w} is uniquely determined if the initial vertex $\hat{x}_0 \in f^{-1}(x_0)$ is chosen.
- (ii) w is a path if and only if \hat{w} is a path.
- (iii) If every vertex in w is distinct, then so is in w' .
- (iv) If \hat{w} is a lift of w , then $\hat{w} \circ \hat{w}^{-1}$ is a lift of $w \circ w^{-1}$.
- (v) If w is a closed walk and \hat{w} is a closed walk, then every associate of w can be lifted to an associate of \hat{w} .

Definition 5 (\mathcal{C} -Covering). Let f be a covering from a graph $\hat{\Gamma} = (\hat{V}, \hat{E})$ to a graph $\Gamma = (V, E)$. Let \mathcal{C} be a collection of closed walks in Γ . If every closed walk $w = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ in \mathcal{C} is lifted to a closed walk $\hat{w} = (\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ in $\hat{\Gamma}$ for any $\hat{x}_0 \in f^{-1}(x_0)$, f is called a \mathcal{C} -covering.

We remark the following.

- Every walk can be lifted. Hence every closed walk can be lifted but the lift may not be closed.
- If a walk $w = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ in Γ is lifted to a closed walk $\hat{w} = (\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ in $\hat{\Gamma}$ for any $\hat{x}_0 \in f^{-1}(x_0)$, then w is called *liftable*.
- A covering morphism f is a \mathcal{C} -covering if every closed walk in \mathcal{C} is liftable.

Example 1 The correspondence f sending a and a' to A , b and b' to B , c and c' to C and d and d' to D is a covering. Note that it does not induce a local isomorphism. A triangle (A, B, C, A) is not liftable, however, (A, B, C, D, A) is liftable. If we set \mathcal{C} to be the set of three quadrangles (A, B, C, D, A) , (A, C, D, B, A) , (A, D, B, C, A) . Then f is a \mathcal{C} -covering.



3 \mathcal{C} -Homotopy

Hypothesis C Let $\Gamma = (V, E)$ to a connected graph and \mathcal{C} a collection of closed walks with the following properties.

- (i) \mathcal{C} contains all backtracks including the one of length zero.
- (ii) If $c = (x_0, x_1, \dots, x_\ell) \in \mathcal{C}$, then $c' = (x_1, \dots, x_\ell, x_0) \in \mathcal{C}$.
- (iii) If $c = (x_0, x_1, \dots, x_\ell) \in \mathcal{C}$, then $c^{-1} = (x_\ell, \dots, x_1, x_0) \in \mathcal{C}$.

To develop \mathcal{C} -homotopy, we will assume Hypothesis C above. We remark the following.

- By Lemma 2, if a closed walk c is liftable, then every associate of it is liftable.
- Let \mathcal{C} be a collection of closed walks, and let \mathcal{C}^* be the union of \mathcal{C} and the set of all associates of the members of \mathcal{C} together with all backtracks. Then f is a \mathcal{C} -covering if and only if f is a \mathcal{C}^* -covering. Hence we can assume from the beginning that \mathcal{C} satisfies Hypothesis C, when we discuss \mathcal{C} -coverings.

Let \mathcal{C} be a collection of closed walks of a connected graph $\Gamma = (V, E)$ satisfying Hypothesis C.

Definition 6 (\mathcal{C} -Homotopy). 1. A pair of walks (p, q) are said to be elementary \mathcal{C} -homotopy if and only if

$$\begin{aligned} p &= (x_0, x_1, \dots, x_m) \circ (u_0, u_1, \dots, u_r) \circ (y_0, y_2, \dots, y_n) \\ q &= (x_0, x_1, \dots, x_m) \circ (v_0, v_1, \dots, v_s) \circ (y_0, y_2, \dots, y_n), \text{ where} \\ &\quad (u_0, u_1, \dots, u_r) \circ (v_0, v_1, \dots, v_s)^{-1} \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

2. Two walks p and q are said to be \mathcal{C} -homotopic if and only if there exists a finite sequence of elementary \mathcal{C} -homotopies

$$(p, p_1), (p_1, p_2), \dots, (p_{s-1}, p_s = q).$$

We write $p \sim q$ when p and q are \mathcal{C} -homotopic walks.

Definition 7. Let \mathcal{C} be a collection of closed walks of a connected graph $\Gamma = (V, E)$ satisfying Hypothesis C.

1. The closure $\bar{\mathcal{C}}$ of \mathcal{C} is defined by the following.

$$\bar{\mathcal{C}} = \{p \circ q^{-1} \mid p \text{ and } q \text{ are } \mathcal{C}\text{-homotopic walks in } \Gamma\}.$$

2. A closed walk c with initial vertex $s = i(c)$ is \mathcal{C} -contractible if there is a finite chain of elementary \mathcal{C} -homotopy

$$(c, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_{\ell-1}, c_\ell = (s)),$$

where $c_\ell = (s)$ is a closed walk of length zero.

We have the following.

Lemma 3. $\bar{\mathcal{C}}$ consists of the class of \mathcal{C} -contractible circuits.

4 Universal \mathcal{C} -Covers

We now define universal \mathcal{C} -cover.

Definition 8 (Universal \mathcal{C} -Cover). Let \mathcal{C} be a collection of closed walks of a connected graph Γ . A \mathcal{C} -cover $\pi : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ is said to be *universal* if and only if, for every \mathcal{C} -cover $\phi : \Lambda \rightarrow \Gamma$, there exists a covering $\rho : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Lambda$ such that the composition $\phi \circ \rho$ equals π .

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Gamma} & \xrightarrow{\pi} & \Gamma (\supset \mathcal{C}) \\ \exists \rho \downarrow \vdots & \nearrow \phi & \\ \Lambda & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{id} & \Gamma (\supset \mathcal{C}) \\ \exists \phi^{-1} \downarrow \vdots & \nearrow \phi & \\ \Lambda & & \end{array}$$

Definition 9 (Simply \mathcal{C} -Connected). Let \mathcal{C} be a collection of closed walks of a connected graph Γ . Then Γ is said to be *\mathcal{C} -simply connected* if and only if, any \mathcal{C} -covering morphism is an isomorphism.

The following hold.

Theorem 4 (Existence of a Universal \mathcal{C} -Cover and its Uniqueness). *Let \mathcal{C} be a collection of circuits of a connected graph $\Gamma = (V, E)$. Then there exists a universal cover $\hat{\Gamma} = (\hat{V}, \hat{E})$ with a \mathcal{C} -covering $\kappa : \hat{\Gamma} \rightarrow \Gamma$. Moreover, if $\phi : \Lambda \rightarrow \Gamma$ is a \mathcal{C} -covering, then for any $a \in \kappa^{-1}(b)$ and $x \in \phi^{-1}(b)$, there is a unique covering $\psi_x : \hat{\Gamma} \rightarrow \Lambda$ such that $\psi_x(a) = x$ and $\phi \circ \psi_x = \kappa$.*

Proposition 5. *Let \mathcal{C} be a collection of closed walks of a connected graph Γ .*

- (i) *Let $\tilde{\Gamma}$ and $\tilde{\Gamma}'$ be universal \mathcal{C} -covers of Γ . Then $\tilde{\Gamma}$ and $\tilde{\Gamma}'$ are isomorphic.*
- (ii) *If Γ is simply \mathcal{C} -connected, the identity mapping $\iota : \Gamma \rightarrow \Gamma$ is a universal \mathcal{C} -cover.*

Proposition 6. *Let \mathcal{C} be a collection of closed walks of a connected graph Γ . Then the following conditions are equivalent.*

- (i) *Γ is simply \mathcal{C} -connected.*
- (ii) *If $\pi : \Lambda \rightarrow \Gamma$ is a \mathcal{C} -cover, then every closed walk at a vertex x of Γ lifts to a closed walk starting at y in Λ for any vertex y in Λ such that $\pi(y) = x$.*
- (iii) *For any two vertices x and y of Γ , all walks from x to y are \mathcal{C} -homotopic to one another.*
- (iv) *Every circuit of Γ is \mathcal{C} -contractible.*

Corollary 7. *Let Γ be a connected graph. If \mathcal{C} contains all closed circuits, then Γ is simply \mathcal{C} -connected.*

5 Simply \mathcal{C} -Connected Subgraphs

The following is a key proposition to show a graph is \mathcal{C} -simply connected starting from subgraphs.

