花木様

《科学研究費補助金(総合研究A)研究集会報告集》

第10回代数的組合せ論シンポジウム報告集

1992年6月29日～7月1日

於　岐阜大学

まえがき

この報告集は、１９９２年６月２９日より７月１日までの３日間、岐阜大学教養部においておこなわれた「第１０回代数的組合せ論シンポジウム」の講演記録です。

集会は約１１０名の参加者を得て盛会でした。プログラムは代数的組合せ論の関連分野の講演を重視して作成しました。また、１９９１年４月に亡くなられた、日本における組合せ論研究の先駆者である山本幸一氏の仕事を解説する講演も、新しい試みとしてお願いしました。他に、都筑俊郎先生にも講演をお願いし、引き受ていただけたのですが、健康上の理由で出席していただけなくなり、残念でした。（１９９３年1月２０日の北大の最終講義でお話いただけることを期待しています。）

講演者の旅費等について、科研費総合Ａ（研究代表者：森田康夫　東北大教授）の援助をいただきましたことを御礼申し上げます。

私の怠慢から、報告集の出版の遅れたこと、（原稿の催促を怠ったこともあって）いくつかの講演の原稿が採録出来なかったことをお詫びいたします。

最後になりましたが、自由な形でプログラムを作ることを了承していただけたこの会の代表者である大山豪・木村浩氏、会場の世話をしていただいた北詰正顕氏、講演者、参加していただいた方々に感謝いたします。

１９９３年1月
坂　内　英　一
（プログラム責任者）

（第10回）代数的組合せ論シンポジウム

代表者：木村　浩（愛媛大・理）
大山　豪（大阪教育大）
北詰正顕（岐阜大・教養）
プログラム責任者：坂内英一（九大・理）

科研費総合Ａ（代表者 森田康夫）の援助により（第１０回）代数的組合せ論シンポジウムを開催します。
奮って御参加下さい。

日　時：１９９２年６月２９日（月）〜７月１日（水）
場　所：岐阜大学教養部（別紙案内図参照）
・１日目〜３日目午前 … 大学会館第６集会室
・３日目午後のみ……… １０４番教室（教養部）

<u>プログラム</u>

	9:15	10:15–10:30	10:30	11:30–13:00	13:00							17:30
６月２９日（月）	A1		A2		A3	B1	B2	B3	B4	B5	A4	
６月３０日（火）	A5		B6 B7		B8 B9	B10	B11	B12	B13	B14	A6	
７月　１日（水）	A7		A8		B15	C1	C2	D1				

10:30　16:00

A（各５０〜６０分）

<u>６月２９日</u>

A1　9:15-10:15 寺尾　宏明（Wisconsin大）：Arrangements of hyperplanes and reflection groups
A2　10:30-11:30 上野喜三雄（早大・理工）：無限次元楕円型Ｒ行列
A3　13:00-13:50 根上　生也（横国大・教育）：グラフの多項式不変量の周辺
A4　16:40-17:30 土井　幸雄（福井大・教育）：Braided bialgebras

<u>６月３０日</u>

A5　9:15-10:15 河野　俊丈（東大・数理）：Coxeter graphs and fusion algebras
A6　16:40-17:30 吉田　知行（熊本大・理）：有限群のBurnside環

<u>７月　１日</u>

A7　9:15-10:15 竹内　光弘（筑波大・数学）：有限群と量子群の表現論
－Dipper-James理論への新たな視点－
A8　10:30-11:30 橋爪　道彦（岡山理大）：無限グラフのスペクトル幾何とその応用

B（各25分）

6月29日

B1 14:00-14:25 川越　謙一（九大・理）：Hamming association schemesから作られるspin model, I
B2 14:30-14:55 坂内　悦子　　　　　　　：Hamming association schemesから作られるspin model, II
B3 15:00-15:25 市原　浩二（岡山理大）：Pre-Hamming schemes
B4 15:30-15:55 千吉良直紀（筑波大・数学）：Bratteli diagrams of finite groups
B5 16:00-16:25 宇佐美陽子（お茶水大・理）：可換不足群を持ち、惰性剰余群が位数４の巡回群であるブロックのパーフェクト・アイソメトリーについて（with L. Puig）

6月30日

B6 10:30-10:55 岡田　聡一（名大・理）：Alternating sign matrixとWeylの分母公式
B7 11:00-11:25 上野　一男（名工大）：The Hammond operator algebra and the Bell polynomials
B8 13:00-13:25 北詰　正顕（岐阜大・教養）：Griessの関数と直交群の非分裂拡大
B9 13:30-13:55 Jose Balmaceda：（フィリピン大／九大・理）：Multiplicity-free subgroups of alternating groups
B10 14:00-14:25 花木　章秀（千葉大・理）：有限群の共役類の元の数と、既約指標の次数とのある条件について
B11 14:30-14:55 滑田　正夫（東京医歯大・教養）：Sharp characters of finite groups
B12 15:00-15:25 山崎　則男（北大・理）：Distance regular graphs with $\Gamma(x)=3\cdot K_{a+1}$
B13 15:30-15:55 平木　　彰（阪大・理）：An upper bound of t with $C_t=1$
B14 16:00-16:25 野村　和正（東京医歯大・教養）：Congruences in distance regular graphs

7月　1日

B15 13:00-13:25 木村　　浩（愛媛大・理）：Non Hall typeのHadamard行列

C（各50分）

7月　1日

C1 13:30-14:20 白谷　克巳（九大・理）：Work on number theory of Koichi Yamamoto(1921-1991)
C2 14:30-15:20 山田美枝子（九大・理）：Work on combinatorics of Koichi Yamamoto(1921-1991)

D（30分）

7月　1日

D1 15:30-16:00 都筑　俊郎（北大・理）：未定　(Cancelled)

２日目は１８：００から岐阜大生協食堂において懇親会を予定しております。（会費は約４，０００円の予定）
申し込みは１日目に会場で。（または北詰まで御連絡下さい。）

目　次

無限次元楕円的R行列

早大・理工　上野喜三雄

私が∞次元のR行列の研究を始めた動機は，リー代数 gl_∞ の 2-parameter (q,t) を持つ変形，$U_{q,t}(gl_\infty)$ をつくることにあった．当面なすべきことは，この代数を与えるような∞次元のR行列を見出し，その性質を調べることである．今のところ，$U_{q,t}(gl_\infty)$ までは到達していないが，R行列の候補は見つかったので，それを報告する．何故この代数を欲しいのか，その理由を述べ出すと長くなるのでやめる．また，この仕事自体，完結していないので，どうしても歯切れが悪くなるが，とりあえず，次のような文脈の中でこの仕事を見ることにしたい．

量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ が発見されてからすでに久しい．それは Yang-Baxter 方程式の trigonometric な解(i.e. R行列)を用いて定義されて，$\mathfrak{g}$ の 1-parameter q を持つ変形であった．そして，この代数の表現論を通じて Yang-Baxter 方程式に対する理解はより深まり，また，組合せ論，低次元トポロジーにも色々な問題を提供して来た．それならば，楕円的

R行列, あるいは, 高種数の代数曲線と関連したR行列(今のところ, Chiral Potts 模型以外に例は知られていが, そのような例があるとしたら) それらの背後にある数学的構造に対して積極的に目を開くべきではないか. とりわけ, この様なR行列に付随する$\mathfrak{g}$の変形は, 当然$U_q(\mathfrak{g})$の一般化のはずで, それを視野に採り入れて初めて量子群の世界の本性を理解し得るのではないか. 今, そうした試みを開始すべき時機にさしかかっているのではないか.

この報告書は, おゝむね, このような意図に沿って構成された三題噺である. §1 では, trigonometric R行列から量子群 $U_q(sl_n)$ を構成する方法を復習する. §2 では, Belavin 模型と呼ばれる楕円的R行列から, 一般化された Sklyanin 代数 (GSA_n) を導く方法を述べる. この代数は sl_n の変形 $U_{q,t}(sl_n)$ と見なされるものであるが, 一部の専門家以外, 余り知られていないように思う. §3 が私と澁川氏(北大・理)によるオリジナルな結果, すなわち標題にかかげたR行列についての解説である. 我々のR行列は Belavin 模型の率直な意味での∞次元版と見なせ, かつ, 楕円テータ函数の本質と深く係っている.

§1. Quantum group. $U_q(sl_n)$

この節を書くにあたって，次の文献を資料とした．

V. V. Bazhanov and R. M. Kashaev, Cyclic L-operator related with a 3-state R matrix, RIMS preprint (1990)

$V=\mathbb{C}^n$ として，行列 $R^{(\pm)}\in End(V^{\otimes 2})$ を次で定義する．

(1-1) $$R^{(\pm)}=\pm\sum_i t^{\pm1}E_{ii}\otimes E_{ii}\pm\sum_{i<j}\rho E_{ii}\otimes E_{jj}\pm\sum_{i>j}\rho^{-1}E_{ii}\otimes E_{jj}+\sum_{i\lessgtr j}(t-t^{-1})E_{ij}\otimes E_{ji}$$

E_{ij} は行列単位で，t と ρ はパラメータである．$\check{R}^{(\pm)}=PR^{(\pm)}$ ($P: a\otimes b\mapsto b\otimes a$) とおくと，

(1-2) $$\check{R}^{(+)}+\check{R}^{(-)}=(t-t^{-1})I,\quad \check{R}^{(+)}\check{R}^{(-)}=-I$$

はすぐにわかる．また，$\check{R}^{(\pm)}$ は定数Yang-Baxter方程式

(1-3) $$R_{12}^{(\pm)}R_{13}^{(\pm)}R_{23}^{(\pm)}=R_{23}^{(\pm)}R_{13}^{(\pm)}R_{12}^{(\pm)}$$

を満たす．ただし，$R^{(\pm)}=\sum R^{(\pm)}{}_{ij}^{kl}E_{ik}\otimes E_{jl}$ とおくとき，$R_{12}^{(\pm)}=\sum R^{(\pm)}{}_{ij}^{kl}E_{ik}\otimes E_{jl}\otimes I$, etc. である．

次にスペクトル・パラメータ λ を導入し，

(1-4) $$R(\lambda)=e^{\lambda}R^{(+)}+e^{-\lambda}R^{(-)}$$

を考える．これは，(1-2), (1-3) よりYang-Baxter方程式

(1-5) $$R_{12}(\lambda)R_{13}(\lambda+\mu)R_{23}(\mu)=R_{23}(\mu)R_{13}(\lambda+\mu)R_{12}(\lambda)$$

の解である．

量子群 $U_q(sl_n)$ は，このR行列から次の手順(謂ゆ

る, quantum double ）を踏んでつくられる. ℂ代数 $\mathcal{A}$ は生成元として $L^{(+)}_{ij}$ $(i\le j)$, $L^{(-)}_{ij}$ $(i\ge j)$ を持つとしよう. 次の行列を導入する.

(1-6) $$L(\lambda) = e^{\lambda}L^{(+)} + e^{-\lambda}L^{(-)}$$

ただし, $L^{(\pm)} = \sum_{i\lessgtr j} L^{(\pm)}_{ij} E_{ij} \in End(V)\otimes\mathcal{A}$. 生成元のみたす基本関係式として次を要請する.

(1-7) $$R_{12}(\lambda-\mu)L_1(\lambda)L_2(\mu) = L_2(\mu)L_1(\lambda)R_{12}(\lambda-\mu)$$

ただし, $L_1(\lambda) = L(\lambda)\otimes I$, $L_2(\lambda) = I\otimes L(\lambda)$. (1-7)は次の3本の式と同等である.

(1-8) $$\begin{cases} R^{(+)}_{12}L^{(\pm)}_1L^{(\pm)}_2 = L^{(\pm)}_2L^{(\pm)}_1R^{(+)}_{12} \\ R^{(+)}_{12}L^{(+)}_1L^{(-)}_2 = L^{(-)}_2L^{(+)}_1R^{(+)}_{12}. \end{cases}$$

行列要素で書くと,

(1-9) $$\sum_{\alpha,\beta} R^{(+)}{}^{\alpha\beta}_{ij} L^{(\pm)}_{\alpha k} L^{(\pm)}_{\beta l} = \sum_{\alpha,\beta} R^{(+)}{}^{kl}_{\alpha\beta} L^{(\pm)}_{i\alpha} L^{(\pm)}_{j\beta} \quad \text{for } {}^{\forall}(ij,kl)$$

となる. なお, 代数 $\mathcal{A}$ には, 余積 $\Delta: \mathcal{A}\to\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ を

(1-10) $$\Delta(L^{(\pm)}_{ij}) = \sum_{\alpha} L^{(\pm)}_{i\alpha}\otimes L^{(\pm)}_{\alpha j}$$

で定義できる. $U_t(sl_n)$ は, $\mathcal{A}$ の適当な部分代数の商を取ることで実現される. パラメータ ρ は最後の段階で消えてしまう.

§2. Belavin 模型と一般化されたSklyanin代数

この節の参考資料は，次の論文である．

(i) C.A. Tracy, Physica 16 D (1985) 203–220.

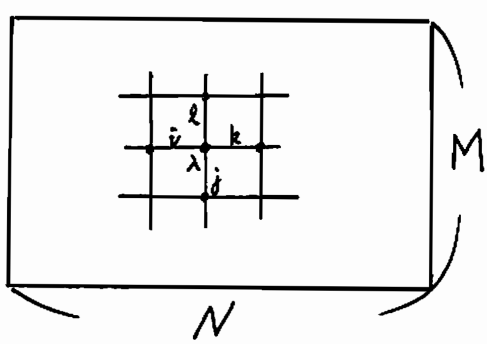
(ii) M.P. Richey and C.A. Tracy, Anals of Stat. Phys. 42 (1986) 311–348.

(iii) H. Bo-yo and W. Hua, J. Math. Phys. 30 (1989), 2750–2755.

Belavin 模型は，完全 $\mathbb{Z}_n$ 対称性を持つ頂点模型であり，そのボルツマン重率が楕円函数で与えられる．

まず，$\mathbb{Z}_n$ 頂点模型について説明しよう．Λ を $M \times N$ の周期的格子とする．

$\Lambda =$



各格子点 $\lambda \in \Lambda$ は最短の格子点のみと辺(bond)を通じて相互作用をするとしよう．bond の状態(state)が（図の (i,j,k,l)）が相互作用を表わしている．今，この状態の集合を $\mathbb{Z}_n$ とする（$(i,j,k,l) \in \mathbb{Z}_n^4$）．とり得る相互作用に応じてボルツマン重率 R_{ij}^{kl} を与えれば，これでひとつの $\mathbb{Z}_n$ 頂点模型が定まったことになる．勿論，最終的には，$M, N \to \infty$

と極限をとって（熱力学的極限），1格子点あたりの自由エネルギー，磁化等の物理量を計算．

ボルツマン重率から次の行列をつくる．

(2-1) $$R = \sum_{i,j,k,l \in \mathbb{Z}_n} R_{ij}^{kl} E_{ik} \otimes E_{jl}$$

$\{E_{\alpha\beta}\}$ 等は行列単位である．$V = \mathbb{C}^n$ とすれば，$R \in \mathrm{End}(V^{\otimes 2})$ である．これをR行列と呼ぶ．頂点模型が完全 $\mathbb{Z}_n$ 対称性（$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ 対称性とも言う．）を持つとは，ボルツマン重率が次の条件を満たすことである．

(2-2) $$\begin{cases} R_{ij}^{kl} = 0 & \text{unless } i+j \equiv k+l \mod n \\ R_{i+p,j+p}^{k+p,l+p} = R_{ij}^{kl} & \text{for any } p, i, j, k, l \in \mathbb{Z}_n \end{cases}$$

この条件をもう少し代数的に捉える．e_j $(j \in \mathbb{Z}_n)$ を V の標準基底とし，$g, h \in \mathrm{End}(V)$ を

(2-3) $$g e_j = \omega^j e_j, \quad h e_j = e_{j-1} \quad (j \in \mathbb{Z}_n)$$

と定める．$\omega = \exp(2\pi\sqrt{-1}/n)$ である．そして，$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in G_n = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ に対して

(2-4) $$I_\alpha = h^{\alpha_1} g^{\alpha_2}$$

とおく．すると次のことが示される．

<u>Lemma</u> [(i)] R行列が完全 $\mathbb{Z}_n$ 対称性を持つ為の必要十分条件は

(2-5) $$R = \sum_{\alpha \in G_n} w_\alpha I_\alpha \otimes I_\alpha^{-1}$$

と書かれることである．

$n=2$ のとき，(2-5) は次の形をしている．

$$R=\begin{bmatrix} w_{00}+w_{01} & 0 & 0 & w_{10}-w_{11} \\ 0 & w_{00}-w_{01} & w_{10}+w_{11} & 0 \\ 0 & w_{10}+w_{11} & w_{00}-w_{01} & 0 \\ w_{10}-w_{11} & 0 & 0 & w_{00}+w_{01} \end{bmatrix}$$

この形の R 行列で，スペクトル・パラメーター付きの Yang-Baxter 方程式をみたすものは，R. Baxter により求められた (1972)．これが8頂点模型と呼ばれるものである．Belavin 模型はこれの一般の n への拡張である (Belavin, Nucl. Phys. B180 [FS2] (1981) 189-200)

Belavin 模型において，各 w_α は次で与えられる．

(2-6) $\quad w_\alpha(\lambda)=\vartheta\begin{bmatrix}\alpha_1/n\\ \alpha_2/n\end{bmatrix}(\lambda+\eta,\tau)\Big/\vartheta\begin{bmatrix}\alpha_1/n\\ \alpha_2/n\end{bmatrix}(\eta,\tau)$

ただし，$\vartheta\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}(z,\tau)$ は rational characteristic $a,b\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}$ をもつテータ－函数である：

(2-7) $\quad \vartheta\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}(z,\tau)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\exp\left(\pi i(m+a)^2\tau+2\pi i(m+a)(z+b)\right)$

Belavin 模型においては，スペクトル・パラメーター λ 以外に τ（モヂュライ）と $\eta\in E_\tau$（モヂュライ τ の楕円曲線）という2つのパラメータを持っていることに注意しよう．勿論，$\lambda\in E_\tau$ とみなすべきである．

<u>Theorem</u> (Belavin, (i) etc.) R 行列 (2-5), (2-6) は

Yang-Baxter方程式

(2-8) $$R_{12}(\lambda)R_{13}(\lambda+\mu)R_{23}(\mu) = R_{23}(\mu)R_{13}(\lambda+\mu)R_{12}(\lambda)$$

を満たす。

パラメータ η を適当に変更し，さらに正規化因子を乗ずることで，$w_\alpha(\lambda)$ を

(2-9) $$w_\alpha(\lambda) = \sigma_\alpha(\lambda+\eta)\sigma_0(\eta) \Big/ \sigma_\alpha(\eta)\sigma_0(\lambda+\eta)$$

にとることは可能である。ただし，

(2-10) $$\sigma_\alpha(z) = \vartheta\begin{bmatrix} 1/2 + \alpha_1/n \\ 1/2 + \alpha_2/n \end{bmatrix}(z, \tau) \quad .$$

一般化されたSklyanin 代数は，このR行列に付随した代数である。$\{J_\alpha\}$ をこの代数の生成元とし，

(2-11) $$L(\lambda) = \sum_{\alpha \in G_n} w_\alpha(\lambda) J_\alpha I_\alpha$$

とおく。さらに§1で見たように $L(\lambda)$ に対し2次の関係式

(2-12) $$R_{12}(\lambda-\mu)L_1(\lambda)L_2(\mu) = L_2(\mu)L_1(\lambda)R_{12}(\lambda-\mu)$$

を課す。

<u>*Theorem* [(iii)]</u>. (2-12) は次と同等である。

(2-13) $$\sum_{\gamma \in G_n} F_{\alpha\beta\gamma}(\eta, \tau)\,\omega^{(\beta_1-\gamma_1)(\gamma_2-\alpha_2)} J_{\alpha+\beta-\gamma} J_\gamma = 0$$

ただし構造定数は次で与えられる。

(2-14) $$\begin{cases} F_{\alpha\beta\gamma}(\eta, \tau) = \dfrac{\partial}{\partial\eta} \log \dfrac{\sigma_{\gamma-\alpha}(\eta)\sigma_{\alpha+\beta-\gamma}(\eta)}{\sigma_{\beta-\gamma}(\eta)\sigma_\gamma(\eta)} & (\alpha \neq 0) \\[2ex] F_{0\beta\gamma}(\eta, \tau) = \dfrac{\partial^2}{\partial\eta^2} \log \dfrac{\sigma_{\beta-\gamma}(\eta)}{\sigma_\gamma(\eta)} & \end{cases}$$

一般化されたSklyanin代数 — ここではそれをGSA_nと記すことにする—は$\{J_\alpha\}_{\alpha\in G_n}$を生成元とし(2-13)を基本関係式とする代数である。 極限$\tau\mapsto i\infty$において、$GSA_n\longrightarrow U_t(sl_n)$ $(t=e^{n\eta})$となることが知られている(文献(iii))。 従って、GSA_nはリー代数sl_nの2-parameter変形(elliptic deformation)と見なされるべきものである。 変形のパラメータはtと$q=e^{2\pi i\tau}$であるから、その意味でGSA_nを$U_{q,t}(sl_n)$と書いてもよいだろう。 ただし、これにHopf代数の構造が入いるか否かはわかっていない。 多くの人々はこれに対して否定的見解を持っている。

さて、R行列の考察に戻ろう。完全$\mathbb{Z}_n$対称性(2-2)を素直に解釈すれば、それはボルツマン重率R_{ij}^{kl}に対して、ある関数S^{ab} $(a,b\in\mathbb{Z}_n)$があって、

(2-15) $$R_{ij}^{kl}=\delta_{i+j,k+l}\,S^{k-i,\,l-i}$$

と書かれることを意味する($\delta_{a,b}=1$ if $a\equiv b \bmod n$, $=0$ otherwise)。 $W_\alpha(\lambda)$を(2-6)で与えたときの$S^{ab}(\lambda)$は文献(ii)で計算されている。

(2-16) $$S^{ab}(\lambda)=f(\lambda)\times\frac{\vartheta\begin{bmatrix}(b-a)/n+1/2\\1/2\end{bmatrix}(\lambda+K,n\tau)}{\vartheta\begin{bmatrix}-a/n+1/2\\1/2\end{bmatrix}(K,n\tau)\,\vartheta\begin{bmatrix}b/n+1/2\\1/2\end{bmatrix}(\lambda,n\tau)}$$

ただし

$$(2\text{-}17)\quad f(\lambda) = n\cdot e^{-i\pi\lambda} \prod_{k=0}^{n-1} \vartheta\begin{bmatrix} k/n + 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}(\lambda, n\tau)$$

$$(2\text{-}18)\quad \eta = \frac{\kappa}{n} + \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}\ .$$

さて，テータ函数の無限積表示

$$(2\text{-}19)\quad \vartheta(z,\tau) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)(1+e^{-2\pi i z}q^{m-\frac{1}{2}})(1+e^{2\pi i z}q^{m-\frac{1}{2}})$$

$$q = e^{2\pi i\tau}$$

を使って次が示せる（Shibukawa- Ueno　を参照）.

<u>Lemma</u>　$|q|<1$ とする．$\tilde{S}^{ab}(\lambda)$ を

$$S^{ab}(\lambda) = f(\lambda)\, q^{-\frac{n}{8}}\, \tilde{S}^{ab}(\lambda)$$

で定義する．$a, b \in \mathbb{Z}_n$　を fix して $n \mapsto \infty$ とすると，次を得る．

$$(2\text{-}20)\quad \lim_{n\to\infty} \tilde{S}^{ab}(\lambda) = \frac{1 - q^{a-b}e^{-2\pi i(\lambda+\kappa)}}{(1-q^a e^{-2\pi i\kappa})(1-q^{-b}e^{-2\pi i\lambda})}$$

§3.　Completely $\mathbb{Z}$ Symmetric R Matrix

この節では，

Y. Shibukawa and K. Ueno, Completely $\mathbb{Z}$ symmetric R matrix, preprint (1992), to appear in Letters in Mathematical Physics

の内容の一部分を詳しく説明する．この論文を以下では [SU] と引用する．

我々は，∞ 次元の R 行列

$$(3\text{-}1)\qquad R(\lambda)=\sum_{i,j,k,l\in\mathbb{Z}} R_{ij}^{kl}(\lambda)\,E_{ik}\otimes E_{jl}$$

を考察する．この R 行列が完全 $\mathbb{Z}$ 対称性をみたすとは，

$$(3\text{-}2)\qquad \begin{cases} R_{ij}^{kl}=0 & \text{unless } i+j=k+l \\ R_{i+p,j+p}^{k+p,l+p}=R_{ij}^{kl} & \text{for any } p,i,j,k,l\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

が成立することである．これは行列成分が

$$(3\text{-}3)\qquad R_{ij}^{kl}(\lambda)=\delta_{i+j,k+l}\,S^{k-i,\,l-i}(\lambda)$$

と書かれることと同値である．$\{S^{ab}(\lambda)\}$ でもって Yang-Baxter 方程式を書くと次のようになる．

$$(3\text{-}4)\qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} S^{k-i_1,\,i_2-k}(\lambda)\,S^{j_1-k,\,i_3-j_1}(\lambda+\mu)\,S^{j_2-i_1-i_2+k,\,j_3-i_1-i_2+k}(\mu)$$

$$=\sum_{k=-\infty} S^{j_1+j_2-i_2-k,\,j_3-i_1-i_2+k}(\mu)\,S^{k-i_1,\,j_3-i_1}(\lambda+\mu)\,S^{j_1-k,\,j_2-k}(\lambda)$$

$$\text{for any } (i_1,i_2,i_3,j_1,j_2,j_3 \text{ with } i_1+i_2+i_3=j_1+j_2+j_3)$$

方程式に無限和があらわれるので，これを解く際には注意が必要である．(すなわち，条件をみたすすべての $(i_1\,i_2\,i_3,\ j_1\,j_2\,j_3)$ に対して共通な領域 $K\ni(\lambda,\mu)$ があって，そこで式の両辺が一様絶対収束していることが要求される．)

<u>Theorem</u>　$|q|<1$ とする．このとき，

$$(3\text{-}5)\qquad S^{ab}(\lambda)=\frac{-q^a}{e^{2\pi i\lambda}-q^a}+\frac{q^b}{e^{2\pi i\lambda}-q^b}$$

はYang-Baxter方程式(3-4)の解である

いくつかの注意を与えておこう．まず(3-5)の右辺は(2-20)の右辺そのものである．だからと言って，それは定理が自明に成立することを意味しない．次に，$|q|<1$より$\lim_{a,b\to+\infty} S^{ab}(\lambda) = \lim_{a,b\to-\infty} S^{ab}(\lambda) = 0$（指数関数的減少）である．このことと，(3-4)においてSの肩にのっているindexの動く範囲に注意すれば，収束条件はクリアできている．等式の証明そのものは，$u = e^{2\pi i\lambda}$についての留数解析で為される．初等的ではあるが長々しい．また，κを$\tau\kappa$ ($q = e^{2\pi i\tau}$) に置き換えて考えれば，

$$(3\text{-}6) \qquad (q-1)S^{ab}(\tau\lambda)\Big|_{q=1} = \frac{-1}{\kappa-a} + \frac{1}{\lambda-b}$$

となる．右辺は再びYang-Baxter方程式(3-4)をみたすわけだが，これがM. Gaudinによって1988年に与えられた∞次元R行列である．（M. Gaudin, J. Phys. France 49 (1988) 1857-1865）

我々の解は，スペクトル・パラメータλ以外に，2つのパラメータτとκを持っているが，見かけは初等関数である．しかし，このR行列は楕円関数の本質と予想以上に深く係っているのである．

その関係を解く鍵は行列要素のFourier変換

$$(3\text{-}7) \quad \sum_{i,j} R^{kl}_{ij}(\lambda)\, e^{2\pi\sqrt{-1}(ix+jy)}$$

を計算することにある．次のテータ商の Fourier 展開に注意する．

$$(3\text{-}8) \qquad \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_1(x+y)}{\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)}$$

$$= \cot\pi x + \cot\pi y + 4\sum_{m,n=1}^{\infty} q^{mn}\sin 2\pi(mx+ny)$$

$$\text{for } |\mathrm{Im}\, x|, |\mathrm{Im}\, y| < \mathrm{Im}\,\tau$$

ここで，$\vartheta_1(z)$ は楕円テータ函数

$$(3\text{-}9) \qquad \vartheta_1(z) = 2q^{1/8}\sin\pi z\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)(1-2q^m\cos 2\pi z+q^{2m}).$$

<u>Lemma</u>. Fourier 級数 (3-7) は次のようになる．

$$(3\text{-}10) \qquad \sum_{i,j=-\infty}^{+\infty} R_{ij}^{kl}(\lambda)e^{2\pi\sqrt{-1}(ix+jy)}$$

$$= G(x-y:\lambda)e^{2\pi\sqrt{-1}(lx+ky)} - G(x-y:\kappa)e^{2\pi\sqrt{-1}(kx+ly)}$$

ただし，

$$(3\text{-}11) \qquad G(z:\lambda) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\cdot\frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_1(z+\lambda)}{\vartheta_1(z)\vartheta_1(\lambda)}$$

式 (3-10) は次の様に解釈される．$\mathcal{V}$ を 1 変数関数のつくる空間とし，一般に，$\mathcal{V}^{\otimes M}$ を M変数のつくる空間とする．(厳密に議論したければ，$\mathcal{V}=C^\infty(S^1)$ とすればよい．)

$\varphi_k(x)=e^{2\pi\sqrt{-1}kx}$ $(k\in\mathbb{Z})$，$(\varphi_{k_1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{k_M})(x_1,\cdots,x_M)=\prod_{j=1}^{M}\varphi_{k_j}(x_j)$ とおけば，$\{\varphi_{k_1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{k_M}\}$ は $\mathcal{V}^{\otimes M}$ の basis を与えている．これにより，(3-10) を書き直せば

$$(3\text{-}12) \qquad (R(\lambda)\varphi_k\otimes\varphi_l)(x,y)$$

$$= G(x-y:\lambda)(\varphi_\ell\otimes\varphi_k)(x,y) - G(x-y:\kappa)(\varphi_k\otimes\varphi_\ell)(x,y)$$

を得る．すなわち，$\mathcal{V}^{\hat{\otimes}2}$ 上でdefされる非局所作用素

(3-13) $\quad R(\lambda) = G(\lambda)\sigma - G(\kappa) \quad \in End(\mathcal{V}^{\hat{\otimes}2})$

が浮び上って来る．ここで，$G(\lambda)$ はかけ算作用素

(3-14) $\quad (G(\lambda)\varphi)(x,y) = G(x-y:\lambda)\,\varphi(x,y)$

であり，σは変数のとり換え，

(3-15) $\quad (\sigma\varphi)(x,y) = \varphi(y,x)$

である．この作用素をR-作用素と呼ぶことにしよう．この作用素のbasis $\{\varphi_k\otimes\varphi_\ell\}_{k,\ell\in\mathbb{Z}}$ に関する行列表現が本来のR行列なのである．従って，R作用素もYang-Baxter方程式を満すが，それは次のように定式化される．

今，$R_{ij}\in End(\mathcal{V}^{\hat{\otimes}3})$ を

(3-16) $\quad R_{ij}(\lambda) = G_{ij}(\lambda)\,\sigma_{ij} - G_{ij}(\kappa)$

とする．ここで

(3-17) $\quad (G_{ij}(\lambda)\varphi)(x_1\,x_2\,x_3) = G(x_i-x_j:\lambda)\,\varphi(x_1\,x_2\,x_3)$

$$(\sigma_{ij}\varphi)(\cdots x_i \cdots x_j \cdots) = \varphi(\cdots x_j \cdots x_i \cdots)$$

(x_iとx_jのとり換え)

すると，次を得る．

<u>Proposition</u> R-作用素は $End(\mathcal{V}^{\hat{\otimes}3})$ の中で，Yang-Baxter方程式をみたす；

(3-18) $\quad R_{12}(\lambda)R_{13}(\lambda+\mu)R_{23}(\mu) = R_{23}(\mu)R_{13}(\lambda+\mu)R_{12}(\lambda)$

以上の事実が，我々のR行列を"elliptic"と称する由縁である．

さて，上の命題をもう少し広い文脈で捉えてみよう．次の定理を証明できる．

<u>*Theorem*</u>　$\theta(x)$ は整関数で，次の3項関係式をみたすとする．

$$\begin{aligned}(3\text{-}19)\qquad &\theta(x+y)\theta(x-y)\theta(z+w)\theta(z-w)\\ &+\theta(x+z)\theta(x-z)\theta(w+y)\theta(w-y)\\ &+\theta(x+w)\theta(x-w)\theta(y+z)\theta(y-z)=0\end{aligned}$$

作用素 $R(\lambda)\in End(\mathcal{V}^{\otimes 2})$ を次式で定義する．

$$(3\text{-}20)\qquad R(\lambda)=G(\lambda)\sigma-G(\kappa)$$

ただし，

$$(3\text{-}21)\qquad (G(\lambda)\varphi)(x,y)=\frac{\theta'(0)\theta(\lambda+x-y)}{\theta(\lambda)\theta(x-y)}\varphi(x,y)$$

このとき，$R(\lambda)$ は $End(\mathcal{V}^{\otimes 3})$ における Yang-Baxter 方程式(3-18)をみたす．逆に，(3-20), (3-21)で定義される作用素が Yang-Baxter 方程式をみたすならば，整関数 $\theta(x)$ は3項関係式(3-19)をみたす．

この定理で主張したいことは明解である．3項関係式が(3-20)に対する Yang-Baxter方程式と同等ということである．では，この3項関係式の解は何かと言うと次のことが知られている．(Whittaker and Watson, A course of Modern Analysis, p 461 ）: (3−19) の解析的解は変数 x のスケーリングを除けば次に限られる.

$$(3\text{-}22\text{-}1)\qquad \theta(x) = \vartheta_1(x)\exp\left(\tfrac{1}{2}Ax^2+B\right)$$

$$(3\text{-}22\text{-}2)\qquad \theta(x) = \sin(\pi x)\exp\left(\tfrac{1}{2}Ax^2+B\right)$$

$$(3\text{-}22\text{-}3)\qquad \theta(x) = x\cdot\exp\left(\tfrac{1}{2}Ax^2+B\right)$$

A, B は任意定数である. 勿論, (1) ⇒ (2) ⇒ (3) と退化していく. また, 楕円テータ関数 $\vartheta_1(x)$ に対する (3−19) は, 謂ゆる *trisecant formula* (*J. D. Fay, Theta functions on Riemann Surfaces, LNM #352*) の楕円曲線の場合に他ならない. それから, 楕円曲線に対する prime 形式 ((Cauchy核)$^{-1}$) は,

$$(3\text{-}23)\qquad E(x,y)\sqrt{dxdy} = \frac{\vartheta_1(y-x)}{\vartheta_1'(0)}$$

で与えられることも注意すべき事かも知れない.

以上が我々, すなわち私と滝川氏によって発見された∞次元R行列の基本的性質である. 何やら暗示的な性質を持っている様に思うのだが, いかがであろう.

我々の目標はこのR行列から gl_∞ の楕円的変形 $U_{q,t}(gl_\infty)$ を構成することにあるのだが, これにはまだ成功していない. この点も含めて, R行列のより詳しい性質 将来研究すべきテーマは [SO] に書かれている. 興味を持たれた方はそちらを御覧ください. (92 7. 15)

グラフの多項式不変量の周辺

横浜国立大学教育学部　根上生也（Seiya NEGAMI）

1 Negami 多項式

[7] の中で私は次の再帰的な公式により，任意のグラフ G に対して 1 つの多項式 $f(G) = f(G;t,x,y)$ が定まることを示し，それが持っているいろいろな性質を明らかにした．私自身はこの多項式に何の命名もしていないが，当然の流れとして，今日では $f(G)$ は Negami 多項式と呼ばれている．

(i) $f(\overline{K_n}) = t^n$

(ii) $f(G) = xf(G/e) + yf(G-e) \quad (e \in E(G))$

上の定義において，$\overline{K_n}$ は完全グラフ K_n の補グラフで，n 個の孤立点のみからなるグラフである．また，$G-e$ は G から辺 $e \in E(G)$ を除去して得られるグラフで，G/e は $G-e$ において e の両端点を同一視して得られるグラフである．直観的には，辺 e をその両端が一致するまで縮めていけば G/e が得られる．この変形を辺 e の縮約という．縮約によって生じた多重辺やループは除去してしまうことも多いが，ここではそのままにしておく．

辺の縮約・除去を繰り返していくと，グラフの辺数は 1 つずつ減少していくから，(i) のように辺を持たないグラフ $\overline{K_n}$ の値を初期値として定めておけば，(ii) の公式を再帰的に用いることで，$f(G)$ が求められることがわかる．ただし，(ii) における辺 $e \in E(G)$ の選び方は任意なので，(i) と (ii) のみで 1 つの $f(G)$ が定まることは自明ではない．

単に多項式を 1 つ定義するだけなら，(i) の初期値は何でもかまわないが，$f(G)$ に何かを数え上げる母関数の役目を果たしてもらおうとすると，(i) の条件は十分に意味を持つ．実際，計算手順をきちんと考察すると，$f(G)$ は次のように展開できる．

$$f(G) = \sum_{Y \subset E(G)} t^{\omega(G-Y)} x^{|E(G)-Y|} y^{|Y|}$$

ここで，$\omega(G)$ は G の連結成分数である．さらに，同類項をまとめて

$$f(G) = \sum_{i=0}^{|V(G)|} \sum_{j=0}^{|E(G)|} b_{ij} t^i x^{|E(G)|-j} y^j$$

とおくと，その係数 b_{ij} には次のような意味がある．

$$b_{ij} = \text{“}\omega(H) = i,\ |E(H)| = |E(G)| - j \text{ の } G \text{ の全域部分グラフ } H \text{ の総数”}$$

この事実をいろいろに解釈すると，以下のように $f(G)$ から G に関する多くの情報が引き出せることがわかる．

- G の頂点数，辺数，連結成分数がわかる．
- G の全域木や全域林の個数がわかる．
- G が含む完全グラフ K_n の個数がわかる．
- G が単純グラフかどうかがわかる．
- G が一筆書き可能かどうかどうかがわかる．
- G の辺連結度がわかる．
- G の頂点彩色の総数がわかる．

さらに，それまでに知られていた次のようなグラフの多項式をことごとく $f(G)$ から導き出すことができる．例えば，染色多項式は t 色を用いた G の頂点彩色の総数を値に持ち，流れ多項式は位数 t の環を係数とする至るところ 0 でない G の流れの総数を値に持つ多項式である．

- 染色多項式 $P(G;t) = f(G;t,-1,1)$
- 流れ多項式 $F(G;t) = t^{|V(G)|} f(G;t,t,-1)$
- 双染色多項式 $Q(G;t,z) = z^{|V(G)|} f(G;tz,1,z)$
- Tutte多項式 $T(G;x,y) = (y-1)^{|V(G)|}(x-1)^{\omega(G)} f(G;(x-1)(y-1),1,y-1)$