Proposition 8 (Union of Simply Connected Subgraphs). *Suppose \mathcal{C} is a collection of closed walks of the graph $\Gamma = (V, E)$. Let $\Lambda_1 = (X_1, E_1)$ and $\Lambda_2 = (X_2, E_2)$ be \mathcal{C} -simply connected subgraphs. If the intersection $\Delta = (X_1 \cap X_2, E_1 \cap E_2)$ is connected in the ordinary graph theoretic sense, then the subgraph $\Lambda = (X_1 \cup X_2, E_1 \cup E_2)$ is \mathcal{C} -simply connected.*

Lemma 9. *Let \mathcal{C} be a collection of circuits of a connected finite graph $\Gamma = (V, E)$. Then the following holds.*

- (i) *If Γ is a tree, then Γ is \mathcal{C} -simply connected.*
- (ii) *Suppose $\Gamma = (X, E)$ is planar. If the boundary walk of each face of a fixed embedding of Γ on the plane is \mathcal{C} -contractible, then Γ is \mathcal{C} -simply connected.*

To state our result, we introduce notation. Let $\Gamma = (V, E)$ be a connected graph.

1. The girth of Γ denoted by $g(\Gamma)$ is the length of a shortest circuit.
2. For each nonnegative integer m and $x \in V$, $\Gamma_m^*(x) = \{z \in V \mid \partial(x, z) \leq m\}$.
3. For $x, y \in V$, let $G(x, y) = \{z \in V \mid \partial(x, z) + \partial(z, y) = \partial(x, y)\}$, the set of vertices on a geodesic between x and y . When $S \subset V$,

$$G(x, S) = \bigcup_{y \in S} G(x, y).$$

4. For $x, y \in V$ and $0 \leq r \leq \partial(x, y)$, let $G_r(x, y) = G(x, y) \cap \Gamma_r^*(y)$. When $S \subset V$,

$$G_r(x, S) = \bigcup_{y \in S} G_r(x, y), \text{ and } G_r^*(x, S) = \bigcup_{y \in S} G_r(x, y).$$

Theorem 10. *Let $\Gamma = (V, E)$ be a finite connected bipartite graph. Let \mathcal{C} be a collection of circuits in Γ . Suppose, for a vertex $x \in V$ and $r \in \{1, 2, \dots, d_x - 1\}$, where $d_x = \max\{\partial(x, y) \mid y \in V\}$. Then the following hold.*

- (i) *The induced subgraph on $\Gamma_{r-1}^*(x)$ is \mathcal{C} -simply connected.*
- (ii) *For every $y \in V$, the induced subgraph on $G(y, S)$ is \mathcal{C} -simply connected for every $S \subset \Gamma_r(y)$.*
- (iii) *For each $m \in \{r, \dots, d_x\}$ and $y \in \Gamma_m(x)$, $\Lambda = (Y, E_Y)$ is connected, where*

$$Y = \Gamma_{m-1}^*(x) \cap G_r(x, y).$$

Then Γ is \mathcal{C} -simply connected.

Corollary 11. Let $\Gamma = (V, E)$ be a finite connected bipartite graph of girth $g = 2r$. Let \mathcal{C} be a collection of circuits in Γ . Suppose, for a vertex $x \in V$, the following hold. Set $d_x = \max\{\partial(x, y) \mid y \in V\}$.

- (i) Every circuit of minimum length $g = 2r$ is \mathcal{C} -contractible.
- (ii) For each $m \in \{r + 1, \dots, d_x\}$ and $y \in \Gamma_m(x)$, $\Lambda = (Y, E_Y)$ is connected, where

$$Y = \Gamma_{m-1}^*(x) \cap G_r(x, y).$$

Then Γ is \mathcal{C} -simply connected.

Theorem 12. Let $\Gamma = (V, E)$ be one of the following DSRGs. If \mathcal{C} is the collection of all closed walks of length equal to the girth $g(\Gamma)$. Then Γ is simply \mathcal{C} -connected.

- (i) The hypercube $\mathcal{H}^{(n)}$ of diameter $n \geq 2$, i.e., the Hamming graph $H(n, 2)$ with $g(\Gamma) = 4$.
- (ii) The incidence graph of the Hamming graph $H(d, q)$ with $g(\Gamma) = 8$.
- (iii) The bipartite Johnson graph $J(n, d, d - 1)$ ($n \geq 2d \geq 4$) with $g(\Gamma) = 6$.
- (iv) The bipartite q -Johnson graph $J_q(n, d, d - 1)$ ($n \geq 2d \geq 4$) with $g(\Gamma) = 6$.

6 Finiteness Conditions

We will consider finiteness condition of the universal cover of a finite graph.

Definition 10. Let $\Gamma = (V, E)$ be a connected bipartite graph with bipartition $V = X \cup Y$. Then Γ is said to be *girth regular on X with parameters (s, t, u, q)* , where s, t, u, q are positive integers, if the following are satisfied.

- (i) Each vertex $x \in X$ is of valency $t + 1$.
- (ii) Each vertex $y \in Y$ is of valency $s + 1$.
- (iii) The girth of Γ is $2(u + 1)$.
- (iv) For every $x \in X$, $c_{u+1}(x)$ exists and $c_{u+1}(x) = q + 1$.

We note the following.

1. DSRGs are girth regular.
2. Every known DRG with large diameter except a Doob graph, a twisted Grassmann graph, and a Hermitian Forms graph is a bipartite half of a DSRG. See [5].

Theorem 13. Let $\Gamma = (V, E)$ be a connected bipartite graph with bipartition $V = X \cup Y$. Suppose V is a finite set and Γ is girth regular on X with parameters (s, t, u, q) . Let \mathcal{C} be the collection of all circuits of minimal length $2(u + 1)$. If $u \geq 2$, then the universal \mathcal{C} -cover of Γ is finite.

Recall that DSRGs are girth regular. Hence we have the following corollary.

Corollary 14. Let $\Gamma = (V, E)$ be a DSRGs on X of girth at least 6, where $V = X \cup Y$ is a bipartition. Let \mathcal{C} be the collection of all circuits of minimal length. Then the universal \mathcal{C} -cover of Γ is finite.