このように述べてくると，$f(G)$ は非常に優れた不変量であるような気がする．何よりも有名な Tutte 多項式を含んでしまうという事実は非常に強力で，Tutte 多項式を勉強したことのある人の感情を少なからず刺激してしまった．例えば，Oxley [9] は私の論文が出るやいなや，Tutte 多項式からも $f(G)$ が導き出せることを示している．

$$f(G;t,x,y) = \left(\frac{ty}{x}\right)^{\omega(G)} \left(\frac{x}{y}\right)^{|V(G)|} y^{|E(G)|} T(G; 1+\frac{ty}{x}, 1+\frac{x}{y})$$

しかし，Tutte 多項式はグラフのサイクル・マトロイドの不変量なので，それから連結成分数 $\omega(G)$ や頂点数 $|V(G)|$ は読み取れない．つまり，$T(G)$ が与えられているだけでは $f(G)$ を復元するのは不可能なのである．例えば，H と K を交わらないように並べたグラフを $H \cup K$，1 頂点だけ同一視して H と K をくっつけたものを $H \cdot K$ とおくと，

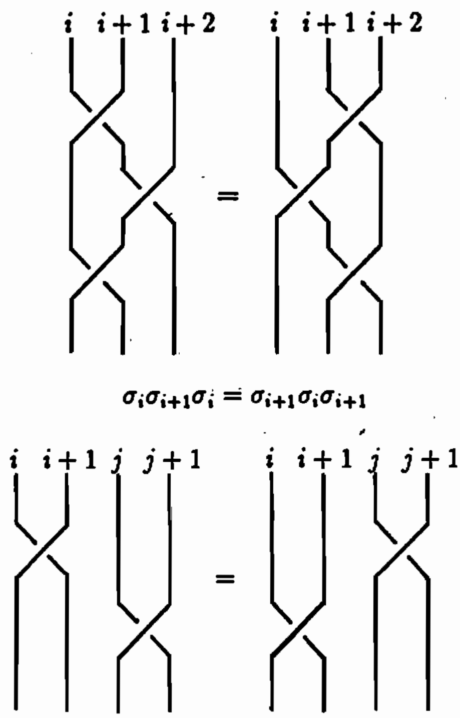
$$T(H \cup K) = T(H \cdot K), \quad f(H \cup K) \neq f(H \cdot K)$$

となってしまい，$T(G)$ だけでは $H \cup K$ と $H \cdot K$ の区別ができない．さらに，$f(G)$ にはグラフの分解に対応してきれいに分解するという性質もある．（詳細は [7] の後半を見よ．）本質的には $T(G)$ と $f(G)$ はほとんど同等な不変量だが，とりあえず $f(G)$ の勝ちである．

2　Jones 多項式

話は変わるが，ここで結び目や絡み目の不変量として数年前から有名になった Jones 多項式について紹介する．Jones は [2] の中で，現在 Jones 代数(多元環) と呼ばれている von Neumann 代数 A_n を構成した．その A_n は次の関係式を持つ $n-1$ 個の元 $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ で生成されている．

$$e_i^2 = e_i, \quad e_i e_{i\pm1} e_i = t e_i, \quad e_i e_j = e_j e_i \ (|i-j| > 1)$$



$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad (|i-j| > 1)$$

図 1: Braid 群

一方，n 本の組み紐 (braid) の絡み方を記述する Braid 群 B_n は $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ を生成元として，次の関係式によって定義される群と同型である．

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \ (|i-j| > 1)$$

Braid 群における単位元は n 本の紐が平行に並んだ状態に対応し，$\sigma_i (\sigma_i^{-1})$ をかけることは i 番目と $i+1$ 番目の紐に左捻り（右捻り）を加えて，組み紐の最下位に交差を追加する効果がある．

例えば，$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i$と$\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$に対応した組み紐の状態を比較すると，両者は上下の端を固定したまま連続的に変形して移り合える．したがって，その2つの組み紐の状態は同じであると考えられるので，Braid群の中でもそれに対応した2つの積も等号で結ばれることになる．また，遠く離れた2つの場所に捻りを加える場合，捻る順番はできあがった組み紐の状態には影響しない．これがBraid群の第2の関係式の意味である．

ここで，Jones代数とBraid群の関係式を比較してみると，両者が非常によく似ていることに誰でも気づくだろう．そこに着眼して，JonesはB_nからA_nへの表現$\rho : B_n \to A_n$を構成した．さらに，トレース$tr : A_n \to C[t, t^{-1}]$を定義した．組み紐の両端を丸めて一致させると，何本かの閉曲線が絡んだもの（閉じた組み紐と呼ぶ）ができあがる．逆に，どんな絡み目（空間内の閉曲線の集まり）も閉じた組み紐の状態に変形できる．その組み紐に対応したBraid群の元$b_L \in B_n$に対して，$V_L(t) = tr \circ \rho(b_L) \in C[t, t^{-1}]$とおいたものが絡み目$L$のJones多項式である．この定義からは自明でないが，Lをb_Lに変形する仕方によらずに$V_L(t)$は一意的に定まり，絡み目の不変量になる．

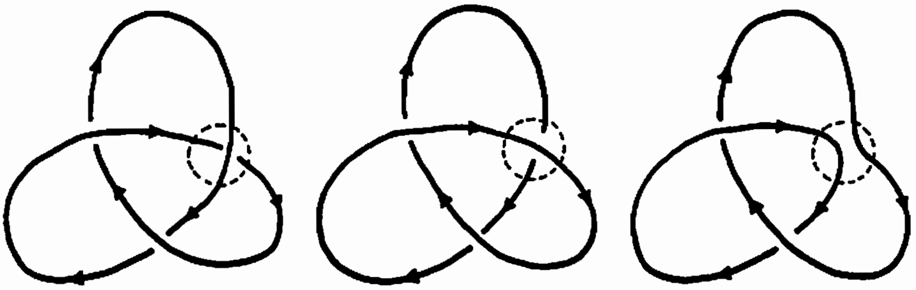


図 2: 絡み目の局所的な変形

このJonesの定式化はたいへん見事なものだが，代数や関数解析に疎い者にとって，その詳細を理解するのは難しい．しかし，幸いなことに，Jones多項式$V_L(t)$は次の再帰的な性質を持つので，誰でも簡単に$V_L(t)$を求めることができる．ただし，L_+, L_-, L_0は局所的な一部分以外が一致している図2のような3つの絡み目である．

(i) LとL'がアンビエント・アイソトピックならば，$V_L(t) = V_{L'}(t)$.

(ii) $V_O(t) = 1$ （Oは自明な結び目）

(iii) $t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})V_{L_0}(t)$

これでJones代数を見ることなしにJones多項式が議論できるようになった．この事実に影響されて，多くの研究者がそれぞれに再帰的に定義できる結び目・絡み目の多項式不変量を考案し，それらが統合されてHomfly多項式$P_L(\alpha, z)$が誕生した．(この命名は[1]の共著者の頭文字を語呂よく並べたものである．) その$P_L(\alpha, z)$も上の(i), (ii)を満たし，(iii)を次の公式で置き換えることで定義されている．

$$\alpha P_{L_+}(\alpha, z) - \alpha^{-1} P_{L_-}(\alpha, z) = z P_{L_0}(\alpha, z)$$

これは Jones 多項式の (iii) を形の上で含んでいる．また，古典的に知られていた Conway-Alexander 多項式 $\nabla_L(z)$ も同様の公式

$$\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z\nabla_{L_0}(z)$$

を満たし，$P_L(\alpha, z)$ に含まれてしまう．しかし，Conway-Alexander 多項式にはトポロジストが満足できる幾何学的な解釈が存在するが，Jones 多項式も Homfly 多項式も幾何学的に何を意味しているのかがはっきりしていない．

3　Murasugi 多項式

再び，グラフの話に戻る．ただし，今度はグラフの辺に符号を割り当てた符号付きグラフを考える．その符号付きグラフの多項式を考えることで，結び目・絡み目の不変量である Jones 多項式とグラフの不変量が見事に結びつくことが Murasugi [4] によって示されている．

まず，写像 $sgn : E(G) \to \{\pm 1\}$ によってグラフ G の辺の符号付けが 1 つ固定されているものとし，G の辺集合 $E(G)$ を辺の符号に応じて 2 つに分割する．

$$E_+(G) = \{e \in E(G) : sgn(e) = 1\}, \quad E_-(G) = \{e \in E(G) : sgn(e) = -1\}$$

このとき，次の総和によって Murasugi 多項式 $M(G) = M(G; x, y, z)$ を定義する．

$$M(G) = \sum_H x^{|E_+(H)|-|E_-(H)|} y^{\omega(H)-1} z^{\beta(H)}$$

ただし，この総和において H は G の全域部分グラフ全体を動く．また，$\beta(H)$ は H のサイクル空間の階数で $\beta(H) = |E(H)| - |V(H)| + \omega(H)$ である．

特に，符号付きグラフの辺の符号がすべて 1 のときは，それを符号のない通常のグラフと見なすことができるから，Murasugi 多項式もグラフの不変量となる．実際，符号のないグラフに対して，Murasugi 多項式は Tutte 多項式や Negami 多項式と次のような関係がある．

$$T(G; y, z) = M(G; 1, y-1, z-1)$$
$$f(G; t, x, y) = t^{\beta(G)} M(G; x, ty, y^{-1})$$

また，今までと同様に，次のような再帰的な公式で Murasugi 多項式を求めることもできる．

(i)　$E(G) = \emptyset$ のとき，$M(G) = y^{|V(G)|-1}$

(ii)　$e \in E(G)$ がループでないとき，$M(G) = M(G-e) + x^{sgn(e)} M(G/e)$

(iii)　$e \in E(G)$ がループのとき，$M(G) = (1 + x^{sgn(e)} z) M(G/e)$

絡み目とグラフを結び付けるために，絡み目 L の射影図 $\tilde{L}$ から次のようにして符号付きグラフ $G_{\tilde{L}}$ を作る．その射影図 $\tilde{L}$ とは，L を適当な平面の上に正射影した図のことで，交差点はすべて十字になっており，そこを通る2つの弧のどちらが上を通っているかが指示されているものとする．したがって，$\tilde{L}$ は4-正則平面グラフになっているので，その領域は2色（黒と白）で色分けすることができる．そこで，唯一の非有界な領域を白で塗ることにして，各黒領域の中央に頂点を置き，交差点で接している黒領域に置かれている頂点どうしをその交差点を通る辺で結ぶ．その辺と交差点を通る弧の状態に応じて図3のように符号±1を割り当てる．

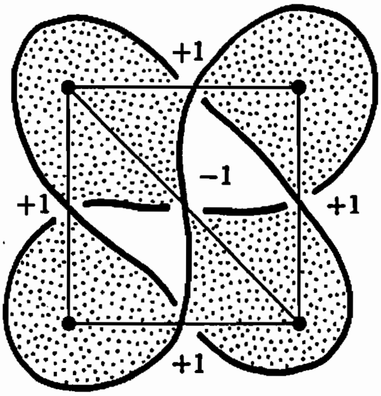


図 3: 絡み目の射影図と符号付きグラフ

このように定義された符号付きグラフ $G_{\tilde{L}}$ の Murasugi 多項式 $M(G_{\tilde{L}})$ は絡み目 L の射影図 $\tilde{L}$ の作り方に依存しているので L 自身の不変量とは言えない．そこで，その射影図に依存する部分を消去するように補正して次のように $V_L(x)$ を定義すると，それが絡み目の不変量になることを Kauffman [3] が示している．

$$\boldsymbol{V}_L(x) = (-1)^{|E_+(G)|-|E_-(G)|}x^{-\frac{1}{2}(|E_+(G)|-|E_-(G)|-3w(L))}M(G_L; x, -(x+x^{-1}), -(x+x^{-1}))$$

ここで，きちんとは述べないが $w(\tilde{L})$ は射影図 $\tilde{L}$ のねじれ (writhe) と呼ばれるもので，射影図 $\tilde{L}$ から読み取れる量である．

さらに，Kauffman は $\boldsymbol{V}_L(x)$ の変数 x に $\sqrt{t}$ を代入すると，Jones 多項式が得られることを示している．

$$V_L(t) = \boldsymbol{V}_L(\sqrt{t})$$

これでグラフと結び目の話が完全に結びついた．特に，弧をたどっていくと交差点を上下上下と交互に通過するような射影図を持つ絡み目（交代絡み目と呼ぶ）に限れば，$M(G_L)$ は通常のグラフの不変量として扱え，グラフ理論的な手法を用いた絡み目の研究が可能となる．実際，Murasugi [5], [6] は $M(G)$ の次数に関する議論を展開して，古くから知られていた "Tait 予想" のいくつかを見事に解決している．

4 Negami 多項式，再び

かくして，絡み目の不変量である Jones 多項式は，Murasugi 多項式を経由して，グラフの不変量である Tutte 多項式や Negami 多項式と関連することがわかった．このように捉えると，Negami 多項式は 1 つの研究の流れに乗っているように見えるが，実は私にとって Negami 多項式は Jones 多項式の真似でしかないのである．今だから正直に言うが，結び目・絡み目の多項式不変量の再帰的な定義の研究を眺めていて，それを真似してグラフの多項式が定義できないものかと思いを巡らして考案したが Negami 多項式だったのである．だから，Negami 多項式が絡み目の研究と結びつくなどとは夢にも思わなかった．それに日本における "位相幾何学的グラフ理論" の開祖を自称する私の研究の流れからすると，Negami 多項式はその流れには乗らない単発的なものだった．それにもかかわらず，多くの人に関心を持たれてしまい，内心，困っていたのだった．

そこで名誉挽回のために，最後に新しい Negami 多項式 [8] を簡単に紹介する．それはグラフの不変量ではなく，グラフの埋め込みの不変量である．

グラフ G を閉曲面に埋め込むと，その閉曲面はいくつかの領域に分割される．その各領域が開円板 $\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : x^2+y^2<1\}$ と位相同型であるとき，その埋め込みを G の 2-胞体埋め込みという．グラフ G の 2-胞体埋め込みにおいて，見掛け上，G の各辺の両側には 2 つの領域に接している．その領域が実際に異なる 2 つの領域なのか同一のものなのかに応じて場合分けして，次のような多項式 $h^*(G)=h^*(G;t,x,y)$ を定義する．

(i) $h^*(\overline{K_n}) = t^n \quad (n \geq 1)$

(ii) 辺 $e \in E(G)$ に接続する両側の領域が同一のとき，
$h^*(G) = (x+y)h^*(G\cdot e)$

(iii) 辺 $e \in E(G)$ に接続する両側の領域が異なるとき，
$h^*(G) = xh^*(G-e) + yh^*(G\cdot e)$

この $h^*(G)$ を定義するためには，G は絶えず閉曲面に 2-胞体埋め込みされている必要がある．例えば，(i) にある $\overline{K_n}$ が 2-胞体埋め込み可能となるのは n 個の球面以外にはないので，$\overline{K_n}$ でその埋め込みも表しているものとする．

さらに，グラフの変形も閉曲面こみで行わなければならない．辺 $e \in E(G)$ の除去は自然に行えるが，e の両側の領域が同一であると $G-e$ の埋め込みが 2-胞体的ではなくなってしまう．したがって，その場合の辺の除去は禁止する．また，辺 $e \in E(G)$ がループでないときは，自然に e を縮約して G/e の 2-胞体埋め込みが得られる．しかし，e がループのときに e を縮めてしまうと，閉曲面がくびれてしまう．そのときはくびれた部分で閉曲面を切り放してしまうことにする．このルールのもとで辺 $e \in E(G)$ の縮約を行って得られるグラフの 2-胞体埋め込みを $G\cdot e$ で表す．ただし，ループ e がメビウスの帯の中心線になっているときには，e の縮約がクロス・キャップを 1 つ切り取る効果があることに注意．

実は，このように定義した多項式 $h^*(G)$ は G の閉曲面上の双対グラフ G^* の Negami 多項式と一致する．

$$h^*(G) = f(G^*)$$

特に，G が球面に 2-胞体埋め込みされているときには，$h^*(G)$ は [7] で定義されている G の双対多項式 $f^*(G)$ に等しい．ただし，$f^*(G)$ は G の埋め込みとは無関係に定義されたものであるが，球面に 2-胞体埋め込みされているグラフ G に対しては

$$f^*(G) = f(G^*)$$

というきれいな関係が成立することが，すぺに [7] で示されている．

この新しい Negami 多項式 $h^*(G)$ は定義されたばかりなので，多くのことはわかっていないが，手始めに $h^*(G)$ が等しくなる同じグラフの異なる 2-胞体埋め込みの構成にチャレンジしてみるとよいだろう．また，球面以外の閉曲面に 2-胞体埋め込みされたグラフ G に対して，$h^*(G)$ と $f^*(G)$ の関係を調べてみるのもよいだろう．現在のところ，$h^*(G) = f^*(G)$ となるための必要十分条件は G が埋め込まれている閉曲面の各連結成分が球面なっていることであることがわかっている．

参考文献

[1] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W.B.R. Lickorish, K.C. Millett and A. Ocneanu, A new polynomial invarinat of knots and links, *Bull. Amer. Math. Soc.* **12** (1985), 239–246.

[2] V.F.R Jones, A polynomial invariant for links via von Neumann algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.* **129** (1985), 103–112.

[3] L.H. Kauffman, State models and the Jones polynomial, *Topology* **26** (1987), 395–407.

[4] K. Murasugi, On invariants of graphs with applications to knot theory, *Trans. Amer. Math. Soc.* **314** (1989), 1–49.

[5] K. Murasugi, Jones polynomials and classical conjectures in knot theory, *Topology* **26** (1987), 187–194.

[6] K. Murasugi, Jones polynomials and classical conjectures in knot theory (II), *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **102** (1987), 317–318.

[7] S. Negami, Polynomial invariants of graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.* **299** (1987), 601–622.

[8] S. Negami, Note on polynomial invariants of graphs embedded on surfaces, preprint.

[9] J.G. Oxley, A note on Negami's polynomial invariants for graphs, *Discrete Math.* **76** (1989), 279–281.