Example 2 Let Λ be the dodecahedron and Γ the Petersen graph. Let

$$\begin{aligned} V\Lambda &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, a', b', c', d', e', f', g', h', i', j'\}, \\ V\Gamma &= \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}. \end{aligned}$$

Adjacencies are depicted below. Let $\pi : \Lambda \rightarrow \Gamma$ be a mapping defined below.

$$\begin{aligned} \pi(a) = \pi(a') = A, \pi(b) = \pi(b') = B, \pi(c) = \pi(c') = C, \pi(d) = \pi(d') = D, \pi(e) = \pi(e') = E, \\ \pi(f) = \pi(f') = F, \pi(g) = \pi(g') = G, \pi(h) = \pi(h') = H, \pi(i) = \pi(i') = I, \pi(j) = \pi(j') = J. \end{aligned}$$

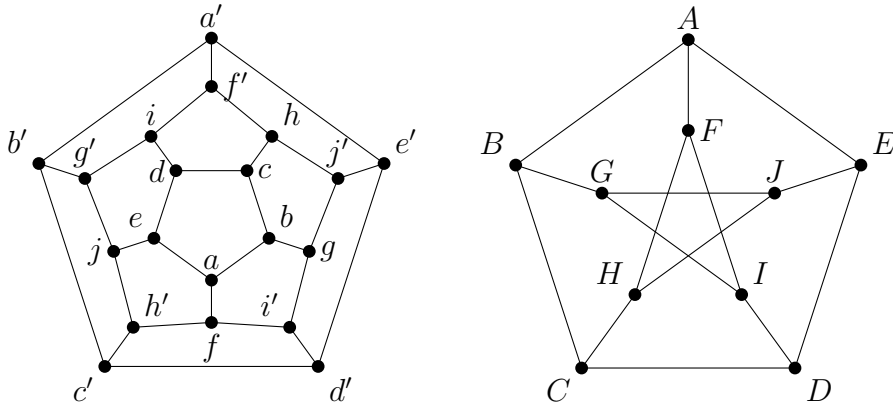
Then π is a covering. However, each lift of (A, B, C, H, F, A) is not a closed walk. Let

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = \{ & (A, B, C, D, E, A), (A, B, G, I, F, A), (B, C, H, J, G, B), \\ & (C, D, I, F, H, C), (D, E, J, G, I, D), (E, A, F, H, J, E)\}. \end{aligned}$$

Then π is a \mathcal{C} -cover, and Λ is a universal \mathcal{C} -cover of Γ .

If we take all twelve pentagons as \mathcal{C}' in Γ , it is \mathcal{C}' -simply connected.

For each vertex x of Γ , $\Gamma_2(x)$ forms a hexagon. Hence there are ten hexagons. None of the lifts of these hexagons are closed, and hence π is not a \mathcal{C}'' -cover, with respect to the set \mathcal{C}'' of these hexagons. The so-called double cover of the Petersen graph is a universal \mathcal{C}'' -cover of Γ .



$$\begin{aligned} \mathcal{C} = \{ & (A, B, C, D, E, A), (A, B, G, I, F, A), (B, C, H, J, G, B), \\ & (C, D, I, F, H, C), (D, E, J, G, I, D), (E, A, F, H, J, E)\}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{C}_1 = \text{all pentagons} \quad \mathcal{C}_2 = \text{all hexagons of the Petersen}$$

7 Concluding Remarks

We conclude this article by giving open problems.

1. Let Γ be a DRG and \mathcal{C} the collection of closed walks of length $g(\Gamma)$. Is the universal cover finite?
2. Let Γ be a DRG and \mathcal{C} the collection of closed reduced paths of length $gg(\Gamma) \geq 4$. Is the universal cover finite? Here, $gg(\Gamma)$ is the geometric girth of Γ , which is the length of a shortest closed reduced path.
3. Determine all \mathcal{C} -simply connected DSRGs Γ of known type, when \mathcal{C} is the collection of all shortest closed walks in Γ . *Classical parameters?*
4. Assuming the local structure of $\Gamma_m^*(x)$ for all x containing \mathcal{C} , determine the structure of the universal cover.
5. For a given \mathcal{C} -simply connected DSRG $\hat{\Gamma}$, study the image graphs covered by $\hat{\Gamma}$. *Designs and codes?*
6. Let $\pi : \hat{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ is a \mathcal{C} -covering. Study the correspondences of the irreducible $\hat{\mathcal{T}}(\hat{x})$ modules of $\hat{\Gamma}$ and the irreducible $\mathcal{T}(x)$ modules of Γ .

References

- [1] M. Aschbacher and Y. Segev, Extending morphisms of groups and graphs, *Ann. Math.*, 10 (1992), 297–323.
- [2] J. Bamberg, A. Devillers, J.B. Fawcett, C.E. Praeger, Locally triangular graphs and rectagraphs with symmetry. *J. Combin. Theory Ser. A* 133 (2015), 1–28.
- [3] J.B. Fawcett, Locally triangular graphs and normal quotients of the n -cube, *J. Algebraic Combin.* 44 (2016), 119–130.
- [4] E.E. Shult, *Points and Lines, Characterizing the Classical Geometries*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011.
- [5] H. Suzuki, Distance-regular graphs of large diameter that are completely regular clique graphs, preprint, 2016.
- [6] H. Suzuki, Coverings and homotopy of a graph, preprint, 2017.
- [7] S. Rees and L.H. Soicher, An algorithmic approach to fundamental groups and covers of combinatorial cell complexes, *J. Symbolic Computation* 29 (2000), 59–77.

A construction of the Co3 two-graph from the Hoffman-Singleton graph

小林 雄介 (千葉大学大学院融合理工学府)

1 はじめに

本稿では、散在型単純群のひとつである Co3 を自己同型群にもつ 276 点上の regular two-graph を Hoffman-Singleton graph の構造を用いて構成する方法について述べる。

この regular two-graph の構成法としては Conway 群と深い関わりのある Leech 格子によるものが一番よく知られている。詳しくは例えば [4] を参照してもらいたい。Co3 はこの two-graph に対して 2 重可移に作用していて、その 1 点の固定部分群から McL:2 (McL は散在型単純群) が得られることもよく知られている。McL:2 は Co3 の極大部分群のひとつである。今回の話では Co3 の極大部分群のひとつである $U_3(5) : S_3$ に注目する。 $U_3(5) : S_3$ によってこの 276 点の two-graph は 150 点と 126 点の 2 つの軌道に分解される。

続いて Hoffman-Singleton graph について紹介する。以下, HoS と略させてもらう。HoS はパラメーターが (50, 7, 0, 1) の強正則グラフであり、そのパラメーターから構造が一意的に決まる。HoS は内周 5 のムーアグラフでもあり、グラフ理論の観点から見ても非常に多くの良い性質を持ったグラフである。

HoS の自己同型群は $U_3(5) : 2$ であり、先程の Co3 の極大部分群 $U_3(5) : S_3$ とかなり近い形をしている。これが今回の話を考えるきっかけである。つまり、HoS の構造を利用して何か 150 点と 126 点の数学的対象を構成し、さらにその 2 つを組み合わせると Co3 two-graph を構成できないかと考えたのである。もしもこの構想がうまくいったとすると、その 150 点と 126 点の数学的対象は $U_3(5) : S_3$ を自己同型群として持ち、その構造を保ったまま Co3 two-graph を構成したことになる。したがって、 $Co3 \supset U_3(5) : S_3$ という非自明な包含関係の計算機に頼らない証明を与えたことにもなり、群論の立場から見ても嬉しい結果となる。

HoS には 15coclique が 100 個存在し、その 100 個からさらに 2 つの HoS の構造を見出すことができる。もとの HoS とその 2 つの新たな HoS を合体させてできる 150 点のグラフが今回探していた 150 点の数学的対象である。また HoS の 50 点の 25 点と 25 点の分割でそれぞれの部分グラフが 5 個の五角形になるような分割が全部で 126 通りある。この HoS の 25+25 分割を先程の 150 点グラフに拡張したものが 126 点の数学的対象となる。

本稿では、まず第 2 節で用語の定義をし、さらに HoS の具体的な構成をひとつ与える。第 3 節では HoS の 15coclique について説明し、そこから 150 点グラフの構成を与える。第 4 節では HoS の 25+25 分割とそれらの 150 点グラフへの拡張について述べる。最後に第 5 節で 150+126 点上の 3 点ブロックを定めて、Co3 two-graph を構成する。

2 準備

まず two-graph の定義を与える. 本稿では two-graph の話に深く踏み込むことはないが詳しくは [1] を参照してほしい.

定義 2.1. X を有限集合とし, \mathcal{B} を X のある 3 点部分集合の族 (これをブロックの集合と呼ぶ) とする. X の任意の 4 点部分集合が \mathcal{B} の元を偶数個含むとき, 組 (X, \mathcal{B}) を **two-graph** という. さらに, X の任意の 2 点部分集合に対して, それらを含む \mathcal{B} の元の個数が点の取り方によらず一定であるとき, $\text{two-graph}(X, \mathcal{B})$ は **regular** であるという.

どんなグラフからも次のようにして自然に two-graph が得られる.

例 2.2. 頂点集合を X とするグラフにおいて 3 点ブロックの集合 \mathcal{B} を

$$\{x, y, z\} \in \mathcal{B} \iff \text{部分グラフ } \{x, y, z\} \text{ の辺の本数が奇数}$$

として定める. このとき (X, \mathcal{B}) は two-graph になる. これは 4 点のグラフをひとつひとつ調べることで簡単に確かめることができる.

次に HoS の構成法をひとつ与える. HoS の構成法はいくつか知られているが, 今回紹介する構成法は第 4 節に登場する 25+25 分割を意識したものであり, また第 3 節で見えるように全ての 15coclique を具体的にパラメータ表示できるというメリットがある. 本稿における HoS の取り扱いについての大部分は [3] を参照してもらいたい.

定義 2.3. 頂点集合を $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ とするグラフで辺を次のように定める.

$$\begin{aligned} (0, x, y) &\bullet\text{---}\bullet (0, x, y') \iff y - y' = \pm 1; \\ (1, m, c) &\bullet\text{---}\bullet (1, m, c') \iff c - c' = \pm 2; \\ (0, x, y) &\bullet\text{---}\bullet (1, m, c) \iff y = mx + c. \end{aligned}$$

このときこのグラフは HoS になる.

$(0, x, y)$ は \mathbb{Z}_5 上のアフィン平面の点 (x, y) , $(1, m, c)$ は \mathbb{Z}_5 上のアフィン平面の直線 $y = mx + c$ だとイメージしてもらいたい.

3 HoS の 15-coclique

以下, Γ を HoS と同型なグラフとする.

グラフにおいてどの 2 点も辺で結ばれていない部分グラフのことを **coclique** という. Γ には頂点数が 15 の coclique が 100 個存在する. 先程の定義 2.3 の記号を用いると次のように表せる:

$a, b, A, B, e, f, E, F \in \mathbb{Z}_5$ に対して,

$$\begin{aligned}
P(a, b) &= \{(0, x, (x - a)^2 + b) \mid x \in \mathbb{Z}_5\} \cup \{(1, m, m^2 - ma + b \pm 2) \mid m \in \mathbb{Z}_5\}, \\
Q(A, B) &= \{(1, m, 2(m - A)^2 + B) \mid m \in \mathbb{Z}_5\} \cup \{(0, x, 3x^2 + Ax + B \pm 1) \mid x \in \mathbb{Z}_5\}, \\
P'(e, f) &= \{(0, x, -(x - e)^2 + f) \mid x \in \mathbb{Z}_5\} \cup \{(1, m, -m^2 - me + f \pm 2) \mid m \in \mathbb{Z}_5\}, \\
Q'(E, F) &= \{(1, m, 3(m + E)^2 - F) \mid m \in \mathbb{Z}_5\} \cup \{(0, x, 2x^2 - Ex - F \pm 1) \mid x \in \mathbb{Z}_5\}.
\end{aligned}$$

15coclique のこのパラメーター表示については [3] を参照してもらいたい. この 100 個の 15coclique は $U_3(5)$ -orbit のもとで次のように 50 個ずつの集合 C^+, C^- に分かれる:

$$\begin{aligned}
C^+ &= \{P(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}_5\} \cup \{Q(A, B) \mid A, B \in \mathbb{Z}_5\}, \\
C^- &= \{P'(e, f) \mid e, f \in \mathbb{Z}_5\} \cup \{Q'(E, F) \mid E, F \in \mathbb{Z}_5\}.
\end{aligned}$$

尚, $\text{Aut}(\text{HoS}) \simeq U_3(5) : 2$ はこれら 100 個の 15coclique に可移に作用している. 以下, $\epsilon = +$ or $-$ とする. まず, 上のパラメーター表示より Γ の各点は 15 個の C^ϵ の元に含まれていることが分かる.

次の補題 3.1 は 15coclique どうしの関係とさらに C^ϵ から HoS の構造を見いだせることを主張しており, 今回の話の key となるものである.

補題 3.1. $P, Q \in C^\epsilon, R \in C^{-\epsilon}$ とする. このとき

$$|P \cap Q| \in \{0, 5\}, |P \cap R| \in \{3, 8\}$$

である. さらに C^ϵ を頂点集合とするグラフで辺を

$$P \bullet \text{---} \bullet Q \iff |P \cap Q| = 0$$

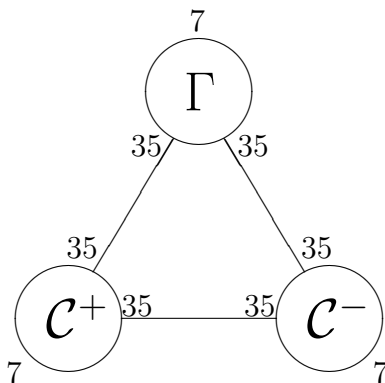
として定めると, $C^\epsilon \simeq \text{HoS}$ となる.

ここからは C^ϵ には HoS の構造が入っているものとして扱う. 次の補題 3.2 で Γ, C^+, C^- を合体させて目的の 150 点の構造を得る.

補題 3.2. Γ, C^+, C^- を 3 つの HoS とする. $x \in \Gamma, P \in C^\epsilon, R \in C^{-\epsilon}$ に対して,

$$\begin{aligned}
x \bullet \text{---} \bullet P &\iff x \notin P, \\
P \bullet \text{---} \bullet R &\iff |P \cap R| = 3
\end{aligned}$$

として辺を付け加えてできる 150 点のグラフを T とする. このとき T は隣接数 $7 + 35 + 35$ の正則グラフになる.



また, $\text{Aut}(T) \simeq \text{U}_3(5) : \text{S}_3$ で $\text{Aut}(T)$ は Γ, C^+, C^- に対して S_3 で作用する.

補題 3.2 より, グラフ T 中の Γ, C^+, C^- たちを平等に扱ってよいということになる. したがってこれからは T の 3 つの HoS のうちどれが基準になっていたかはあまり気にしないことにする.

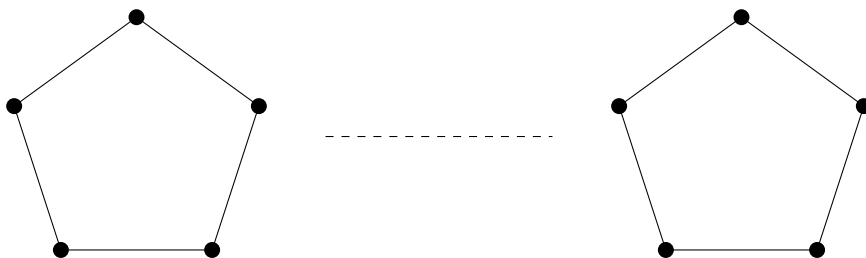
最後に, HoS の頂点と 15coclique たちのグラフ T における関係をパラメーターを使って全て述べておく.