Braided bialgebras

福井大学 教育学部　土井幸雄

線形代数群の座標環を"量子化"して得られるタイプのホップ代数(いわゆる量子線形群)は可換でも余可換でもないけれど，"braided" と呼ばれるある意味で可換にかなり近い性質をもつクラスに属している．この報告の目的は，braided な bialgebra (または Hopf algebra) の定義の周辺をなるべく予備知識を仮定せずに解説することである．この方面の基本的文献として，Larson-Towber [LT]，Hayashi [H] がある．"braided" (定義 1)とは "quasi-triangular" を形式的に双対化したものというだけでなく，右 comodule の作る monoidal category が braided category (定義 2)になることと完全に一致する(これは Larson-Towber の仕事)ことが特徴である．１節でこれを解説する．証明は改良してある．なお "quasi-triangular" に対しては，上のような解釈(もちろんこの場合は bialgebra 上の左 <u>module</u> の圏に対して考える)との間にギャップがあることを注意したい．２節では，braided bialgebra の定義から得られるいくつかの性質を導く．とくに antipode S をもつなら(すなわち Hopf algebra)，S は必ず bijective になることがわかる(この事実は以外と知られていないようである)．３節では，任意の coalgebra C とある条件をみたす２次形式 σ の組(定義 3)から braided bialgebra $M(C,\sigma)$ を構成する．これは R-matrix から A(R) を構成するいわゆる FRT-construction または竹内の cocentralizer method [T2] の一般化になっている．これにより Yang-Baxter equation の役割がよりはっきりと捕らえられるであろう．最後の節は，Hopf-Galois 理論からのアプローチを考える．とくに可逆な 2-cocycle σ をもつ<u>可換</u>なホップ代数からある braided bialgebra (or Hopf algebra) が構成できる．

１．braided bialgebra の定義とその意味

$A = (A, \Delta, \varepsilon)$ を 体 k 上の <u>bialgebra</u> とする．すなわち単位元をもつ k-algebra A と (unitary) k-algebra maps $\Delta: A \to A\otimes A$, $\varepsilon: A \to k$ の組で次の図式を可換にするもの(ただし，$\otimes = \otimes_k$ とする．Δ を A の comultiplication, ε を A の counit という．)：

$$
\begin{tikzcd}
& A\otimes k & \\
k\otimes A \arrow[r, equal] & A \arrow[u, equal] \arrow[r, "\Delta"'] \arrow[d, "\Delta"] & A\otimes A \arrow[ul, "1\otimes\varepsilon"'] \arrow[d, "1\otimes\Delta"] \\
& A\otimes A \arrow[ul, "\varepsilon\otimes 1"] \arrow[r, "\Delta\otimes 1"] & A\otimes A\otimes A
\end{tikzcd}
$$

つまり，bialgebra とは algebra かつ coalgebra であって Δ, ε が algebra maps になることである．

$x\in A$ に対し，$\Delta(x) = \Sigma x_1\otimes x_2$, $(1\otimes\Delta)\Delta(x) = (\Delta\otimes 1)\Delta(x) = \Sigma x_1\otimes x_2\otimes x_3$, etc. のような表し方を用いることにする．いわゆる Sweedler's Σ-notation! 従って，

$$x = \Sigma\varepsilon(x_1)x_2 = \Sigma x_1\varepsilon(x_2),\ \Delta(xy) = \Sigma x_1y_1\otimes x_2y_2.$$

右 A-<u>comodule</u> とは，k-vector space V と k-linear map $\rho_V: V \to V\otimes A$ の組 (V, ρ_V) で次の図式を可換にするものをいう．

$$
\begin{tikzcd}
& V\otimes k & \\
\rho: & V \arrow[u, equal] \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & V\otimes A \arrow[ul, "1\otimes\varepsilon"'] \arrow[d, "1\otimes\Delta"] \\
\rho\otimes 1: & V\otimes A \arrow[r] & V\otimes A\otimes A
\end{tikzcd}
$$

(Σ-notation)
$\rho(v) = \Sigma v_0\otimes v_1$ と表す，また
$(1\otimes\Delta)\rho(v) = (\rho\otimes 1)\rho(v)$
$= \Sigma v_0\otimes v_1\otimes v_2$ と表す．従って，
$v = \Sigma v_0\varepsilon(v_1)$ となる．

A 自身 $\rho = \Delta$ に関して 右 A-comodule になることに注意しよう．また k は

$$k \to k\otimes A,\ q \mapsto q\otimes 1$$

により右 A-comodule とみる．

M^A で右 A-comodules の圏 を表すことにする，ただし射 $f:(V, \rho_V) \to (W, \rho_W)$ とは，k-linear map $f: V \to W$ で次の図式を可換にするものとする．この性質をみたす写像 f を A-<u>comodule map</u> という．

$$
\begin{tikzcd}
f: & V \arrow[r] \arrow[d, "\rho_V"] & W \arrow[d, "\rho_W"] \\
f\otimes 1: & V\otimes A \arrow[r] & W\otimes A
\end{tikzcd}
$$

(i.e.
$\Sigma f(v)_0\otimes f(v)_1 = \Sigma f(v_0)\otimes v_1$.)

$V, W\in M^A$ のとき，$V\otimes W$ は $\rho_{V\otimes W}(v\otimes w) = \Sigma v_0\otimes w_0\otimes v_1w_1$ で右 A-comodule となるから．$M^A = (M^A, \otimes, k)$ は Maclane [M] の意味で monoidal category となる．

[定義 1] k-bialgebra A とその上の２次形式 $\sigma: A\otimes A \to k$ の組 (A, σ) が次の (B0) から (B3) をみたすとき，<u>braided</u> bialgebra であるという：

(B0) σ が $(A\otimes A)^*$ の元とみて<u>可逆</u>，すなわち，$\exists\sigma^{-1}: A\otimes A \to k$ s.t.

$$\Sigma\sigma(x_1, y_1)\sigma^{-1}(x_2, y_2) = \varepsilon(x)\varepsilon(y) = \Sigma\sigma^{-1}(x_1, y_1)\sigma(x_2, y_2),\ x, y\in A.$$

(B1) $\Sigma\sigma(x_1, y_1)x_2y_2 = \Sigma y_1x_1\sigma(x_2, y_2)$, $\forall x, y\in A$.

(B2) $\sigma(xy, z) = \Sigma\sigma(x, z_1)\sigma(y, z_2)$, $\forall x, y, z\in A$.

(B3) $\sigma(x, yz) = \Sigma\sigma(x_1, z)\sigma(x_2, y)$, $\forall x, y, z \in A$.
さらに "$\sigma^{-1}(x, y) = \sigma(y, x)$" をみたすとき，$(A, \sigma)$ は <u>triangular</u> であるという.

一般の monoidal category に対して "braided" なる概念が考えられる(例えば [Y, Def. 1・12]参照). $(M^A, \otimes, k)$ に対しては次のようになる.

[定義 2] 任意の $V, W \in M^A$ に対して，$V\otimes W$ から $W\otimes V$ への k-linear map $\sigma_{V,W}$ が定義されていて次の (i), (ii), (iii) をみたすとき，M^A は <u>braided</u> であるという (族$\{\sigma_{V,W}\}$を M^A の <u>braiding 構造</u>という):

(i) 任意の $V, W \in M^A$ に対して，$\sigma_{V,W}$ は bijective A-comodule map.

(ii) (naturality) 任意の A-comodule maps $f: V \to U$, $g: W \to X$ に対し，

$$(g\otimes f)\sigma_{V,W} = \sigma_{U,X}(f\otimes g).$$

(iii) 任意の $U, V, W \in M^A$ に対し，

$$(\sigma_{U,W}\otimes 1_V)(1_U\otimes\sigma_{V,W}) = \sigma_{U\otimes V,W}, \quad (1_V\otimes\sigma_{U,W})(\sigma_{U,V}\otimes 1_W) = \sigma_{U,V\otimes W}.$$

さらに，"$\sigma_{W,V}\sigma_{V,W} = 1_{V\otimes W}$" をみたすとき，$M^A$ は <u>symmetric</u> であるという.

[定理]([LT]) k-bialgebra A に対し，

A が braided bialgebra (定義 1) $\Leftrightarrow$ M^A が braided category (定義 2).

(A が triangular $\Leftrightarrow$ M^A が symmetric.)

(σ と $\sigma_{V,W}$ の具体的対応は証明の中で与える.)

証明 ($\Rightarrow$): (A, σ) が braided とする. 任意の $V, W \in M^A$ に対して，

(☆) $\sigma_{V,W}: V\otimes W \to W\otimes V$, $v\otimes w \mapsto \Sigma w_0\otimes v_0\sigma(v_1, w_1)$

とおく. $\iota\sigma_{A,A} = \sigma$ となることに注意せよ. この $\{\sigma_{V,W};\ V, W \in M^A\}$ が M^A の braiding 構造を与えることを示したい.

$\sigma_{V,W}$ は次のような逆写像をもつ(従って，bijective):

$$(\sigma_{V,W})^{-1}: w\otimes v \mapsto \Sigma v_0\otimes w_0\sigma^{-1}(v_1, w_1).$$

$\sigma_{V,W}$ が A-comodule map であることは,

$$\rho_{W\otimes V}\sigma_{V,W}(v\otimes w) = \Sigma w_0\otimes v_0\otimes w_1 v_1\sigma(v_2, w_2)$$

$$= \Sigma w_0\otimes v_0\sigma(v_1, w_1)\otimes v_2 w_2 \text{ (by B1)} = (\sigma_{V,W}\otimes 1)\rho_{W\otimes V}(v\otimes w).$$

"naturality" は，$(g\otimes f)\sigma_{V,W}(v\otimes w) = \Sigma g(w_0)\otimes f(v_0)\sigma(v_1, w_1)$

$$= \Sigma g(w)_0\otimes f(v)_0\sigma(f(v)_1, g(w)_1) = \sigma_{U,X}(f\otimes g)(v\otimes w).$$

(iii): $(\sigma_{U,W}\otimes 1_V)(1_U\otimes\sigma_{V,W})(u\otimes v\otimes w) = \Sigma(\sigma_{U,W}\otimes 1_V)(u\otimes w_0\otimes v_0\sigma(v_1, w_1))$

$= \Sigma w_0 \otimes u_0 \otimes v_0 \sigma(u_1, w_1) \sigma(v_1, w_2) = \Sigma w_0 \otimes u_0 \otimes v_0 \sigma(u_1 v_1, w_1)$ (by B2)

$= \sigma_{U \otimes V, W}(u \otimes v \otimes w)$.

$(1_V \otimes \sigma_{U,W})(\sigma_{U,V} \otimes 1_W) = \sigma_{U, V \otimes W}$ の証明も同様(B3 を使う).

(⇐): M^A にある braiding 構造 $\{\sigma_{V,W};\ V, W \in M^A\}$ が与えられたとする.

2 次形式 σ: $A \otimes A \to k$ を次のように定義する:

$$\sigma(x, y) = (\varepsilon \otimes \varepsilon) \sigma_{A,A}(x \otimes y), \quad \forall x, y \in A.$$

この σ によって (A, σ) が braided になることを示したい. まず任意の $V, W \in M^A$ に対して $\sigma_{V,W}(v \otimes w) = \Sigma w_0 \otimes v_0 \sigma(v_1, w_1)$ となること(すなわち一般の $\sigma_{V,W}$ がこのσから (☆) の方法で決まること)を証明する. $V^* = \mathrm{Hom}(V, k)$ の任意の元 v^* に対し

$$F(v^*): V \to A, \quad v \mapsto \Sigma \langle v^*, v_0 \rangle v_1$$

とおくと, $F(v^*)$ は A-comodule map かつ $\varepsilon F(v^*) = v^*$ であることが容易にわかる. ただし $\langle\ ,\ \rangle$: $V^* \otimes V \to k$ は通常の pairing を表す. 任意の $v^* \in V^*$, $w^* \in W^*$ に対し, $(w^* \otimes v^*)(\sigma_{V,W}(v \otimes w)) = (w^* \otimes v^*)(\Sigma w_0 \otimes v_0 \sigma(v_1, w_1))$ をいえば十分で,

左辺 $= (\varepsilon \otimes \varepsilon)(F(w^*) \otimes F(v^*))(\sigma_{V,W}(v \otimes w))$

$= (\varepsilon \otimes \varepsilon) \sigma_{A,A}(F(v^*) \otimes F(w^*))(v \otimes w))$ (naturality)

$= (\varepsilon \otimes \varepsilon) \sigma_{A,A}(\Sigma \langle v^*, v_0 \rangle v_1 \otimes \langle w^*, w_0 \rangle w_1)$

$= \Sigma \langle w^*, w_0 \rangle \langle v^*, v_0 \rangle (\varepsilon \otimes \varepsilon) \sigma_{A,A}(v_1 \otimes w_1)$

$= (w^* \otimes v^*)(\Sigma w_0 \otimes v_0 (\varepsilon \otimes \varepsilon) \sigma_{A,A}(v_1 \otimes w_1) =$ 右辺.

とくに $A = V = W$ のとき,

$$(☆☆) \qquad \sigma_{A,A}(x \otimes y) = \Sigma y_1 \otimes x_1 \sigma(x_2, y_2), \quad \forall x, y \in A$$

となる.

次に σ が可逆になることをいう: $\sigma'(x, y) = (\varepsilon \otimes \varepsilon)(\sigma_{A,A})^{-1}(y \otimes x)$ とおくと,

$\Sigma \sigma'(x_1, y_1) \sigma(x_2, y_2) = \Sigma (\varepsilon \otimes \varepsilon)(\sigma_{A,A})^{-1}(y_1 \otimes x_1) \sigma(x_2, y_2)$

$= \Sigma (\varepsilon \otimes \varepsilon)(\sigma_{A,A})^{-1}(y_1 \otimes x_1 \sigma(x_2, y_2))$

$= (\varepsilon \otimes \varepsilon)(\sigma_{A,A})^{-1} \sigma_{A,A}(x \otimes y)$ (by ☆☆) $= \varepsilon(x) \varepsilon(y)$. また,

$\Sigma \sigma(x_1, y_1) \sigma'(x_2, y_2) = \Sigma (\varepsilon \otimes \varepsilon) \sigma_{A,A}(x_1 \otimes y_1) \sigma'(x_2, y_2)$

$= (\varepsilon \otimes \varepsilon) \sigma_{A,A}(\Sigma x_1 \otimes y_1 \sigma'(x_2, y_2))$

$= (\varepsilon \otimes \varepsilon) \sigma_{A,A} \gamma(y \otimes x)$ (ただし $\gamma(y \otimes x) = \Sigma x_1 \otimes y_1 \sigma'(x_2, y_2)$ とする)

$= (\varepsilon \otimes \varepsilon) \sigma_{A,A} \gamma \sigma_{A,A} (\sigma_{A,A})^{-1}(y \otimes x)$

(ところが直前に示した結果より, $(\gamma \sigma_{A,A})(x \otimes y) = \gamma(\Sigma y_1 \otimes x_1 \sigma(x_2, y_2)) = \Sigma x_1 \otimes y_1 \sigma'(x_2, y_2) \sigma(x_3, y_3) = \Sigma x_1 \otimes y_1 \varepsilon(x_2) \varepsilon(y_2) = x \otimes y$ だから)

$= (\varepsilon \otimes \varepsilon) \sigma_{A,A} (\sigma_{A,A})^{-1}(y \otimes x) = (\varepsilon \otimes \varepsilon)(y \otimes x) = \varepsilon(x) \varepsilon(y)$.

よって，σ が可逆かつ $\sigma^{-1} = \sigma'$ が示された．
(B1-3)を確かめることはやさしい．例えば (B1) は，$\sigma_{A,A}$ (☆☆) が A-comodule map であることを具体的に書き下した式に $\varepsilon\otimes\varepsilon\otimes 1$ をほどこせば直ちにでる．(B2-3) も容易((ii) で $A = U = V = W$ とせよ)．■

[補足] $B_N = \langle s_1^{\pm 1}, \cdots, s_{N-1}^{\pm 1}\rangle$ を N 次の braid 群とする，ただし，

$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}\ (1\leqq i\leqq N-2),\quad s_i s_j = s_j s_i\ (|i-j|>1).$$

braided bialgebra (A, σ) 上の右 A-comodule $V(\in M^A)$ に対し，$V^{\otimes N}(\in M^A)$ は次の方法で左 B_N-module とみれる：$V^{\otimes N}$ の任意の元 $w = \cdots\otimes \underset{i}{x}\otimes \underset{i+1}{y}\otimes\cdots$ に対し，

$$s_i^{+}\cdot(\cdots\otimes \overset{i}{x}\otimes \overset{i+1}{y}\otimes\cdots) = \Sigma(\cdots\otimes \overset{i}{y_0}\otimes \overset{i+1}{x_0}\otimes\cdots)\sigma^{-1}(y_1, x_1)$$

$$s_i^{-}\cdot(\cdots\otimes x\otimes y\otimes\cdots) = \Sigma(\cdots\otimes y_0\otimes x_0\otimes\cdots)\sigma(x_1, y_1).$$

((A, σ) が triangular なら 左 S_N-module となる，ここで S_N は N 次対称群.)
しかも $V^{\otimes N}$ の A-comodule 構造 ρ と B_N の作用は次の意味で可換になる：

$$\rho(s\cdot w) = \Sigma s\cdot w_0\otimes w_1,\quad s\in B_N,\ w\in V^{\otimes N}.$$

このような観点から Schur's Double Centralizer Theorem がどんな braided bialgebra でなりたつかという研究が最近始まっている．

2．σ の基本性質

(A, σ) を braided bialgebra とすると，σは次の性質をもつ．

(B4) <normal condition> $\sigma(1_A, x) = \varepsilon(x) = \sigma(x, 1_A)$, $\forall x\in A$.

(B5) <Yang Baxter condition>

$$\Sigma\sigma(x_1, y_1)\sigma(x_2, z_1)\sigma(y_2, z_2) = \Sigma\sigma(y_1, z_1)\sigma(x_1, z_2)\sigma(x_2, y_2).$$

(B6) <2-cocycle condition>

$$\Sigma\sigma(x_1, y_1)\sigma(x_2y_2, z) = \Sigma\sigma(y_1, z_1)\sigma(x, y_2z_2).$$

さらに A が antipode S をもつ(すなわち Hopf algebra)なら，

(B7) $\sigma^{-1}(x, y) = \sigma(S(x), y)$.

(B8) $\sigma(x, y) = \sigma^{-1}(x, S(y))$.

(B9) $\sigma(x, y) = \sigma(S(x), S(y))$.

(B10) $\Sigma\sigma(x_1, S(x_2))\sigma^{-1}(S(x_3), x_4) = \varepsilon(x)$.

(B11) $\Sigma\sigma^{-1}(S(x_1), x_2)\sigma(x_3, S(x_4)) = \varepsilon(x)$.

(B12) $S^2(x) = \Sigma\sigma^{-1}(S(x_1), x_2)x_3\sigma(x_4, S(x_5))$.

とくに，S は bijective である．

証明 (B4): $\sigma(x, 1) = \sigma(\Sigma\iota(x_1)x_2, 1) = \Sigma\iota(x_1)\sigma(x_2, 1)$
$= \Sigma\sigma^{-1}(x_1, 1)\sigma(x_2, 1)\sigma(x_3, 1)$ ($\iota(1) = 1$ に注意)
$= \Sigma\sigma^{-1}(x_1, 1)\sigma(x_2, 1)$ (B3 で $y = z = 1$ とする) $= \iota(x)$. また，
$\sigma(1, z) = \sigma(1, \Sigma\iota(z_1)z_2) = \Sigma\iota(z_1)\sigma(1, z_2)$
$= \Sigma\sigma^{-1}(1, z_1)\sigma(1, z_2)\sigma(1, z_3)$
$= \Sigma\sigma^{-1}(1, z_1)\sigma(1, z_2)$ (B2 で $x = y = 1$ とする) $= \iota(z)$.)

(B5): 左辺 $= \Sigma\sigma(x_1, y_1)\sigma(x_2y_2, z)$ (by B2) $= \sigma(\Sigma\sigma(x_1, y_1)x_2y_2, z)$
$= \sigma(\Sigma y_1x_1\sigma(x_2, y_2), z)$ (by B1) $= \Sigma\sigma(y_1x_1, z)\sigma(x_2, y_2)$
$= \Sigma\sigma(y_1, z_1)\sigma(x_1, z_2)\sigma(x_2, y_2)$ (by B2 again) = 右辺.

(B6): B5 の左辺に B2, 右辺に B3 を適用すればよい．

(B7): 最初に antipode の定義を復習しよう．bialgebra A に対し，次の条件をもつ k-linear map S: A → A が存在するとき，A は <u>Hopf algebra</u> であるという(この S を A の <u>antipode</u> という):

$$\Sigma S(x_1)x_2 = \iota(x)1_A = \Sigma x_1S(x_2),\ \forall x\in A.$$

さて，$\sigma(S(x), y) = \Sigma\sigma(S(x_1), y_1)\iota(x_2)\iota(y_2)$
$= \Sigma\sigma(S(x_1), y_1)\sigma(x_2, y_2)\sigma^{-1}(x_3, y_3)$
$= \Sigma\sigma(S(x_1)x_2, y_1)\sigma^{-1}(x_3, y_2)$ (by B2)
$= \Sigma\sigma(\iota(x_1)1, y_1)\sigma^{-1}(x_2, y_2)$ (since S is an antipode)
$= \Sigma\iota(x_1)\iota(y_1)\sigma^{-1}(x_2, y_2)$ (by B4) $= \sigma^{-1}(x, y)$.