$x, y, m, c, a, b, A, B, e, f, E, F \in \mathbb{Z}_5$ とする.

$$\begin{array}{llll}
(0, x, y) \bullet \text{---} \bullet & (0, x, y') \iff & y - y' = \pm 1; \\
(1, m, c) \bullet \text{---} \bullet & (1, m, c') \iff & c - c' = \pm 2; \\
Q(A, B) \bullet \text{---} \bullet & Q(A, B') \iff & B - B' = \pm 1; \\
P(a, b) \bullet \text{---} \bullet & P(a, b') \iff & b - b' = \pm 2; \\
Q'(E, F) \bullet \text{---} \bullet & Q'(E, F') \iff & F - F' = \pm 1; \\
P'(e, f) \bullet \text{---} \bullet & P'(e, f') \iff & f - f' = \pm 2; \\
(0, x, y) \bullet \text{---} \bullet & (1, m, c) \iff & y = mx + c; \\
P(a, b) \bullet \text{---} \bullet & Q(A, B) \iff & B = 2A^2 + 3aA - a^2 + b; \\
P'(e, f) \bullet \text{---} \bullet & Q'(E, F) \iff & f = -e^2 - 2eE - F + 2E^2; \\
(0, x, y) \bullet \text{---} \bullet & P(a, b) \iff & y \neq (x - a)^2 + b; \\
(0, x, y) \bullet \text{---} \bullet & Q(A, B) \iff & y \neq 3x^2 + Ax + B \pm 1; \\
(0, x, y) \bullet \text{---} \bullet & P'(e, f) \iff & y \neq -(x - e)^2 + f; \\
(0, x, y) \bullet \text{---} \bullet & Q'(E, F) \iff & y \neq 2x^2 - Ex - F \pm 1; \\
(1, m, c) \bullet \text{---} \bullet & P(a, b) \iff & c \neq m^2 - am + b \pm 2; \\
(1, m, c) \bullet \text{---} \bullet & Q(A, B) \iff & c \neq 2(m - A)^2 + B; \\
(1, m, c) \bullet \text{---} \bullet & P'(e, f) \iff & c \neq -m^2 - me + f \pm 2; \\
(1, m, c) \bullet \text{---} \bullet & Q'(E, F) \iff & c \neq 3(m + E)^2 - F; \\
P(a, b) \bullet \text{---} \bullet & P'(e, f) \iff & (e - a)^2 + 2(b - f) \neq \pm 1; \\
P(a, b) \bullet \text{---} \bullet & Q'(E, F) \iff & b \neq E^2 + Ea - 2a^2 - F; \\
Q(A, B) \bullet \text{---} \bullet & P'(e, f) \iff & B \neq A^2 + Ae + f - 2e^2; \\
Q(A, B) \bullet \text{---} \bullet & Q'(E, F) \iff & (E + A)^2 + B + F \neq \pm 1;
\end{array}$$

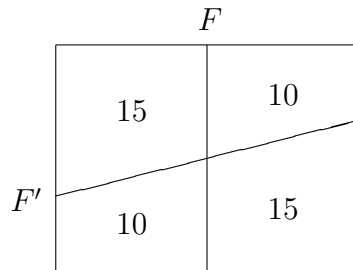
4 HoS の 25+25 分割

定義 2.3 において部分グラフ $V_0 = \{(0, x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}_5\}$ と $V_1 = \{(1, m, c) \mid m, c \in \mathbb{Z}_5\}$ はそれぞれ 5 個の五角形となっている.

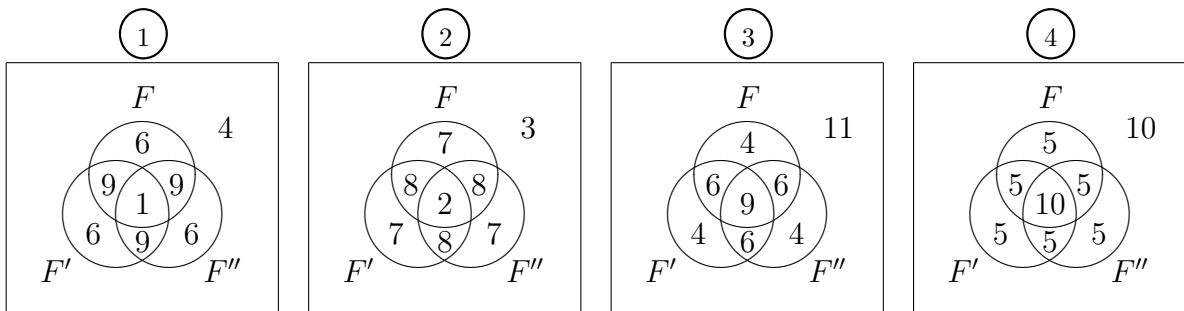


この $\{V_0, V_1\}$ のような HoS の $25 + 25$ 分割が全部で 126 個存在する. これは HoS の中に五角形が 1260 個 (パラメーターが $(50, 7, 0, 1)$ の強正則グラフであることから計算できる) あることと, 各五角形からそれを含む $25 + 25$ 分割が一意に定まることから導きだせる. $25 + 25$ 分割全体の集合を \mathcal{F} とする. $\text{Aut}(\text{HoS})$ は \mathcal{F} に 2 重可移に作用している.

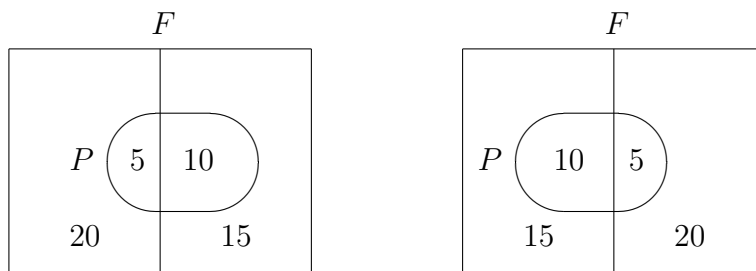
分割たちの関係を見ていく. $F, F' \in \mathcal{F}$ によって HoS は 4 分割されるが, $\text{Aut}(\text{HoS})$ の \mathcal{F} に対する 2 重可移性よりその分割のされ方は一意的で次のようになっている:



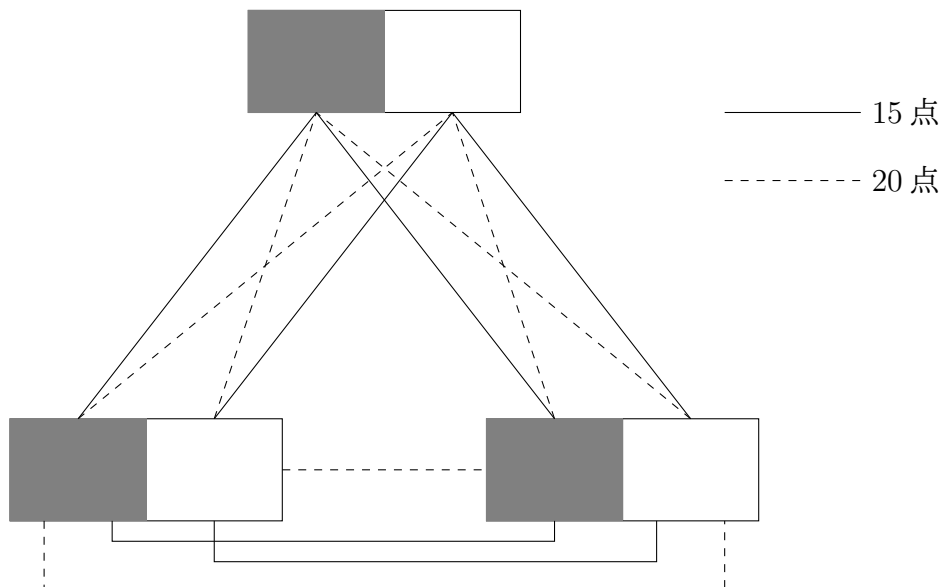
また, $F, F', F'' \in \mathcal{F}$ による HoS の 8 分割では次の 4 つの場合が起こる:



続いて分割 $F \in \mathcal{F}$ をひとつ固定し 15coclique との関係性を調べる. このとき第 3 節の 15coclique のパラメーター表示より



となる $P \in \mathcal{C}^e$ がそれぞれ 25 個あることがわかる. \mathcal{C}^e に HoS の構造が入っていると考えると, これは \mathcal{C}^e の $25 + 25$ 分割を与えたことになる. このことから補題 3.2 のグラフ T において 3 つの HoS のうち, どれか 1 つの $25 + 25$ 分割から他の 2 つの HoS の $25 + 25$ 分割が誘導されることが分かる. したがって, 3 つの HoS の各 $25 + 25$ 分割が一対一に対応している. 下の図でその様子をまとめている.



ここで、実線でつながったマス仲間どうしだと思ふことにすると、3つの分割の片側たちを2つのグループ(空欄と灰色)に分けることができる(点線の方ではうまくいかないことに注意). こうして、3つの分割の片側たちを自然に対応づけることができた.

5 Co3 two-graph の構成

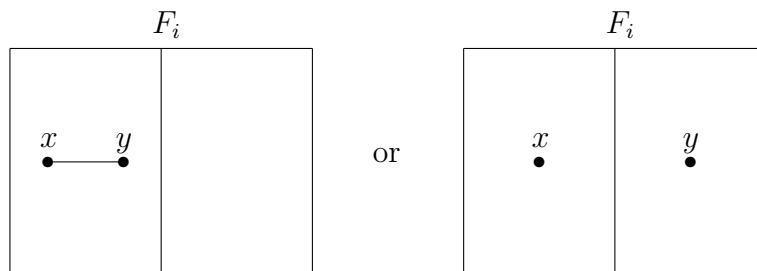
3つの HoS $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ から補題 3.2 のように 150 点グラフ T ができているとする. ここまでは \mathcal{F} を HoS の 25 + 25 分割として定義していたが, 第 4 節で T の 3 つの HoS の分割たちが一対一に対応していることを見たので, それを踏まえて次のように定義しなおす.

$$\mathcal{F} = \{F = \{F_1, F_2, F_3\} \mid F_i \text{ は } \Gamma_i \text{ の } 25 + 25 \text{ 分割で, } F_1, F_2, F_3 \text{ は対応している}\}$$

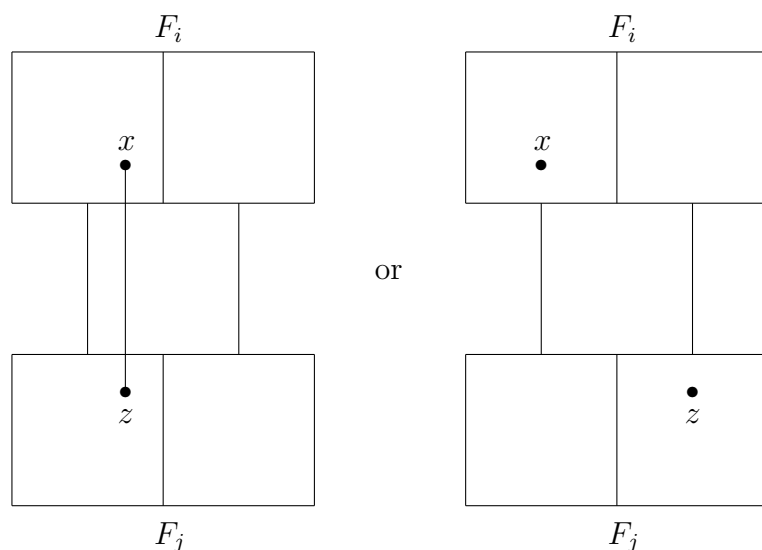
これから $T \cup \mathcal{F}$ 上の 3 点ブロックの集合 \mathcal{B} を定めていく.

以下, $x, y \in \Gamma_i, z \in \Gamma_j (i \neq j), F, F', F'' \in \mathcal{F}$ とする.

- グラフ T 上のブロックは例 2.2 と同様に定める.
- $\{F, F', F''\} \in \mathcal{B}$
 \iff 各 $i = 1, 2, 3$ に対して, F_i, F'_i, F''_i による Γ_i の 8 分割が ① か ② になる.
- $\{x, y, F\} \in \mathcal{B}$
 $\iff T$ において下図のようになる:

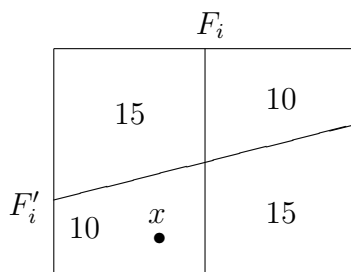


- $\{x, z, F\} \in \mathcal{B}$
 $\iff T$ において下図のようになる:



ただし, F_i と F_j を結ぶ 2 本の縦線は第 4 節の最後に述べた分割の片側対応を意味している.

- $\{x, F, F'\} \in \mathcal{B}$
 \iff



これですべてのブロックを定めた. 最後に今回の主結果を述べる.

定理 5.1. $(T \cup \mathcal{F}, \mathcal{B})$ は Co3 two-graph である.

実際に $(T \cup \mathcal{F}, \mathcal{B})$ が regular two-graph であることを確かめる. そして [2] の結果で 276 点上の regular two-graph の一意性が示されているので, そこから $(T \cup \mathcal{F}, \mathcal{B})$ が Co3 two-graph だと結論づけることができる.

参考文献

- [1] Cameron, P. J. and van Lint, J. H. (1991), *Designs, Graphs, Codes and Their Links*, Cambridge University Press, New York.
- [2] J. M. Goethals and J. J. Seidel, The regular two-graph on 276 vertices, *Discrete Math.* 12(1975), 143-158.
- [3] P. R. Hafner, On the graphs of Hoffman-Singleton and Higman-Sims, *Electron. J. Combin.* 11(1) 33, Research Paper 77 (2004).
- [4] Robert A. Wilson, *The Finite Simple Groups*, Springer, Graduate Mathematics series 251 (2009).

Ambient space が最大となる bilinear DHO

吉荒 聡 (S. Yoshiara)
東京女子大学現代教養学部 数理科学科

2017 年 8 月 5 日提出

1 概要

生成空間の次元が最大となる bilinear DHO の分類結果と証明の流れを紹介する. 6 月 17 日 (金) の講演用の原稿をほぼ忠実に再現した.

2 定義と未解決問題

2.1 定義 (DA と DHO)

定義 1 有限体 \mathbb{F}_q 上のベクトル空間 U の n -次元部分空間の集まり \mathcal{A} が, U を生成空間 (*ambient space*) とする \mathbb{F}_q 上階数 (*rank*) n の双対弧 (*dual arc*) (n -DA/ \mathbb{F}_q in U と略記) とは, \mathcal{A} のどの相異なる 3 つのメンバー X, Y, Z を取っても,

(DA1) $\dim(X \cap Y) = 1$ かつ

(DA2) $X \cap Y \cap Z = \{0\}$ であり, かつ

\mathcal{A} のメンバーすべての和空間が U であること.

簡単な事実 次がすぐ示せる.

\mathcal{A} が n -DA/ \mathbb{F}_q ならば $|\mathcal{A}| \leq 1 + ((q^n - 1)/(q - 1))$.

定義 2 上の不等式で等号が成立するとき \mathcal{A} を (高次元) 双対超卵型 (*dual hyperoval*, DHO と略記) という.

n -DHO/ \mathbb{F}_2 は 2^n 個のメンバーから成る.

DHO 研究の歩み

- ・ Circle geometry (二重可移群の幾何) の表現が DA.
- ・ 射影平面上の arc や hyperoval の, 代数的位相幾何学的手法 (被覆など) を適用できる枠組みへの一般化.
- ・ 二重可移 DHO の分類 (Huybrechts-Pasini, Yo, Dempwolff).
- ・ 種々の例の構成, 自己同型群, 被覆の計算 (Taniguchi etc.).
- ・ 双線形 DHO (translation 群を持つ DHO) の概念の確立 (Edel-Dempwolff 2012).
- ・ 普遍被覆の存在証明 (Dempwolff 2014).
- ・ 「Huybrechts DHO の剰余 \equiv alternating 双線形 DHO \equiv quadratic APN 関数の作る DHO」の認識とその応用 (Yo).