(B8): σ^{-1} を使って (B1-4) を言い換えると次のようになる:

(B1') $\Sigma\sigma^{-1}(x_1, y_1)y_2x_2 = \Sigma x_1y_1\sigma^{-1}(x_2, y_2)$

(B2') $\sigma^{-1}(xy, z) = \Sigma\sigma^{-1}(y, z_1)\sigma^{-1}(x, z_2)$

(B3') $\sigma^{-1}(x, yz) = \Sigma\sigma^{-1}(x_1, y)\sigma^{-1}(x_2, z)$

(B4') $\sigma^{-1}(1, x) = \iota(x) = \sigma^{-1}(x, 1)$.

つまり (A^{cop}, σ^{-1}) が braided になる．ここで A^{cop} は A の algebra 構造と counit ι はそのままで comultiplication だけ $\Delta^{cop}(x) = \Sigma x_2\otimes x_1$ に変えた bialgebra を表す．以上の準備の下に B8 を示そう．

$\sigma^{-1}(x, S(y)) = \Sigma\iota(x_1)\iota(y_1)\sigma^{-1}(x_2, S(y_2))$
$= \Sigma\sigma(x_1, y_1)\sigma^{-1}(x_2, y_2)\sigma^{-1}(x_3, S(y_3))$
$= \Sigma\sigma(x_1, y_1)\sigma^{-1}(x_2, y_2S(y_3))$ (by B3')

$= \Sigma\sigma(x_1, y_1)\sigma^{-1}(x_2, \varepsilon(x_2)1) = \sigma(x, y)$ (by B4').

(B9): B7 と B8 から直ちにでる.

(B10): antipode S が anti-coalgebra map であること，すなわち，

$$\Sigma S(x)_1 \otimes S(x)_2\ (= \Delta(S(x))) = \Sigma S(x_2)\otimes S(x_1),\quad \varepsilon(S(x)) = \varepsilon(x)$$

を使う([S] を参照): $\Sigma\sigma(x_1, S(x_2))\sigma^{-1}(S(x_3), x_4)$

$= \Sigma\underline{\sigma(x_1, S(x_4))\sigma(x_2S(x_3), x_7)}\sigma^{-1}(S(x_5), x_6)$

$= \Sigma\underline{\sigma(S(x_3), x_6)\sigma(x_1, S(x_2)x_7)}\sigma^{-1}(S(x_4), x_5)$ (by B6)

$= \Sigma\sigma(x_1, S(x_2)x_3)$ (by $\Sigma\sigma^{-1}(S(x_4), x_5)\sigma(S(x_3), x_6) = \varepsilon(S(x_3))\varepsilon(x_4)$)

$= \Sigma\sigma(x_1, 1)\varepsilon(x_2) = \varepsilon(x)$.

(B11) と (B12) はやや複雑. S が anti-algebra map でもあることに注意する:

$$S(xy) = S(y)S(x) \text{ かつ } S(1) = 1.$$

(simple proof: $S(y)S(x) = \Sigma S(y_1)S(x_1)\varepsilon(x_2y_2) = \Sigma S(y_1)S(x_1)x_2y_2S(x_3y_3)$
$= \Sigma S(y_1)\varepsilon(x_1)y_2S(x_2y_3) = \Sigma\varepsilon(x_1)\varepsilon(y_1)S(x_2y_2) = S(xy)$.)

さて簡単のため $\lambda(x) = \Sigma\sigma(x_1, S(x_2))$ とかくとき，$A\otimes A$ の元 $\Sigma x_1\otimes S(x_2)$ に (B1) を適用して，$\lambda(x)1 = \Sigma S(x_3)x_1\lambda(x_2)$ を得る．とくに右辺は A の中心に属すから，$\Sigma\lambda(x_1)S^2(x_2) = \Sigma S^2(x_4)S(x_3)x_1\lambda(x_2) = \Sigma S(S(x_3)x_4)x_1\lambda(x_2) = \Sigma x_1\lambda(x_2)$ となり，

$$(\lozenge)\qquad \Sigma\lambda(x_1)S^2(x_2) = \Sigma x_1\lambda(x_2)$$

を得る．これを用いて (B11) を示す．

$\Sigma\sigma^{-1}(S(x_1), x_2)\sigma(x_3, S(x_4)) = \Sigma\sigma^{-1}(S(x_1), x_2)\lambda(x_3)$

$= \Sigma\sigma(S^2(x_1), x_2\lambda(x_3))$ (by B7) $= \Sigma\sigma(S^2(x_1), \lambda(x_2)S^2(x_3))$ (by $\lozenge$)

$= \Sigma\sigma(x_1, x_3)\lambda(x_2)$ (by B9) $= \Sigma\sigma(x_1, x_4)\sigma(x_2, S(x_3))$

$= \Sigma\sigma(x_1, S(x_2)x_3)$ (by B3) $= \sigma(x, 1) = \varepsilon(x)$.

また，$S^2(x) = \Sigma\varepsilon(x_1)S^2(x_2) = \Sigma\sigma^{-1}(S(x_1), x_2)\lambda(x_3)S^2(x_4)$ (by B11)
$= \Sigma\sigma^{-1}(S(x_1), x_2)x_3\lambda(x_4)$ (by $\lozenge$) $= \Sigma\sigma^{-1}(S(x_1), x_2)x_3\sigma(x_4, S(x_5))$

となり，(B12) が示された．この形から S^2 は bijective (逆写像は $x \mapsto \Sigma\sigma(x_1, S(x_2)x_3\sigma^{-1}(S(x_4), x_5)$ で与えられる)．とくに S も bijective. ∎

与えられた bialgebra A が braided かどうか(すなわちσをみつけること)は一般には簡単ではない．また，braided だとしてもσが一意的に定まるとは限らない．

[例] H_4 で次のような Hopf algebra を表す: k は ch k ≠ 2 なる体とする．
k 上 1(= 単位元), x, y, z で張られていて，

$$xy = z,\ x^2 = 1,\ y^2 = 0,\ xz = -zx = y$$

で algebra 構造を入れる．さらに，

$$\Delta(x) = x\otimes x,\ \Delta(y) = y\otimes x + 1\otimes y,\ \Delta(z) = z\otimes 1 + x\otimes z,$$

$$\varepsilon(x) = 1,\ \varepsilon(y) = \varepsilon(z) = 0,\ S(x) = x,\ S(y) = z,\ S(z) = -y,$$

とおくと H_4 は(可換でも余可換でもない) Hopf algebra になる．これを Sweedler の 4 次元ホップ代数という．任意の $a\in k$ に対し，$\sigma_a: H_4\otimes H_4 \to k$ を次で定義すると，(H_4, σ_a) は triangular (braided) になる．(これらが H_4 を braided にするすべての２次形式である．このような形に限ることは σ の基本性質をうまく利用すれば簡単.)

σ_a	1	x	y	w
1	1	1	0	0
x	1	-1	0	0
y	0	0	a	$-a$
w	0	0	a	a

3．FRT-construction の一般化

条件(B5) は A の coalgebra 構造だけに関係していることに注意したい．

[定義 3] ある k-coalgebra C と(B0 の意味で)可逆な２次形式 $\sigma\in(C\otimes C)^*$ の組 (C, σ) が次の条件をみたすとき，Yang-Baxter coalgebra (or YB-coalgebra) であると呼びたい：$\forall x, y, z\in C$ に対し，

(B5) $\Sigma\sigma(x_1, y_1)\sigma(x_2, z_1)\sigma(y_2, z_2) = \Sigma\sigma(y_1, z_1)\sigma(x_1, z_2)\sigma(x_2, y_2)$.

(その根拠) $V = k^n$ とする．$C = \mathrm{End}(V)^* = M(n, k)^*$ とおくと，C は k-coalgebra となる：$M(n, k)$ の matrix units $\{e_{ij}\}$ の dual basis を $\{E_{ij}\}(\subset C)$ とかくとき，C の coalgebra 構造は $\Delta(E_{ij}) = \Sigma_k E_{ik}\otimes E_{kj}$, $\varepsilon(E_{ij}) = \delta_{ij}$ で与えられる．自然な同一視 $\mathrm{End}(V\otimes V) = \mathrm{End}(V)\otimes\mathrm{End}(V) = (C\otimes C)^*$ によって元 $R\in\mathrm{End}(V\otimes V)$ に対応する $(C\otimes C)^*$ の元を $\sigma: C\otimes C \to k$ とするとき，

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \Leftrightarrow \text{(B5)}$$

となる．

さて C を任意の k-coalgebra とする．tensor algebra $T(C) = \oplus_m C^{\otimes m}$ は自然な

bialgebra 構造をもつ: $xy\cdots z = x\otimes y\otimes\cdots\otimes z \in C^{\otimes m}$ に対し,

$$\Delta(xy\cdots z) = \Sigma x_1 y_1\cdots z_1\otimes x_2 y_2\cdots z_2,\quad \varepsilon(xy\cdots z) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)\cdots\varepsilon(z).$$

任意の(可逆な) 2 次形式 σ: $C\otimes C \to k$ は σ: $T(C)\otimes T(C) \to k$ に(次の条件をみたすように)一意的に拡張される:

$$\sigma(XY, Z) = \Sigma\sigma(X, Z_1)\sigma(Y, Z_2),\quad X, Y, Z\in T(C)$$

$$\sigma(X, YZ) = \Sigma\sigma(X_1, Z)\sigma(X_2, Y),\quad X, Y, Z\in T(C).$$

(例えば, $\sigma(xyz, uv) = \Sigma\sigma(x_1 y_1 z_1, v)\sigma(x_2 y_2 z_2, u)$

$= \Sigma\sigma(x_1, v_1)\sigma(y_1, v_2)\sigma(z_1, v_3)\sigma(x_2, u_1)\sigma(y_2, u_2)\sigma(z_2, u_3)$.)

さて,

$$\{\Sigma\sigma(x_1, y_1)x_2\otimes y_2 - \Sigma y_1\otimes x_1\sigma(x_2, y_2)\,|\,x, y\in C\}$$

で生成された T(C) のイデアル I_σ による quotient $T(C)/I_\sigma$ を $M(C, \sigma)$ で表す ($C = M(n, k)^*$ の場合, FRT-construction A(R) と同型になる). I_σ は T(C) の bi-ideal だから, 確かに $M(C, \sigma)$ は bialgebra となる. ($\sigma(x, y) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$ のとき, C 上の symmetric algebra となる.)

canonical projection $T(C)\otimes T(C) \to M(C, \sigma)\otimes M(C, \sigma)$ の kernel は

$$T(C)\otimes I_\sigma + I_\sigma\otimes T(C)$$

だから, $\sigma(T(C)\otimes I_\sigma + I_\sigma\otimes T(C)) = 0$ をみたせば σ: $M(C, \sigma)\otimes M(C, \sigma) \to k$ が induce され, 明らかに $(M(C, \sigma), \sigma)$ が braided となる.

条件 "$\sigma(T(C)\otimes I_\sigma + I_\sigma\otimes T(C)) = 0$" は

"$\sigma(\Sigma\sigma(x_1, y_1)x_2 y_2 - \Sigma y_1 x_1\sigma(x_2, y_2), z) = 0$ かつ

$\sigma(x, \Sigma\sigma(y_1, z_1)y_2 z_2 - \Sigma z_1 y_1\sigma(y_2, z_2)) = 0$, $\forall x, y, z\in C$" と同値. これは

"$\Sigma\sigma(x_1, y_1)\sigma(x_2 y_2, z) = \Sigma\sigma(y_1 x_1, z)\sigma(x_2, y_2)$ かつ

$\Sigma\sigma(y_1, z_1)\sigma(x, y_2 z_2) = \sigma(x, z_1 y_1)\sigma(y_2, z_2)$, $\forall x, y, z\in C$" と同値. これは

"$\Sigma\sigma(x_1, y_1)\sigma(x_2, z_1)\sigma(y_2, z_2) = \Sigma\sigma(y_1, z_1)\sigma(x_1, z_2)\sigma(x_2, y_2)$

$\forall x, y, z\in C$" と同値. すなわち, (C, σ) は YB-coalgebra.

このようにして次の結果を得る:

[定理] (C, σ) が YB-coalgebra なら, $M(C, \sigma)$ は braided bialgebra になる. また T(C) の universal mapping property から, 任意の braided bialgebra A は $M(C, \sigma)$ の quotient となる(A の generators で生成される subcoalgebra を C とする).

[例] $C = M(n,k)^*$ とする. 任意の k の units α, β に対して, $\sigma_{\alpha,\beta} : C \otimes C \to k$ を 次で定義する:

 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\sigma_{\alpha,\beta}(E_{ii}, E_{ii}) = \alpha\beta$; $i < j$ に対して

 $\sigma_{\alpha,\beta}(E_{jj}, E_{ii}) = \alpha$, $\sigma_{\alpha,\beta}(E_{ii}, E_{jj}) = \beta$, $\sigma_{\alpha,\beta}(E_{ij}, E_{ji}) = \alpha\beta - 1$;

 その他 $= 0$.

このとき, $(C, \sigma_{\alpha,\beta})$ は YB-coalgebra になることが直接計算で確かめられる. $M_{\alpha,\beta}(n) = M(C, \sigma)$ は n^2 個の $\{E_{ij}\}$ で生成される bialgebra で次の関係式をみたすことも直接計算で確かめられる.

 $E_{is}E_{ir} = \alpha E_{ir}E_{is}$ (if $r < s$),

 $E_{jr}E_{ir} = \beta E_{ir}E_{jr}$ (if $i < j$),

 $E_{jr}E_{is} = \alpha^{-1}\beta E_{is}E_{jr}$ (if $i < j$, $r < s$),

 $E_{ir}E_{js} - E_{js}E_{ir} = (\alpha^{-1} - \beta)E_{is}E_{jr}$ (if $i < j$, $r < s$).

coalgebra 構造は $\Delta(E_{ij}) = \Sigma_k E_{ik} \otimes E_{kj}$, $\varepsilon(E_{ij}) = \delta_{ij}$.

これを Takeuchi's two-parameter matrix bialgebra という[T1]. $\alpha = \beta = q$ のとき, 通常の quantum matrix bialgebra $M_q(n)$ と一致する.

[注意] (1) I_σ は $T(C)$ の homogeneous ideal だから, $M(C, \sigma)$ は graded algebra である. 各 N 次成分 $M_{(N)}$ は $\Delta(M_{(N)}) \subset M_{(N)} \otimes M_{(N)}$ をみたすから, dual algebra $(M_{(N)})^*$ が考えられる. これが Schur algebra の役割を果たすはずである.

(2) braided bialgebra (A, σ) に対し,

$$\theta^+(a) = \sigma(-, a),\ \theta^-(a) = \sigma^{-1}(-, a)\ (\forall a \in A)$$

は dual bialgebra $A^\circ (\subset A^*)$に含まれる. $\mathrm{Im}\,\theta^+$, $\mathrm{Im}\,\theta^-$ で生成された A° の sub-bialgebra を $U(A, \sigma)$ で表す[LT]. A に付随する"量子リー環"というべきものである (FRT の $U(R)$ の一般化).

[補足] (A, σ) の grouplike elements $G = \{g \in A \mid \Delta(g) = g \otimes g,\ \varepsilon(g) = 1\}$ による局所化 $A[G^{-1}]$ について簡単に触れておく. 条件(B1)から G の元は互いに可換になることが容易にわかるが, A の中心に属すとはかぎらない. しかし $\forall g \in G(A)$ に対し,

$$\pi_g : A \to A,\ a \mapsto \pi_g(a) = \Sigma\,\sigma(a_1, g)a_2\sigma(a_3, g)$$

とおくと, π_g は A の bialgebra automorphism で, $\forall a \in A$ に対し

$$ga = \pi_g(a)g,\ ag = g(\pi_g)^{-1}(a),\ \pi_g(ag) = \pi_g(a)g = ga$$

をみたすことがわかる[H, §2]. とくに " $ga = 0 \Leftrightarrow ag = 0$ " となり, A の G による(両側)局所化 $A[G^{-1}]$ が作れる. さらに $A[G^{-1}]$ は braided bialgebra になる.

ただし $\forall a, b \in A$, $\forall g, h \in G$ に対し,

$$\Delta(ag^{-1}) = \Sigma a_1 g^{-1} \otimes a_2 g^{-1}, \quad \varepsilon(ag^{-1}) = \varepsilon(a),$$

$$\sigma(ag^{-1}, bh^{-1}) = \Sigma \sigma^{-1}(a_1, h)\sigma(g, h)\sigma(a_2, b_1)\sigma^{-1}(g, b_2).$$

一般に $A[G^{-1}]$ が Hopf algebra になるかどうかはわかっていないようである. しかし特別な場合, あるひとつの $g \in G$ によってホップ化 $A[g^{-1}]$ $(= A[G^{-1}])$ が得られることもある:

[定理] (C, σ) を YB-coalgebra, $A = M(C, \sigma)$ とする. 次の条件をみたす $g \in G$ が存在すれば, $M(C, \sigma)[g^{-1}]$ がすでに Hopf algebra となる:

C から $M(C, \sigma)$ への k-linear maps j, j' で

$$\Sigma i(x_1)j(x_2) = \iota(x)g = \Sigma j'(x_1)i(x_2), \quad \forall x \in C,$$

をみたすものがある. (この結果は, [T2, Prop 1.3] の variation である.)

例えば, $M_{\alpha,\beta}(2)$ において, $g = E_{11}E_{22} - \alpha^{-1}E_{12}E_{21} = E_{22}E_{11} - \beta E_{12}E_{21}$ とおくと, g は grouplike element になる(この元を quantum determinant という).

j, j' : $M(2, k)^* \to M_{\alpha,\beta}(2)$ を次で定義する:

$j(E_{11}) = E_{22}$, $j(E_{12}) = -\alpha E_{12}$, $j(E_{21}) = -\alpha^{-1}E_{21}$, $j(E_{22}) = E_{11}$,

$j'(E_{11}) = E_{22}$, $j'(E_{12}) = -\beta E_{12}$, $j(E_{21}) = -\beta^{-1}E_{21}$, $j(E_{22}) = E_{11}$.

このとき, $\Sigma i(x_1)j(x_2) = \iota(x)g = \Sigma j'(x_1)i(x_2)$, $\forall x \in M(2, k)^*$, (余因子展開!), となり, $M_{\alpha,\beta}(2)[g^{-1}]$ は Hopf algebra になる(これを $GL_{\alpha,\beta}(2)$ で表す).

antipode S は次で与えられる:

$S(E_{11}) = E_{22}g^{-1} = g^{-1}E_{22}$, $S(E_{12}) = -\alpha E_{12}g^{-1} = -\beta g^{-1}E_{12}$,

$S(E_{21}) = -\alpha^{-1}E_{21}g^{-1} = -\beta^{-1}g^{-1}E_{21}$, $S(E_{22}) = E_{11}g^{-1} = g^{-1}E_{11}$.

$n \geq 3$ に対しても quantum determinant $g \in M_{\alpha,\beta}(n)$, j, j' が存在し, Hopf algebra $GL_{\alpha,\beta}(n) = M_{\alpha,\beta}(n)[g^{-1}]$ が作れる[T1].