2.2 基本的結果に関連する未解決問題

n -DHO/ \mathbb{F}_q の存在と q のパリティ

q が偶数 ($q = 2^m$) の場合には, すべての自然数 n に対して, n -DHO/ \mathbb{F}_q の存在が知られている.

任意の素数べき q に対して, $|\mathcal{A}| = (q^n - 1)/(q - 1)$ を満たす n -DA/ \mathbb{F}_q の存在が知られている (Veronesean DA).

未解決問題 1

n -DHO/ \mathbb{F}_q が存在するならば q は 2 のべきか?

生成空間に関する基本的結果

命題 1 (Yo2004)

\mathcal{A} : n -DA/ \mathbb{F}_q in U , $|\mathcal{A}| = (q^n - 1)/(q - 1)$, が存在するならば,

$q \neq 2$ のとき $2n - 1 \leq \dim(U) \leq n(n + 1)/2$,

$q = 2$ のとき $2n - 1 \leq \dim(U) \leq (n(n + 1)/2) + 2$.

$q \neq 2$ ならば上の結果は best possible (Veronesean DA の存在から).

未解決問題 2

「 n -DHO/ \mathbb{F}_2 in U が存在すれば $\dim(U) \leq n(n + 1)/2$ 」を示せ.

2.3 生成空間が大きい DHO

生成空間の次元が $n(n+1)/2$ であるような n -DHO/ \mathbb{F}_q として知られているのは次の 4 つ.

- Huybrechts DHO $\mathcal{H}_n(2)$ (n -DHO/ \mathbb{F}_2 , 双線形),
- Buratti-Del Fra DHO $\mathcal{D}_n(2)$ (n -DHO/ \mathbb{F}_2 , 双線形),
- Veronesean DHO $\mathcal{V}_n(2^m)$ (n -DHO/ \mathbb{F}_{2^m} , 双線形でない),
- Taniguchi DHO $\mathcal{T}_n(2)$ (n -DHO/ \mathbb{F}_2 , 双線形でない. $\mathcal{V}_n(2)$ の変形.)

未解決問題 3

生成空間の次元が $n(n+1)/2$ であるような n -DHO/ \mathbb{F}_q は分類できるか?

3 双線形 DHO と kernel 写像

双線形 DHO

定義 3 X, Y を二元体上のベクトル空間, $\dim(X) = n$,

$\beta: X \times X \rightarrow Y$ を双線形写像とする.

$e \in X$ に対する線形写像 $X \ni x \mapsto (x, e)\beta \in Y$ を $\beta(e)$ と記し (特に $(0)\beta = 0$), $X \oplus Y$ の部分空間 $X(e)$ ($e \in X$) を次式で定める:

$$X(e) := \{(x, (x)\beta(e)) \mid x \in X\}.$$

$\mathcal{S}_\beta := \{X(e) \mid X \in e \in X\}$ が $U = X \oplus Y$ を生成空間とする (\mathbb{F}_2 上の) n -DHO であるとき, \mathcal{S}_β を (双線形写像 β が与える) 双線形 DHO と呼ぶ.

双線形 DHO は二元体上でのみ定義される.

Kernel 写像 $\kappa \quad \beta : X \times X \rightarrow Y$ を双線形写像とする. DA の条件 (DA1), (DA2) と条件 $U = X \oplus Y$ は次の条件 (1), (2), (3) に対応する.

\mathcal{S}_β が DHO \iff 次の (1)–(3) がすべて成立する.

- (1) $\forall e \in X^\# := X \setminus \{0\}, \quad \dim \text{Ker}(\beta(e)) = 1.$
- (2) $e \in X^\#$ に対して $\text{Ker}(\beta(e))$ のただ一つの非ゼロベクトルを $(e)\kappa$ と記す. ((1) に注意.) 形式的に $(0)\kappa = 0$ とする.
このとき, 写像 $\kappa : X \rightarrow X$ は全単射である.
- (3) $Y = \langle \text{Im}(\beta(e)) \mid e \in X \rangle.$

κ を **kernel 写像** と呼ぶ.

例: Huybrechts DHO $X := \mathbb{F}_{2^n}, (e_i)_{i=1}^n: X$ の \mathbb{F}_2 上の基底.
 $Y := S^2(X)/W$, ここで $S^2(X)$ は X と X の対称テンソル積,
 $W := \langle e_i \otimes e_i \mid i = 1, \dots, n \rangle$ とするとき, (すなわち $Y = X \wedge X$)
 \mathbb{F}_2 -双線形写像 $\beta : (x, e) \mapsto x \wedge e = x \otimes e + W$ に対し
 $\mathcal{H}_n(2) := \mathcal{S}_\beta$ は生成空間 $U = X \oplus Y$ 中の n -双線形 DHO.

kernel 写像は $(e)\kappa = e \ (\forall e \in X).$

例: Buratti-Del Fra DHO $X := \mathbb{F}_{2^n}$, basis $(e_i)_{i=1}^n$ over \mathbb{F}_2 .
 $Y := S^2(X)/W$, ここで $S^2(X)$ は X と X の対称テンソル積,
 $W := \langle e_1 \otimes e_1, (e_1 + e_i) \otimes e_i \mid i = 2, \dots, n \rangle$ とするとき,
 \mathbb{F}_2 -双線形写像 $\beta : (x, e) \mapsto x \otimes e + W$ に対して
 $\mathcal{D}_n(2) := \mathcal{S}_\beta$ は生成空間 $U = X \oplus Y$ 中の n -双線形 DHO.

kernel 写像 κ は $(0)\kappa = 0, (e_1)\kappa = e_1,$
 $(e)\kappa = e_1 + e \ (e \in X \setminus \{0, e_1\}).$

DHO はつねに分裂するか 双線形 DHO \mathcal{S} の生成空間は $U = X(e) \oplus Y$ ($\forall X(e) \in \mathcal{S}$) という形であるが, この形の生成空間を持つ DHO を**分裂 DHO** と呼ぶ.

分裂 DHO は, (DA1),(DA2) に対応する条件を満たす線形写像族 $\{\beta(e) \mid e \in X(0)\}$ (**DHO-set**) により, \mathcal{S}_β と似た形 $\{X(e) \mid e \in X\}, X(e) := \{(x, (x)\beta(e)) \mid e \in X\}$ に表示できる.

分裂 DHO でない DHO の例は知られていない. すなわち既知の DHO はこの形の表示を持つ.

すべての DHO は 分裂 DHO か？

双線形 DHO の内在的意味 双線形 DHO はある形の自己同型群 (translation 群) を持つような DHO として特徴づけられる.

命題 2 (双線形 DHO の特徴づけ) [Dempwolff-Edel 2012]

S が双線形 DHO in $U \Leftrightarrow \text{Aut}(S)$ の部分群 T で, S 上正則に作用し, かつ, 任意の $X \in S$ が $C_U(T) \cap X = \{0\}$ を満たすようなものが存在.

双線形 DHO のクラスでは, 双線形形式の型に応じて様々な理論を展開することが可能である.

4 主結果と証明の大筋

主結果

定理 1 双線形 n -DHO S in U に対し, 次が成立する:

(i) $\dim(U) \leq n(n+1)/2$.

(ii) $\dim(U) = n(n+1)/2 \iff$

S は Huybrechts DHO または Buratti-Del Fra DHO に同型.

従って, 未解決問題 2,3 は双線形 DHO のクラスでは解決された. (i) はかなり前から得ていた結果であり, 証明も易しい. 一方, (ii) は意外な気もする結果である. この結果を含む論文は, 講演を申し込んだ時点では審査中であつたが, その後次の形で公刊された.