4. Hopf-Galois 理論との接点 －条件(B6)の意味を考える－

A を一般の bialgebra とする(braided と限らない). M^A は monoidal category だから, monoid の概念[M]が定義できる: すなわち, $B \in M^A$ と $m: B \otimes B \to B$, $u: k \to B$ in M^A からなる triple $\langle B, m, u \rangle$ で, 次を可換にするもの:

$$
\begin{tikzcd}
B\otimes B\otimes B \arrow[r, "m\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes m"'] & B\otimes B \arrow[d, "m"] \\
B\otimes B \arrow[r, "m"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
k\otimes B \arrow[r, "u\otimes 1"] \arrow[dr] & B\otimes B \arrow[d, "m"] & B\otimes k \arrow[l, "1\otimes u"'] \arrow[dl] \\
& B &
\end{tikzcd}
$$

言い換えると，B が k-algebra かつ right A-comodule であってその構造射 ρ: B → B⊗A が algebra map になること．このとき，B は right A-comodule algebra であるという(ρ を coaction という)．$C = \{b\in B \mid \rho(b) = b\otimes 1\}$ とおく．C は B の subalgebra である．B の (この coaction に関する)不変環と考えられる．

自然な写像

$$\beta: B\otimes_C B \to B\otimes A,\ b\otimes b' \mapsto (b\otimes 1)\rho(b') = \Sigma\, bb'_0\otimes b'_1$$

が bijective のとき，拡大 B/C は A-Galois であるという．このような拡大の研究(Hopf-Galois 理論)については[DT1, 2]を参照．さらに B が 左 C-module かつ 右 A-comodule として C⊗A に同型のとき，拡大 B/C は正規底をもつという．正規底をもつ A-Galois 拡大 B/C は次のような写像 ϕ: A → B の存在と同値である[DT1]:

ϕ は A-comodule map で，$\exists\phi^{-1}\in \mathrm{Hom}(A, B)$ s.t.

$$\Sigma\phi(a_1)\phi^{-1}(a_2) = \varepsilon(a)1_B = \Sigma\phi^{-1}(a_1)\phi(a_2),\ \forall a\in A.$$

しかもこのとき，B は ϕ から定まる 2-cocycle σ によって得られる接合積 $C\#_\sigma A$ と同型になる．

ここでは C = k の場合を考えよう．このとき，B に対する次の条件は同値になる(このとき，B は k 上の A-cleft extension であるという):

B/k が A-Galois かつ A-comodule isomorphism $\phi: A \cong B$ が存在

⇔ $*$-invertible な A-comodule isomorphism $\phi: A \cong B$ が存在.

(この ϕ は $\phi(1_A) = 1_B$ であるように選べる.)

このとき，$x, y\in A$ に対し，

$$\sigma(x, y) = \Sigma\phi(x_1)\phi(x_2)\phi^{-1}(x_2y_2)$$

とおくと，$\sigma\in(A\otimes A)^*$ かつσは可逆となる．

$$(\sigma^{-1}(x, y) = \Sigma\phi(x_1y_1)\phi^{-1}(y_2)\phi^{-1}(x_2)\ \text{で与えられる.})$$

このσは (B6) をみたすことが容易に確かめられる．また B は $k\#_\sigma A$ と(comodule algebra として)同型となる，ただし $k\#_\sigma A = A$ は新しい積 $x\circ y = \Sigma\,\sigma(x_1, y_1)x_2y_2$ で (associative) k-algebra とみたもの(coaction = Δ_A)．A が Hopf algebra ならこの逆がいえる．すなわち，A に(B6) をみたす可逆な $\sigma\in(A\otimes A)^*$ を与えると，$k\#_\sigma A$ が上のようにして作られ，k 上の A-cleft extension になる($\phi(x) = x$, $\phi^{-1}(x) = \Sigma\,\sigma^{-1}(S(x_2), x_3)S(x_1)$ となる)．つまり，A に(B6) をみたす可逆な$\sigma\in(A\otimes A)^*$を考えることは，k 上の A-cleft 拡大 B/k を考えることに対応する．σ に

関する braided conditions (B1-3) は ϕ を使って言い換えられる:

(B1) $\Leftrightarrow$ $\Sigma\phi(x_1)\phi(y_1)\phi(x_2y_2) = \Sigma\phi(y_1x_1)\phi(x_2)\phi(y_2)$, $\forall x, y\in A$.

(B2) $\Leftrightarrow$ $\Sigma\phi(x_1)\phi(y_1)\phi(z_1)\phi^{-1}(x_2y_2z_2) =$

$$\Sigma\phi(x_1)\phi(y_1)\phi^{-1}(x_2y_2)\phi(x_3)\phi(z_1)\phi^{-1}(x_4z_2)\phi(y_3)\phi(z_3)\phi^{-1}(y_4z_4).$$

(B3) $\Leftrightarrow$ $\Sigma\phi(x_1)\phi(y_1)\phi(z_1)\phi^{-1}(x_2y_2z_2) =$

$$\Sigma\phi(y_1)\phi(z_1)\phi^{-1}(y_2z_2)\phi(x_1)\phi(z_3)\phi^{-1}(x_2z_4)\phi(x_3)\phi(y_3)\phi^{-1}(x_4y_4).$$

上の考察をさらに発展させる. k 上の A-cleft 拡大 (B/k, ϕ) から B に次のような新しい積 $b\cdot c = \Sigma b_0c_0\sigma^{-1}(b_1, c_1) = \Sigma b_0c_0\phi(b_1c_1)\phi^{-1}(c_2)\phi^{-1}(b_2)$ を導入すると, B は associative algebra. これを ϕ で A に引き戻すことにより A に新しい積が定義でき, もとの coalgebra 構造とともに bialgebra となる. A が可換なら A^σ はある $\hat{\sigma}\in(A\otimes A)^*$に関して triangular となる. このようにして次の結果を得る:

[定理] A を一般の bialgebra とし, (B6) をみたす可逆な 2 次形式 σ: $A\otimes A\to k$ が与えられたとする. $x, y\in A$ に対して,

$$x\cdot y = \Sigma\sigma(x_1, y_1)x_2y_2\sigma^{-1}(x_3, y_3)\in A$$

とおくと, A はこの積・に関して bialgebra になる. ただし coalgebra 構造 Δ, ε は元のまま. この bialgebra を A^σ で表そう. A が Hopf algebra なら, A^σ もそうで, その antipode は

$$S^\sigma(x) = \Sigma\sigma(x_1, S(x_2))S(x_3)\sigma^{-1}(S(x_4), x_5).$$

もし A が可換なら, A^σ は 次の

$$\hat{\sigma}: A\times A\to k,\ (x, y)\mapsto\hat{\sigma}(x, y) = \Sigma\sigma(y_1, x_1)\sigma^{-1}(x_2, y_2)$$

に対して triangular bialgebra (or Hopf algebra) になる.

[補足] 一般の bialgebra A に対して, M^A における monoid B の左(または右)の actions([M, p170])の圏が, いわゆる relative Hopf modules の圏 ${}_BM^A$ (or M_B^A) と一致するを注意する. ここで $M\in{}_BM^A$ とは, M が左 B-module かつ右 A-comodule で "$\rho_M(bm) = \Sigma b_0m_0\otimes b_1m_1$, $b\in B, m\in M$" をみたすこと. M_B^A についても同様.

また, braided bialgebra (A, σ) に対して B が次の条件をみたすとき, <u>σ-commutative</u> (or quantum commutative) という:

$$\begin{array}{ccc} \sigma_{B,B}: B\otimes B & \longrightarrow & B\otimes B \\ m\searrow & & \swarrow m \\ & B & \end{array}$$

i.e.

$$bc = \Sigma c_0b_0\sigma(b_1, c_1),\ \forall b, c\in B.$$

このとき，明らかに不変環 $C = \{b \in B \mid \rho(b) = b \otimes 1\}$ は(普通の意味の)可換になる．
さらに，$M \in {}_BM^A$ に対して右からの B の作用を

$$m \leftharpoonup b := \sum b_0 m_0 \sigma(m_1, b_1), \quad m \in M, \ b \in B,$$

とおくと，$M \in {}_BM^A_B$ となる．また，$M, N \in {}_BM^A$ なら $M \otimes_B N \in {}_BM^A$ がいえる．ただし，

$$b \cdot (m \otimes_B n) = bm \otimes_B n \quad \text{and} \quad \rho(m \otimes_B n) = \sum m_0 \otimes_B n_0 \otimes m_1 n_1.$$

従って，$({}_BM^A, \otimes_B, B)$ は monoidal category の構造をもつ．

σ-commutative な A-comodule algebra の一般的研究が強く望まれる．

参考文献

[D] Y. Doi: Braided bialgebras and quadratic bialgebras, preprint.

[DT1] Y. Doi and M. Takeuchi: Cleft comodule algebras for a bialgebra. Comm. Alg. 14(1986), 801-817.

[DT2] Y. Doi and M. Takeuchi: Galois extensions of algebras, the Miyashita-Ulbrich actions, and Azumaya algebras, J. Alg. 121(1989), 488-516.

[H] T. Hayashi: Quantum groups and quantum determinants, preprint.

[LT] R. Larson and J. Towber: Two dual classes of bialgebras to the concepts of "quantum group" and "quantum Lie algebras", Comm. Alg. 19(1991), 3295-3345.

[M] S. MacLane: Categories for the working mathematicians, Springer, 1971.

[S] M. E. Sweedler: Hopf algebras, New York, 1969.

[T1] M. Takeuchi: A two-parameter quantization of GL(n), Proc. Japan Acad. 66(1990).

[T2] M. Takeuchi: Matric bialgebras and quantum groups, Isreal J. Math. 72(1990), 232-251.

[Y] D. Yetter: Quantum groups and representations of monoidal categories, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 108(1990), 261-289.

Coxeter graphs and fusion algebras

河野俊丈　(東大数理)

このノートは、fusion algebra の組合せ論的側面についての解説である。第 1 節では、A 型の fusion algebra の定義と基本的な性質を述べる。第 2 節で、Coxeter graph による fusion algebra の構成、affine Lie 環の Dynkin diagram automorphism による対称性、fusion algebra の自己同型などを議論し、さらに modular invariant な分配関数についての ADE classification との関連について触れる。

1. A 型の fusion algebra と Verlinde formula

この節では　A 型 Lie 環に対応した fusion algebra の定義と主な性質を述べる。これは、$sl(n, \mathbf{C})$ の表現環 R_nのある quotient algebra として以下のように定義される。まず、レベルとよばれる正整数 Kを固定する。$sl(n)$ の基本ウェイトを$\Lambda_1, \cdots, \Lambda_{n-1}$ とおくと、dominant integral weight の集合は、

$$P_+(n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} a_i \Lambda_i \quad ; \quad a_i \in \mathbf{Z}, a_i \geq 0 \right\}$$

と表される。また、affine Lie algebra $\widehat{sl(n)}$の level K dominant integral weight の集合は、

$$P_+(n, K) = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} a_i \Lambda_i \quad ; \quad a_i \in \mathbf{Z}, a_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n-1} a_i \leq K \right\}$$

と同一視される。自然な inclusion map $P_+(n, K) \subset P_+(n, K+1)$ を考え

$$\partial P_+(n, K) = P_+(n, K+1) \setminus P_+(n, K)$$

とおく。　表現環 R_nは、$\lambda \in P_+(n)$ を $\mathbf{Z}$ basis として持つが、$\partial P_+(n, K)$ で生成される R_nのイデアルを $I_{n,K}$と書く。　このとき、fusion algebra $R_{n,K}$を $R_{n,K} = R_n / I_{n,K}$ と定義する。

表現環 R_n において$\lambda, \mu \in P_+(n)$ の積を

$$\lambda \cdot \mu = \sum_{\nu \in P_+(n)} \overline{N}^{\nu}_{\lambda\mu} \nu$$

と表すと、この構造定数は Littlewood-Richardson 係数であり、$sl(n)$ の表現のテンソル積の分岐則にほかならない。$R_{n,K}$ は [GW] により、$\lambda \in P_+(n, K)$ を $\mathbf{Z}$ basis として持つ free $\mathbf{Z}$ module であることが知られている。

積構造を$\lambda, \mu \in P_+(n, K)$ に対して、

$$\lambda \cdot \mu = \sum_{\nu \in P_+(n,K)} N^{\nu}_{\lambda\mu} \nu$$

で表す。この構造定数 $N^{\nu}_{\lambda\mu}$を fusion rule とよぶ。これは、non-negative integer となり次の不等式が知られている。

$$N^{\nu}_{\lambda\mu} \leq \overline{N}^{\nu}_{\lambda\mu}$$

$P_+(n, K)$ には、$\hat{\lambda} = -w(\lambda)$ で定義される involution が存在する。ここで w は、Weyl 群の longest element を示し、$\hat{\lambda}$ はλを highest weight とする表現の双対表現に対応する。$N_{\lambda\mu\nu} = N^{\hat{\nu}}_{\lambda\mu}$ とおくと次の性質が成り立つ。

(1) $N_{\lambda\mu\nu}$ は、λ, μ, ν について対称である。

(2) $N^{\nu}_{0\lambda} = \delta_{\lambda\nu}$

$P_+(n, K)$ の元λについて level K integrable highest weight module $L(\lambda)$ を考え、その指標をχ_λとおく。conformal weight Δ_λ, central charge c をそれぞれ、次のようにおく。

$$\Delta_\lambda = \frac{\langle \lambda, \lambda + 2\rho \rangle}{2(K+n)}, \quad c = \frac{K \dim sl(n, \mathbf{C})}{K+n}$$

ここで、ρは $sl(n, \mathbf{C})$ の positive root の和の 1/2 を示す。Kac-Peterson により$\chi_\lambda(\tau), \lambda \in P_+(n, K)$, $Im\,\tau > 0$ は、modular 群の作用で閉じていることが知られていて、とくに

$$\chi_\lambda(-1/\tau) = \sum_{\mu \in P_+(n,K)} S_{\lambda\mu} \chi_\mu(\tau)$$

$$\chi_\lambda(\tau + 1) = \exp 2\pi\sqrt{-1}(\Delta_\lambda - \frac{c}{24})\chi_\lambda(\tau)$$

ここで、

$$S_{\lambda\mu} = \frac{i^{n(n-1)/2}}{\sqrt{n(n+K)^{n-1}}} \sum_{w \in W} \det w \exp\left(-\frac{2\pi i}{K+n}\langle w(\lambda+\rho), \mu+\rho\rangle\right)$$

である。 またWは Weyl 群で $sl(n, \mathbf{C})$ の weight lattice に作用する。上の変換の表現行列をそれぞれ S, Tとするとこれらは unitary symmetric で次の基本関係が成立する。

$$(ST)^3 = S^2 = (\delta_{\lambda\hat{\mu}})$$

このとき、fusion rule をS行列を用いて表すのが次の Verlinde formula である。

Proposition (Verlinde formula).

$$N_{\lambda\mu}^{\nu} = \sum_{\alpha \in P_+(n,K)} \frac{S_{\lambda\alpha} S_{\mu\alpha} S_{\nu\alpha}^{*}}{S_{0\alpha}}$$

Verlinde formula の代数的意味は、以下の通りである。Fusion algebra $R_{n,K} \otimes \mathbf{C}$ の基底を変換して

$$w_\lambda = S_{0\lambda} \sum_{\mu} S_{\lambda\mu} \mu$$

を基底にとるとこれらは、idempotent となる。すなわち

$$w_\lambda \cdot w_\mu = \delta_{\lambda\mu} w_\lambda$$

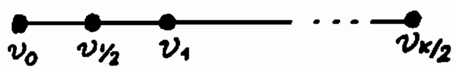
が成立する。また、行列 N_λを $N_\lambda = (N_{\lambda\mu}^{\nu})_{\mu\nu}$で定義すると、これらは行列 Sによって同時対角化され、それらの固有値は、

$$\left(\frac{S_{\alpha\lambda}}{S_{\alpha 0}}\right), \alpha \in P_+(n,K)$$

で与えられる。

2. Coxeter graph と fusion algebra の自己同型

まず、最も基本的な場合として $sl(2,\mathbf{C})$ の場合を取り上げる。 Fusion algebra $R_{2,K}$ を R_K と書き、spin j 表現に対応する R_K の基底を v_j, $j = 0, 1/2, 1, \cdots, K/2$ で表す。R_K は、次の Coxeter graph から構成される。



上のように、graph の各頂点に R_K の基底を対応させ、graph の incidence matrix $Y = 2I - C$ を考える。ここで、C は A_K 型の Cartan 行列である。この時、次が成立する。

Proposition

R_K は、v_j, $0 \leq j \leq K/2$, $(v_0 = 1)$ を生成元として incidence matrix $Y = (Y_{ij})$ を用いた関係式

$$v_j \cdot v_{1/2} = \sum_i Y_{ij} v_i$$

で表示される。

これを用いて R_K についての Verlinde formula の証明は次のようになされる。まず incidence matrix Y は $N_{1/2}$ に等しいことに注目する。 S 行列はこの場合

$$S_{ij} = \sqrt{\frac{2}{K+2}} \sin \frac{(2i+1)(2j+1)\pi}{K+2}$$

で与えられるが、Y が S によって対角化されその固有値が

$$\xi_j = \frac{S_{j,1/2}}{S_{j0}} = 2\cos\frac{(2j+1)\pi}{K+2}$$

となることは、初等的に示される。また上の Proposition より N_j は $N_{1/2}$ のある多項式で表されるので、これらは S によって同時対角化される。以上により、$sl(2,\mathbf{C})$ の場合の Verlinde formula が示された。

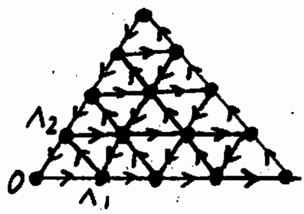
Remark. (1) R_K の構造定数 N_{ij}^k は Clebsch-Gordan 条件

$$|i-j| \leq k \leq i+j, \quad i+j+k \in \mathbf{Z}$$

に加えて、$i+j+k \leq K$ が満たされる時に 1 で、他の場合は 0 となる。これは、$SU(2)$ level K Wess-Zumino-Witten model の fusion rule と一致する ([TK]) 。

(2) Y の Perron-Frobenius 固有値 $2\cos\frac{\pi}{K+2}$ の 2 乗は、上の Coxeter graph に対応した tower of algebra の Jones index に等しい。これに関連した話題については [GHJ] を参照されたい。

Lie 環 $sl(n, \mathbf{C})$ に付随した fusion algebra $R_{n,K}$ も同様に vector 表現のテンソル積についての分岐則を示す graph の incidence matrix から構成される。 例として $R_{3,3}$ の場合を示した。図のような向きのついた graph の incidence matrix を考える必要がある。



次に fusion algebra の自己同型について考察する。$P_+(n, K)$ には、type $A_{n-1}^{(1)}$ の extended Dynkin diagram の Dynkin diagram automorphism σ が自然に作用する。具体的には、Coxeter 変換 $\mathbf{C}$ を用いて

$$\sigma(\lambda) = \mathbf{C}\lambda + K\Lambda_1$$

と表せ、これは巡回群 $\mathbf{Z}_n$ の作用を引き起こす。この作用について次が成立する。

Proposition

$$N_{\sigma^i(\lambda)\sigma^j(\mu)}^{\sigma^{i+j}(\nu)} = N_{\lambda\mu}^{\nu}$$

$$\Delta_{\sigma(\lambda)} - \Delta_\lambda = \frac{1}{n}\{\frac{K(n-1)}{2} - |\lambda|\}$$

$$S_{\sigma(\lambda)\mu} = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}|\lambda|}{n}\right) S_{\lambda\mu}$$

ここで、$\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \Lambda_i$ について $|\lambda| = \sum_{i=1}^{n-1} i a_i$とおいた。これは、対応する Young 図形の node の個数である。

上の Proposition の応用として $sl(2,\mathbf{C})$ に付随した fusion algebra R_K の自己同型について述べる ([DV] 参照)。$K \equiv 2\ mod 4$ として次のように定義される$\alpha : P_+(2,K) \to P_+(2,K)$ を考える。

$$\alpha(j) = \begin{cases} K/2 - j, & j \in \mathbf{Z} + 1/2 \\ j, & j \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

これは fusion algebra の自己同型であり実際

$$N_{\alpha(i)\alpha(j)}^{\alpha(k)} = N_{ij}^{k}$$

が成立する。さらに、conformal weight 、S行列についても

$$\exp 2\pi\sqrt{-1}\Delta_{\alpha(j)} = \exp 2\pi\sqrt{-1}\Delta_j, \quad S_{\alpha(i)\alpha(j)} = S_{ij}$$

が満たされる。この自己同型による quotient algebra $R_K/(\alpha)$ は今までに述べてきた fusion algebra の性質を満たしている。

この構成は Cappelli, Itzykson, Zuber[CIZ] による modular invariant partition function の分類と次のように関連する。$A_1^{(1)}$型の affine Lie 環の level K character をχ_λ, $\lambda = 2j+1$, $\lambda = 1, 2, \cdots, K+1$ とおく。このとき　$Z = \sum_\lambda \chi_\lambda \overline{\chi_\lambda}$ は $SL(2,\mathbf{Z})$ の作用で不変である。さらに上の構成を用いて得られる

$$Z^\alpha = \sum_\lambda \chi_\lambda \overline{\chi}_{\alpha(\lambda)}$$

もまた modular invariant である。　[CIZ] では$\sum \chi_\lambda \Pi_{\lambda\mu} \overline{\chi_\mu}$ が modular invariant となるようなΠの分類を行いいわゆる ADE classification に到達した。ここで述べた Z^αは $K = 4N-2$ とおいた時、D_{2N+1}型に対応している。

Fusion algebra の level-rank duality については、[GN], [KN], [NT], [MNRS] などで論じられている。Fusion algebra の物理的背景については、[GW], [V] などを参照されたい。[K] では、fusion algebra から得られる mapping class group の表現を用いて 3 次元多様体の不変量の構成がなされている。また [KT] で fusion algebra の symmetry の 3 次元多様体への応用が調べられている。[T] において Verlinde formula の量子群の 1 のべき根における表現の観点からの証明が与えられている。

References

[CIZ] A. Cappelli, C. Itzykson and J. B. Zuber, The A-D-E classification of minimal and $A_1^{(1)}$ conformal invariant theories, Commun. Math. Phys. 113 (1987) 1-26.

[DV] R. Dijkgraaf and E. Verlinde, Modular invariance and the fusion algebra, in Proceeding of the Annecy Conference on Conformal Field Theory, 1988.

[GeW] D. Gepner and E. Witten, Nucl. Phys. B278 (1986) 493.

[GHJ] F. M. Goodman, P. de la Harpe and V. F. R. Jones, Coxeter graphs and towers of algebras, MSRI Publication, Springer.

[GN] F. M. Goodman and T. Nakanishi, Phys. Lett. B262 (1991) 259.

[GW] F. M. Goodman and H. Wenzl, Advances in Math. 82 (1990) 244.

[K] T. Kohno, Topological invariants for 3-manifolds using representations of mapping class groups, Topology 31 (1992) 203-230.

[KT] T. Kohno and T. Takata, Symmetry of Witten's 3-manifold invariants for $sl(n, C)$, preprint.

[KN] A. Kuniba and T. Nakanishi, in Modern Quantum Field Theory, eds. A. Das et al., World Scientific 1991, 344–374.

[MNRS] E. Mlawer, S. Naculich, H. Riggs and H. Schnitzer, Nucl. Phys. B352 (1991) 863.

[NT] T. Nakanishi and A. Tsuchiya, Comm. Math. Phys. 114 (1992) 351.

[T] T. Takata, Invariants of 3-manifolds associated with quantum groups and Verlinde's formula, Publ. RIMS 28 (1992) 139-167.

[TK] A. Tsuchiya and Y. Kanie, Vertex operators in conformal filed theory on P^1 and monodromy representations of braid groups, Adv. Stud. Pure Math. 16 (1988) 297-372.

[V] E. Verlinde, Fusion rules and modular transformations in 2D conformal field theory, Nucl. Phys. B300 (1988) 360-376.

有限群のバーンサイド環

吉田知行 (YOSHIDA, Tomoyuki　熊本大・理)

1. 有限群のバーンサイド環

有限群のバーンサイド環が 1968 年に L.Solomon によって定義されて以来、24 年が経過した。バーンサイド環に関する論文は、5 年ほど前は 50 ほどですべてに目を通すことが出来た。しかしその後論文は急速に増え、今ではその数は 1000 を越えている。ただしこれらの論文は、群論に関係したものよりも、トポロジーに関係しているものが相当部分を占めている。

なぜバーンサイド環が重要なものか、という問に対する答は次である。

バーンサイド環とは、群作用を伴う数学における整数環である。

自然数、あるいは自然数の集合を定義するのにふた通りの方法がある。第 1 のものは Peano の公理系によるものであり、もうひとつは Dedekind によるものである。Dedekind は自然数を、有限集合の同型類とした。自然数 n と集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ を対応させるものである。自然数の集合が定義できれば、その Grothendieck 環 (ふたつの自然数の差の集合) として有理整数環 $\boldsymbol{Z}$ が定義される。

こうしてみると、有限群 G の作用を伴う理論における整数環の定義にも (少なくとも) ふた通りある事になる。Peano 式だとそれは単に自明な G-作用を持つ $\boldsymbol{Z}$ に他ならない。一方 Dedekind 式では、バーンサイド環が整数環という事になる。前者の立場に立って群作用を伴う数学理論を構築することは、ほとんど不可能なほどむずかしいと思う。(昔、こちらにのめり込んだことがあった。) 後者では、整数環が G-集合の範囲からはみ出している。それでも普通の数学をまねてかなりの程度数学を楽しむことができる。

以下、G を有限群とする。集合 X が (左) G-集合であるとは、G の作用

$$G\times X\longrightarrow X;\ (g,x)\longmapsto gx$$

があって、(i) $(gg')x=g(g'x)$ (ii) $1x=x$ $(x\in X,\ g,g'\in G)$ を満たすことをいう。

G-集合の間の写像 $f:X\longrightarrow Y$ が G-写像であるとは、$f(gx)=gf(x)$ $(x\in X,\ g\in G)$ が成り立つことをいう。G-集合と G-写像はカテゴリーを成す。以下ではもっぱら有限 G-集合を考える。

有限 G-集合は、軌道 (可移部分 G-集合) の直和に分割され、各軌道は G/H (H は G の部分群) の形の G-集合に G-同型である。さらに

$$G/H \cong_G G/K \iff K = gHg^{-1} \quad \exists g \in G$$

なので、結局任意の有限 G-集合 X は

$$X \cong_G \sum_{(H)\in C(G)} m_H(X)\cdot G/H$$

の形に一意的に分解される。ここで

$$C(G) := \{(H) \mid H \leq G\},$$
$$(H) := \{{}^gH \mid g \in G\}, \quad {}^gH := gHg^{-1}$$

とする。

さて有限群 G のバーンサイド環 $\Omega(G)$ とは、有限 G-集合のカテゴリーの (直和と直積に関する) Grothendieck 環である。したがって $\Omega(G)$ は加法群としては、$\{[G/H] \mid (H) \in C(G)\}$ を基底とする自由加群で、乗法はこの基底上で

$$[G/H]\cdot[G/K] = \sum_{HgK\in H\backslash G/K} [G/H \cap {}^gK]$$

で与えられる。

$R(G)$ を指標環とすると、G-集合に置換指標を対応させる環準同型

$$\mathrm{ch} : \Omega(G) \longrightarrow R(G); [G/H] \longmapsto 1_H^G$$

がある。したがって指標環も、群作用を伴う数学における整数環と考えることができる。

バーンサイド環に関する参考書としては、参考文献にあげた Dress の講義録、tom Dieck の本、Lewis らの本がある。

2. 群作用を持つ数学

問題: バーンサイド環 $\Omega(G)$ を群作用を持つ数学における整数環と見なしたとき、他の代数系を如何に定義するべきか。またそのような代数系に対する数学理論を作れ。

行列環、加群、環については、Hecke 環、kG-加群、G-多元環を取るのが普通である。しかしバーンサイド環を $\boldsymbol{Z}$ と見なすなら、いわゆる

Mackey functor (G-functor) が加群に相当すると考えた方がよい。詳細は代数学シンポジウムで述べる予定である。実行可能なプロジェクトとして、次がある。

問題: kG-加群のかわりに Mackey functor を用いてモジュラー表現論を再構成せよ。

最後にバーンサイド環が整数環であるとの立場に立っての多項式の定義に触れておこう。G-集合 N に対し、N-次の (非負係数の) 多項式を、G-写像 $\alpha : A \longrightarrow 2^N$ で定義する。ここで A は G-集合。任意の G-集合 X に対して、$\alpha : A \longrightarrow 2^N$ と

$$(1+X)^N \longrightarrow 2^N; f \longmapsto f^{-1}(*)$$

(ここで $1=\{*\}$ は 1-点集合) とのファイバー積

$$F(X) := A \times_{2^N} (1+X)^N$$

を取れば、より多項式らしい形になる。群作用がない場合は、写像 $\alpha : A \longrightarrow 2^N$ に対応する多項式は

$$F(X) = \sum_{R \subseteq N} |\alpha^{-1}(R)| X^{|N|-|R|}$$

となる。

整数係数の N-次多項式は、2^N 上の G-集合のカテゴリーの Grothendieck 群として定義すれば良い。そのような多項式に対しても、4 則、微分、バーンサイド環の元の代入、といったことが可能である。実際は多変数の多項式でありながら、あたかも 1 変数の多項式のように扱うことができる。群作用を持つ符号の理論への応用は、1988 年の数研で話したことがある。

群作用を伴う理論におけるさらに拡張された多項式の概念は、多項式を G-写像 $f : B \longrightarrow A$ と見る事である。積の定義はやや面倒である。丹原氏の論文参照。群作用がない場合 $f : B \longrightarrow A$ に対応する普通の多項式は、

$$\sum_{a \in A} x^{|f^{-1}(a)|}$$

である。

3. バーンサイド環に関する問題

バーンサイド環に関してたくさんの問題がある。

(1) 一般の群に対するバーンサイド環の構造。

・Spec($\Omega(G)$): これは A.Dress が決定し、induction 定理に応用した ([Dr 71])。

・ベキ等元公式: いろいろな可換環 R に対する $R\otimes\Omega(G)$ の原始ベキ等元の具体的公式は D.Gluck (1981), T.Yoshida (1983) が与えた。部分群束のオイラー標数や induction 定理への応用がある。

・単数群: トポロジーへの応用があるため、tom Dieck ([Di 79])、Matsuda ([Ma 82])、T.Yoshida ([Yo 90a]) などいくつかの研究がある。単数群 $\Omega(G)^*$ 自身 $\Omega(G)$-加群である。このような可換環は珍しいと思う。有理数に値を取る指標の成す加法群 $\overline{R}(G)$ から単数群 $\Omega(G)^*$ への自明でない群準同型が存在する ([Di 79], [Yo 90a])。バーンサイド環の乗法的構造 (単数群、Picard 群) については、研究の余地がおおいにある。

・ベキ等元の位数: 元 $e\in \boldsymbol{Q}\otimes\Omega(G)$ の位数とは、$ne\in\Omega(G)$ となる最小の自然数 n の事である。ベキ等元の位数について、Kratzer–Thévenaz や Dress らの研究がある。

・同型問題: ふたつの有限群 G と H に対し、$\Omega(G)$ と $\Omega(H)$ が環同型なら G と H は同型であろうか。一般には駄目だが、片方がアーベル群なら正しい。片方が単純群の場合を予想としてあげておく。

(2) 特別の群に対するバーンサイド環の構造。

・巡回群のバーンサイド環: 有限群が巡回群のときだけそのバーンサイド環はラムダ環になる (Siebeneicher)。無限巡回群の完備バーンサイド環は、ネックレス環、Grothendieck の普遍ラムダ環、Witt ベクトルの環に同型である ([DS 88], [DS 89]):

$$\hat{\Omega}(G)\cong Nr(\boldsymbol{Z})\cong\Lambda\cong W(\boldsymbol{Z}).$$

さらに自然な環準同型

$$w:\Omega(C_{|G|})\longrightarrow\Omega(G)$$

が存在する ([DSY 92])。

・有限アーベル群のバーンサイド環: アーベル群はバーンサイド環で特徴づけられる。しかしどのような可換環がアーベル群のバーンサイド

環になるか、さらにそのような環の構造からどうやってもとのアーベル群を決めるかはまだ十分分かっていない。同様の問題は p-群についても考えられるが、こちらの方はもっとむずかしい。

・有限生成自由群やモジュラ群 $PSL_2(\mathbb{Z})$ のバーンサイド環: 有限群ではないが、これらの群のバーンサイド環あるいはその完備化には興味がある。

・単数群: 可換なシロー 2-部分群を持つ有限群についてはバーンサイド環の単数群を計算することができる ([Yo 90a])。例えば、Janko の群については $|\Omega(J_1)^*| = 2^{13}$。非可換なシロー 2-群を持つ群 (例えば $PSL(2,q)$) について、その単数群を求める良い方法はまだない。

(3) バーンサイド環の応用

・合同式の証明: 有限群に関した 3 つの合同式がある。シローの定理、フロベニウスの定理、K.Brown の定理がそれである。フロベニウスの定理とは、有限群 G 上の方程式 $x^n = 1$ の解の個数が $(n, |G|)$ で割り切れる事を主張する。また Brown の定理は別名 Homological Sylow Theorem とも呼ばれ、有限群 G の p-部分群 $(\neq 1)$ の成す順序集合から作られる順序複体のオイラー標数が p を法として 1 に合同な事を主張している。B.Wagner は 1980 にシローの定理とフロベニウスの定理をバーンサイド環を用いて証明する事に成功した。バーンサイド環の応用として、Brown の定理の別証明や、部分群束のメビウス関数に関するいろいろな合同式が証明されている。[Wa 80], [Gl 81], [Yo 83], [Yo 92], [DSY 92] を参照の事。なおこれらの合同式については [Bt 88] も参照。

・Induction 定理: バーンサイド環 $\Omega(G)$ は表現環 $a(G)$ に

$$[G/H]\cdot[V] := \mathrm{ind}^G \mathrm{res}_H V$$

によって作用している。$\mathcal{S}$ を G の部分群の族で、部分群と共役に関して閉じたものとする。

$$\mathcal{HS} := \{H \leq G \mid O^p(H) \in \mathcal{S} \text{ for } \exists p\}$$

と置く。このとき次の Dress induction theorem が成り立つ:

$$a(G) = \mathrm{Im}(\mathrm{ind} : a(\mathcal{HS}) \longrightarrow a(G)) + \mathrm{Ker}(\mathrm{res} : a(G) \longrightarrow a(\mathcal{S}))$$

([Dr 71])。例えば、通常指標の環に応用すれば、Brauer の induction 定理の一歩手前の いわゆる hyper–elementary induction 定理が得られる。

バーンサイド環のベキ等元公式を用いるなら、explicit induction formula が得られる ([Yo 83])。Brauer の induction theorem の explicit formula については、Snaith ([Sn 88]) がある。

・equivariant topology への応用: これについての詳細は tom Dieck [Di 79], Lewis 他 [LMS 86] を参照。

・その他: Brauer は、いろいろな数体に対する Dedekind のゼータ関数 $\zeta_K(z)$ の間の関数等式を証明した。その簡単な別証明がバーンサイド環の応用として得られる。最近出版された Benson の本 ([Be 91]) にもあるように、有限群の表現論ではバーンサイド環は標準的な道具に成りつつある。群作用を持つ組み合わせ論への応用もある ([Yo 88], [Yo 87b])。有限群論への応用は合同式の他にはまだないようだが、有限群論の古典的結果の別証明にバーンサイド環の理論が使えれば面白い。例えば、Alperin の fusion 定理はいかにもバーンサイド環に関する何らかの transfer 定理を思わせる。

(4) バーンサイド環の一般化

あとで述べるように、バーンサイド環の一般化はいろいろある。それらに対しても、普通のバーンサイド環と同様の問題が考えられる。例えば [Yo 90b]。

4. バーンサイド環の基本定理

G の部分群 S に対し、環準同型

$$\varphi_S : \Omega(G) \longrightarrow \mathbf{Z}; [X] \longmapsto |X^S|$$

がある。ここで

$$X^S := \{x \in X \mid sx = x \quad (\forall s \in S)\}$$

とする。環準同型

$$\varphi := \prod \varphi_S : \Omega(G) \longrightarrow \tilde{\Omega}(G) := \mathbf{Z}^{C(G)}$$

をバーンサイド準同型と呼ぶ。さらに

$$\psi := (\overline{\psi}_H) : \tilde{\Omega}(G) \longrightarrow \mathrm{Obs}(G) := \prod_{(H)} (\mathbf{Z}/|WH|\mathbf{Z})$$

とする。ここで (H) は部分群の共役類を動き、$WH := N_G(H)/H$ で、

$$\overline{\psi}_H : x(\in \tilde{\Omega}(G)) \longmapsto \sum_{gH \in WH} x(\langle g \rangle H) \bmod |WH|$$

である。

$\tilde{\Omega}(G)$ を ghost 環、$\mathrm{Obs}(G)$ を obstraction の群、ψ を CFB-写像という。CFB は Cauchy-Frobenius-Burnside から取った。

基本定理: 次はアーベル群の完全系列である:

$$0 \longrightarrow \Omega(G) \xrightarrow{\varphi} \tilde{\Omega}(G) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Obs}(G) \longrightarrow 0.$$

特にバーンサイド環 $\Omega(G)$ は、直積環 $\tilde{\Omega}(G) = Z^{C(G)}$ の部分環に同型である。以下では $\Omega(G)$ を $\tilde{\Omega}(G)$ の部分環と見なす事が多い。

この定理からたくさんの結果がしたがう。

系: 単数群 $\Omega(G)^*$ は $\{\pm\}^{C(G)}$ の部分群に同型である。

系: $x \in \boldsymbol{Q} \otimes \tilde{\Omega}(G)$ なら

$$x = \sum_{(H)} \frac{1}{|WH|} \left(\sum_{S} \mu(H,S) x(S) \right) [G/H].$$

ここで μ は部分群束のメビウス関数。

系: $\boldsymbol{Q} \otimes \tilde{\Omega}(G)$ の原始ベキ等元は、

$$e_H := \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{D \leq H} |D| \mu(D,H) [G/D]$$

の形をしている。

$$\boldsymbol{Z}_{(p)} := \{a/b \in \boldsymbol{Q} \mid (b,p) = 1\}$$

と置く。

系: $\boldsymbol{Z}_{(p)} \otimes \Omega(G)$ の原始ベキ等元は、

$$e_Q^{(p)} := \sum_{(S): O^p(S) = Q} e_S$$

の形をしている。ここで $O^p(S)$ は指数が p ベキの最小の S の正規部分群で、Q は $O^p(Q)=Q$ を満たすものである。

次は基本定理からしたがうわけではないが、有用な結果である。

定理 ([DSY 92]) : 有限群 G に対し、環準同型

$$w:\Omega(C_{|G|})\longrightarrow\Omega(G)$$

が存在して、

$$w(x)(H)=x(C_{|H|}),\quad H\le G$$

となる。ここで C_n は位数 n の巡回群を表す。

系: 環準同型 $\widehat{\Omega}(\widehat{C}_\infty)\longrightarrow\Omega(G)$ が存在する。したがって、Mackey functor M に対し、$M(G)$ は $\widehat{\Omega}(\widehat{C}_\infty)$ 上の加群である。