Bilinear dual hyperovals in the largest ambient spaces,

Yoshiara, to appear in J.Alg.Combin.

DOI 10.1007/s10801-017-0763-5

(Received: 17 March 2017 / Accepted: 27 April 2017)

審査員からは, “This paper is a gem and it features two beautiful, important results.” という非常に好意的な評価が頂けた. 論文の読みやすさに関しては, 次のようにコメントされた. “The whole text is completely transparent and one can follow it largely without using paper and pencil.”

以下, 証明の流れを紹介する. 詳細に関して興味を持たれた方は, 上掲の論文を参照されたい.

双線形 DHO の生成空間の次元の制限 $\mathcal{S} = \{X(e) \mid e \in X\}$ を双線形 n -DHO in U とする.

X の基底 $(e_i)_{i=1}^n$ を固定し, $1 \leq m \leq n$ に対する U の部分空間 $U_m := \langle X(0), X(e_1), \dots, X(e_m) \rangle$ を考える.

補題 1 (1) e が e_1, \dots, e_m の一次結合ならば $X(e) \subseteq U_m$.

(2) f が e_1, \dots, e_m の一次結合でないならば $\dim(U_m \cap X(f)) \geq m + 1$.

Lemma 1 (2) から $U_{n-1} \cap X(e_n) = X(e_n)$; $X(e_n) \subseteq U_{n-1}$.

Lemma 1 (1) とあわせて $U = U_n = U_{n-1}$.

$U_m = \langle U_{m-1}, X(e_m) \rangle$ であるから, Lemma 1(2) より

$$\begin{aligned} \dim(U_m) &= \dim(U_{m-1}) + \dim(X(e_m)) - \dim(U_{m-1} \cap X(e_m)) \\ &\leq \dim(U_{m-1}) + (n - m). \end{aligned}$$

これを $m = 2, \dots, n$ に対して加え合わせれば, $\dim(U_1) = 2n - 1$ とあわせて $\dim(U) \leq n(n+1)/2$ を得る.

また $\dim(U) = n(n+1)/2 \iff \dim(U_{m-1} \cap X(e_m)) = m \ (\forall m = 2, \dots, n)$. ($U_0 := X(0)$).

双線形 n -DHO in U , $\dim(U) = n(n+1)/2$ の分類の方針 \mathcal{S} を, 双線形写像 $\beta : X \times X \rightarrow Y$ が与える双線形 DHO とする. この kernel 関数 κ がどの程度線形写像に近いかを測り, κ そして β を決めていくことが根本方針. 写像 κ の定義を復習する:

$$((e)\kappa)\beta(e) = 0; X(e) \cap X(0) = \langle ((e)\kappa, 0) \rangle \ (e \in X^\sharp).$$

集合 $I(e)$ と I 次の X の部分集合を定義することがアイデアである.

定義 4 各 $e \in X^\sharp$ に対し,

$I(e) := \{x \in X \mid (e+x)\kappa = (e)\kappa + (x)\kappa\}$ ($e \in X^\sharp$) とし,

$I := \{e \in X^\sharp \mid I(e) = X\} \cup \{0\}$ とおく.

$0, e \in I(e) \ (\forall e \in X^\sharp)$.

$I = X \iff \kappa$ は X 上の線形写像.

$I(e)$, I の性質 次の性質 (*) が出発点となる:
 $\dim(U) = n(n+1)/2 \implies \dim(U_2 \cap X(e_3)) = 3 \iff$

(*) 線形独立な $a, b, c \in X$ に対して $\langle X(a), X(b), X(c) \rangle \cap X(0)$ は 3 次元空間.

Lemma 1(1) から $X(a+b+c) \subseteq \langle X(a), X(b), X(c) \rangle$.
 そこで $\langle X(a), X(b), X(c) \rangle \cap X(0)$ は
 $X(e) \cap X(0) = \langle (e)\kappa, 0 \rangle$ ($e = a+b+c, a, b, c$) を含む. (*) より
 $(a+b+c)\kappa, (a)\kappa, (b)\kappa, (c)\kappa$ は線形独立ではない.
 以下の性質を順に示していく. $a \in X^\sharp$ とする.

L4 $b, c \in I(a)$ に対して a, b, c が線形独立ならば,
 $\exists \alpha \in \mathbb{F}_2$ s.t. $(a+b+c)\kappa = \alpha(a)\kappa + (b)\kappa + (c)\kappa$.

L5 $I(a)$ は a を含む X の部分空間.

L7 $\dim(I(a)) \geq 3$ ならば $I(a) = X$.

多少手間がかかるのが次の性質の証明.

P1(i) ある $a \in X^\sharp$ に対して $\dim(I(a)) \geq 2$.

P1(ii) $I \neq \{0\}$.

L9 $I \neq X$ ならば $\dim(I) = 1$.

これらの準備の下で, 証明が次のように完成する.

$I = X$ のとき このとき $\lambda := \kappa$ は線形写像. 従って $\bar{\lambda}: (x, y) \mapsto ((x)\lambda^{-1}, y)$ は $U = X \oplus Y$ 上の線形全単射で $X(e)\bar{\lambda} = \{(x, (x)\lambda\beta(e)) \mid x \in X\}$; $(\mathcal{S})\bar{\lambda}$ は双線形写像 $\gamma: (x, e) \mapsto (x)\lambda\beta(e)$ が定める双線形 DHO.

Kernel 写像の定義から $(e)\gamma(e) = (e)\kappa\beta(e) = 0$; γ は交代形式.

そこで $\rho: X \wedge X \rightarrow Y$ で $(x \wedge e)\rho = (x)\gamma(e)$ を満たすものが存在.

次元を比べて ρ は線形全単射.

そこで $U = X \oplus Y$ 上の全単射線形写像 $\bar{\rho}: (x, y) \mapsto (x, (y)\rho^{-1})$ に対し $X(e)\bar{\lambda}\bar{\rho} = \{(x, x \wedge e) \mid x \in X\}$ であり,

$\bar{\lambda}\bar{\rho}$ は \mathcal{S} と Huybrechts DHO $\mathcal{H}_n(2)$ の同型を与える.

$I \neq X$ のとき 性質 L9 から $I = \{0, e_1\}$. e_1 を含む X の基底 $(e_i)_{i=1}^n$ を固定する.

$e_1 \mapsto (e_1)\kappa, e_i \mapsto (e_1)\kappa + (e_i)\kappa$ を満たす X 上の線形写像 λ は, 全単射であることが示せる. ($x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ($x_i \in \mathbb{F}_2$) ならば, $(x)\kappa - \sum_{i=2}^n x_i (e_i)\kappa = 0$ or $(e_1)\kappa$ (論文では Lemma 10 として示される) を使う.) $\bar{\lambda}: (x, y) \mapsto ((x)\lambda^{-1}, y)$ とすると, $(S)\bar{\lambda}$ は双線形写像 $\gamma: (x, e) \mapsto (x)\lambda\beta(e)$ の定める DHO.

双線形写像 γ は対称で, $(e_1)\gamma(e_1) = 0, (e_1 + e_i)\gamma(e_i) = 0$ ($i = 2, \dots, n$) が示せる. 従って, $\mathcal{D}_n(2)$ の定義における $S^2(X)/W$ から Y への線形全射 ρ で $(x \otimes e + W)\rho = (x)\gamma(e)$ を満たすものが存在. 次元を比べて ρ は全単射.

$\bar{\rho}: (x, y) \mapsto (x, (y)\rho^{-1})$ を取ると, $\bar{\lambda}\bar{\rho}$ が S と Buratti-Del Fra DHO $\mathcal{D}_n(2)$ の同型を与える.