前に述べたように、この無限巡回群の完備バーンサイド環 $\widehat{\Omega}(\widehat{C}_\infty)$ は、ネックレス環 $Nr(\boldsymbol{Z})$、普遍ラムダ環 $\Lambda=1+t\boldsymbol{Z}[[t]]$、Witt ベクトルの環 $W(\boldsymbol{Z})$ に同型である。

系 ([Wa 80]): $|G|$ の約数 n に対し、元 $x_n\in\Omega(G)$ が存在して、

$$x_n(H)=\begin{cases}|G|/n & |H|\text{ が } n \text{ の約数のとき}\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

となる。

実際 $x_n:=w([C_{|G|}/C_n])$ と置けばよい。

基本定理と上の奇妙な準同型の存在を使うと、シロー、フロベニウスそれに Brown の合同式が得られる。実際 $x_n\in\Omega(G)$ だから、CFB 準同型を使って

$$\begin{aligned}\psi_1(x_n)&\equiv\sum_{g\in G}x_n(\langle g\rangle)\\&\equiv\sharp\{g\in G\,|\,g^n=1\}\\&\equiv 0\mod |G|\end{aligned}$$

となる。これはフロベニウスの定理である。

次に x_n を展開すると、

$$\begin{aligned}x_n&=\sum_{(H)}m_H(x_n)[G/H]\\m_H(x_n)&=\frac{1}{|WH|}\sum_{|S||n}\mu(H,S)\frac{|G|}{n}\end{aligned}$$

$[G/H]$ の係数の整数性より、

$$\sum_{|S| | n} \mu(H,S) \equiv 0 \pmod{\frac{n|WH|}{|G|}}$$

なる合同式が得られる。特に $H=1, n=|G|_p$ とすれば、

$$1-\chi(\mathcal{S}_p) = \sum_P \mu(1,P) \equiv 0 \pmod{|G|_p}$$

となり、これは Brown の homological Sylow theorem である。ここで $\mathcal{S}_p$ は、p-部分群 $(\neq 1)$ のなす順序集合である。

同じく $n := |G|_p$ とし、Q を G の p-部分群とする。メビウス関数の性質により、

$$m_H(x_n) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad H \text{ は } p\text{-部分群}$$

である。さらに 置換群論の基本原理により、

$$\varphi_P([G/H]) \equiv \varphi_1([G/H]) = (G:H) \mod p$$

なので

$$m_H(x_n)\,\varphi_P([G/H]) \not\equiv 0 \Longrightarrow |H| = n.$$

つまり H は G のシロー p-部分群となる。さらに $|H|=n$ のとき、$m_H(x_n) = (G:N_G(H))$ で、

$$\begin{aligned}
\varphi_P([G/H]) &= \sharp\{gH \in G/H \mid P \subseteq gHg^{-1}\} \\
&= |WH| \cdot \sharp\{H' \sim_G H \mid P \subseteq H'\}
\end{aligned}$$

となる。($H' \sim_G H$ はふたつの部分群 H' と H の共役を意味する。) したがって、p を法として

$$\begin{aligned}
\frac{|G|}{n} &= \varphi_1(x_n) \equiv \varphi_P(x_n) \\
&= \sum_{(H):|H|=n} (G:NH)|WH| \cdot \sharp\{H' \sim_G H \mid P \subseteq H'\} \\
&= \frac{|G|}{n} \cdot \sharp\{H \leq G \mid P \subseteq H, |H| = n\}.
\end{aligned}$$

つまり、与えられた p-部分群 P を含むシロー p-部分群の個数は p を法として 1 に合同である。特にシローの定理が証明された。

ここで与えたようなバーンサイド環を用いたシローとフロベニウスの定理の証明は B.Wagner (1980) による。

K.Brown の Homological Sylow Thoerem

$$\chi(\mathcal{S}_p) \equiv 1 \pmod{|G|_p}$$

はいかにもシローの定理の精密化のような形をしている。しかし上の証明を見るとこの定理は、フロベニウスの定理と同値である。素朴な疑問だが、Brown のこの定理からシローの定理を導く事が出来るのだろうか。

5. バーンサイド環の一般化

(1) バーンサイド環の拡張もいろいろ試みられている。まず群の方を拡張するものとして次のふたつがある。

・コンパクト・リー群のバーンサイド環: T.tom Dieck はコンパクト・リー群 G に対するバーンサイド環 $\Omega(G)$ を、コンパクト G-空間 (あるいはコンパクト G-ENR) の同値類全体の集合として定義した。すべての閉部分群 H に対し、$\chi(X^H) = \chi(Y^H)$ のとき、X と Y は同値であると定義する。和と積は直和と直積で定義される。オイラー標数 -1 で自明な G-作用を持つコンパクト G-空間が存在するので、Grothendieck 環を作らずともこのままで $\Omega(G)$ は環になる。こうしてできたバーンサイド環の性質と応用については [Di 79] に詳しい。

・量子群のバーンサイド環: G を量子群 (ホップ代数) とする。有限 G-集合に当たるのはこの場合、G-加群の構造を持つ有限次元余代数であろう。このように G-集合を定義すれば、確かにバーンサイド環が定義できる。和は余代数の直積、積は余代数のテンソル積とする。しかしこの環は一般には可換でないし、基本定理も成り立たない。量子群のバーンサイド環がうまく定義できるためには、量子群にいくつかの条件 (R-行列の存在など) を加える必要がある。また G-集合の定義も変える必要がある。この方面は何の研究もされていない。

・抽象バーンサイド環: バーンサイド環の基本定理をもとにして、最も抽象化のレベルの高い抽象バーンサイド環なるものを定義できる。Γ を有限カテゴリーとする。すなわち $|\mathrm{Obj}(\Gamma)| < \infty$ かつ $|\Gamma(x,y)| < \infty$。Γ の対象は 小文字で表し、x から y への射の集合を $\Gamma(x,y)$ で表す。次のふたつの仮定を考える:

(F) 任意の射 $f : x \longrightarrow y$ は、全射と単射の合成:

$$f : x \xrightarrow{e} \mathrm{im}(f) \xrightarrow{m} y$$

として表せる。ここで e は全射、m は単射である。他にもこのような分解 $f = m'e'$ があれば、$\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathrm{im}(f))$ が存在して、$e' = \alpha e$, $m' = m\alpha^{-1}$ である。

(C) 任意の自己同型射 $\sigma \in \mathrm{Aut}(x)$ に対し、coequalizer diagram

$$x \underset{\sigma}{\overset{1}{\rightrightarrows}} x \longrightarrow x/\sigma$$

が存在する。

$\boldsymbol{Z}\Gamma$ を $\mathrm{Obj}(\Gamma)$ で生成された自由加群とする。$\boldsymbol{Z}^\Gamma$ を $\mathrm{Obj}(\Gamma)$ から $\boldsymbol{Z}$ への写像全体のなす環とする。バーンサイド準同型を

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \boldsymbol{Z}\Gamma & \longrightarrow & \boldsymbol{Z}^\Gamma \\ & ; & x(\in \Gamma) & \longmapsto & (i \mapsto |\Gamma(i,x)|) \end{array}$$

で定義する。このとき次が成り立つ。

定理: 仮定 (F) のもとで、$\varphi : \boldsymbol{Z}\Gamma \longrightarrow \boldsymbol{Z}^\Gamma$ は単射で、

$$\mathrm{coker}(\varphi) \cong \prod_{i \in \Gamma} (\boldsymbol{Z}/|\mathrm{Aut}(i)|\boldsymbol{Z})$$

である。

定理: (F), (C) を仮定し、CFB 写像 ψ を次で定義する:

$$\begin{array}{cccc} \psi & : & \boldsymbol{Z}^\Gamma & \longrightarrow & \displaystyle\prod_{i \in \Gamma} (\boldsymbol{Z}/|\mathrm{Aut}(i)|\boldsymbol{Z}) \\ & ; & \chi & \longmapsto & \left(\displaystyle\sum_{\sigma \in \mathrm{Aut}(i)} \chi(i/\sigma) \bmod |\mathrm{Aut}(i)| \right). \end{array}$$

このとき次が成立する。

(i) 次はアーベル群の完全系列:

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{Z}\Gamma \xrightarrow{\varphi} \boldsymbol{Z}^\Gamma \xrightarrow{\psi} \prod_{i \in \Gamma} (\boldsymbol{Z}/|\mathrm{Aut}(i)\boldsymbol{Z}) \longrightarrow 0.$$

(ii) $\boldsymbol{Z}\Gamma$ は、φ を単射環準同型とするような、ただひとつの (単位元を持つ) 環構造を持つ。

こうしてできた可換環 $\mathbb{Z}\Gamma$ を抽象バーンサイド環と呼ぶ。Γ の対象 x と y の直積 $x \times y$ が存在すれば、$x \times y$ は抽象バーンサイド環における x と y の積になる。上の定理は、終対象や直積が存在しない場合でも $\mathbb{Z}\Gamma$ が環になることを主張している。有限群 G について、可移 G-集合の同型類のカテゴリーの抽象バーンサイド環が $\Omega(G)$ に他ならない。上のふたつの条件を満たすカテゴリーとして、有限集合、有限アーベル群、ベキ零群、有限群、有限環、有限順序集合、有限全順序集合といったもののカテゴリー (及びそれらの双対) がある。

抽象バーンサイド環についても、素イデアル、原始ベキ等元が求められ、さらに フロベニウスや Brown 型の Homological Sylow Theorem がある。詳しいことは [Yo 87] を参照。

(2) 有限群のバーンサイド環の概念の拡張もいろいろある。

・一般バーンサイド環: $\mathcal{A}$ を有限群 G の部分群の集まりで、共役に関して閉じているものとする。$\{[G/H] \mid H \in \mathcal{A}\}$ で張られる $\Omega(G)$ の部分加群を $\Omega(G, \mathcal{A})$ とする。バーンサイド準同型を

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : \ \Omega(G,\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{C(\mathcal{A})} \\ & ; \quad [X] & \longmapsto & (|X^H|) \end{array}$$

で定義する。ここで

$$C(\mathcal{A}) := \{(H) \in C(G) \mid H \in \mathcal{A}\}.$$

$\mathcal{A}$ が共通部分に関して閉じていて G を含むなら、明らかに $\Omega(G, \mathcal{A})$ は $\Omega(G)$ の部分環である。しかしこの仮定がなくても $\Omega(G, \mathcal{A})$ が環構造を持つ事がある。次の条件を考えよう。

(F) $H \in \mathcal{A}, g \in N_G(H) \Longrightarrow \langle g \rangle H \in \mathcal{A}.$

定理 ([Yo 87]) : 仮定 (F) のもとで、$\Omega(G, \mathcal{A})$ は φ を環準同型にするようなただひとつの可換環の構造を持つ。

こうしてできた環 $\Omega(G, \mathcal{A})$ を一般バーンサイド環と呼ぶ。これについても普通のバーンサイド環と同様の結果や応用がある。例えば、上の条件 (F) を満たす部分群の族 $\mathcal{A}$ とその元 H に対し、

$$\sum_{S \in \mathcal{A}} \mu_{\mathcal{A}}(H, S) \equiv 0 \pmod{|WH|}$$

である。これは Brown の homological Sylow theorem の拡張と見なせる。

・単項表現の環: G を有限群とする。$\hat{}$: $X \longrightarrow \widehat{X}$ を、有限 G-集合のカテゴリーから単位的乗法半群のカテゴリーへの反変関手で、有限直和を直積に写すものとする。特に $\widehat{\emptyset} = 1$。このとき G の$\hat{}$に関する単項表現とは、対

$$(X, \lambda), \quad X \text{ は有限 } G\text{-集合、} \lambda \in \widehat{X}$$

のことである。ふたつの単項表現の間の射 $f : (X, \lambda) \longrightarrow (Y, \mu)$ とは、G-写像 $f : X \longrightarrow Y$ で、$\widehat{f}(\mu) = \lambda$ を満たすものである。

G の$\hat{}$に関する単項表現の環とは、単項表現のカテゴリーの (直和と直積に関する) Grothendieck 環のことである。これについてもバーンサイド環と同様の性質が成り立つ。ベキ等元公式から Brauer の induction 定理の explicit formula が得られると期待している。

6. あとがき

$\mathcal{S}_p$ を有限群 G の p-部分群 $(\neq 1)$ の成す順序集合とする。これについて Quillen の予想 (1978) がある:

Qullen 予想: $\mathcal{S}_p$ から作られる順序複体が可縮なら、$O_p(G) \neq 1$ (つまり G は自明でない正規 p-部分群を持つ)。

p-部分群の順序集合の研究がモジュラー表現論で重要になってきたためもあって、この予想へのいくつかの挑戦がなされている。

例えば Hawkes-Issacs 等のグループが、G が p-可解群なら予想が正しいことを証明した。もっと強く、$\chi(\mathcal{S}_p) = 1$ という仮定だけから $O_p(G) \neq 1$ を示している。

もうひとつの重要な予想として、Alperin 予想がある。

Alperin 予想:

$$l(G) = \sum_{(P)} f_0(WP)$$

ここで (P) は、G の p-部分群の共役類上を動く。また $l(G)$ は既役 p-モジュラー指標の個数 (= p'-元の共役類の個数)、$f_0(G)$ は defect 0 の p-ブロックの個数。さらに $WP := N_G(P)/P$ である。Robinson はこの予想を

$$f_0(G) = -l(\widehat{\Lambda}_G(\mathcal{S}_p))$$

と書き直した。

さて、群上の方程式 $x^n = 1$ の解の個数に関するフロベニウスの合同式と p-部分群束に関する K.Brown の Homological Sylow Theorem は、

バーンサイド環の理論からみると、ともに Wagner の元 x_n の存在からの帰結である。さらに追求すると、このふたつの定理は同値である。フロベニウスの定理は n が p のベキの場合に帰着できる。

ところで最近八牧氏等によって肯定的に解かれたフロベニウスの予想がある。n を $|G|$ の約数とし、

$$L(n) := \{x \in G \mid x^n = 1\}$$

と置く。フロベニウスの定理により、$|L(n)|$ は n の倍数である。フロベニウスの予想は

$$|L(n)| = n \Longrightarrow L(n) \trianglelefteq G$$

であることを主張している。

これらのことは、いろいろなことを想像させる。

・フロベニウス予想と Quillen 予想の間には何か具体的な関係があるだろう。例えば、Quillen 予想からフロベニウス予想を導けないだろうか。

・Quillen の予想の証明には、有限単純群の分類定理を使う必要があるだろう。なぜなら相棒のフロベニウス予想の証明には分類定理が必要だったから。Alperin 予想の方も分類が必要だろう。

・フロベニウス予想の弱い場合の結果として、フロベニウス群におけるフロベニウス核の存在定理がある。Quillen 予想についてもこれに対応する結果があるだろう。

・フロベニウスの定理には次の一般化がある: 有限アーベル群 A と有限群 G に対し、

$$|\mathrm{Hom}(A, G)| \equiv 0 \mod \gcd(|A|, |G|).$$

フロベニウスの定理は A が巡回群の場合であり、Brown の定理は A が基本可換 p-群の場合である。そうすると、Quillen 予想とフロベニウス予想を含むもっと大きな予想があるかも知れない。

・Alperin 予想はどこに位置するのだろう。講演の時点では、私は Quillen 予想と Alperin 予想は、密接な関係があると間違って思いこんでいた。両者の関係はまだはっきりしないようだ。しかしどちらも p-部分群束に関する予想なので関係があってもおかしくはない。

いくつかの断片的な (相互に矛盾する) 情報によると、Quillen 予想は近く解決しそうである。単純群の場合に帰着させ、あとは分類定理で片づ

けることになりそうだ。Alperin 予想も Dade の予想に帰着され、Dade は彼の予想を今論文に書いているという。こちらの方は、にわかには信じられない (信じたくない)。いずれにしても、どちらの予想も海外では相当の進展を見ているようである。日本における有限群論の研究者の奮起を期待する。

References

[Al 87] J.L.Alperin, Weights for finite gorups, Proc. Symp. Pure Math., **47** (1987), 369–379.,

[AK 90] M.Ascbacher–P.B.Kleidman, On a conjecture of Quillen and a lemma of Robinson, Arch.Math., **55** (1990), 209–217.

[Ar 82] S.Araki, Equivariant stable homotopy theory and idempotents of Burnside rings, Publ.R.I.M.S., Kyoto Univ., **18** ,(1982), 1193–1212.

[AY 9?] T.Asai–T.Yoshida, $|\mathrm{Hom}(A, G)|$ (II), J.Algebra, accepted.

[Be 91] D.J.Benson, "Representations and cohomology I, II", Cambridge University Press, Cambridge–New York, 1991.

[Bo 92] S.Bouc, Projecteurs dans l'anneau de Burnside, projecteurs dans l'anneau de Green, modules de Steinberg généralisés, J.Algebra, **139** (1992), 395–445.

[Br 75] K.Brown, Euler characteristics of groups : The p-fractional part, *Invent. Math.* **29** (1975), 414–430.

[BT 88] K.Brown–J.Thévenaz, A generalization of Sylow's third theorem, *J. Algebra* **115** (1988), 414–430.

[Co 68] S.B.Conlon, Decompositions induced from the Burnside algebra, J.Algebra **10** (1968), 102–122.

[Di 79] T.tom Dieck, "Transformation Groups and Representation Theory ", Lecture Notes in Math., **766**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979.

[Dr 71] A.W.M.Dress, ""Notes on the Theory of Finite Groups I: The Burnside Rings of a Finite Group and Some AGN Applications", multicopied lecture notes, Bielefeld University, 1971.

[Dr 73] A.W.M.DRESS, Contributions to the theory of induced representations, in "Algebraic K-theory (II)", Lecture Notes in Math., **342**, 183–240, Springer–Verlag, Berlin–New York 1973.

[Dr 86] A.W.M.DRESS, Congruence relations characterizing the representation ring of the symmetric group, J.Algebra, **101** (1986), 350–364.

[DS 88] A.W.M.DRESS–C.SIEBENEICHER, The Burnside ring of profinite groups and the Witt vector construction, *Advances in Math.*, **70** (1988), 87–132.

[DS 89] A.W.M.DRESS–C.SIEBENEICHER, The Burnside ring of the infinite cyclic group and its relations to the necklace algebra, λ-rings, and the universal ring of Witt vectors, *Advances in Math.*, **78** (1989), 1–41.

[DSY 92] A.DRESS–C.SIEBENEICHER–T.YOSHIDA, An application of Burnside rings in elementary finite group theory, *Advances in Math.*, **91** (1992), 27–44.

[DY 9?] A.DRESS–T.YOSHIDA, On p-divisibity of the Frobenius numbers of symmetric groups, to appear.

[Gl 81] D.GLUCK, Idempotent formulae for the Burnside algebra with applications to the p-subgroup simplicial complexes, *Illinois J.Math.*, **25** (1981), 63–67.

[HIO 90] T.O.HAWKES–M.ISAACS–ÖZAYDIN, On the Möbius function of a finite group, Rocky Mountain J.Math., **19** (1990), 1003–1033.

[IY 91] N.IIYORI–H.YAMAKI, On a conjecture of Frobenius, Bull. Amer. Math. Soc.(new series), **25** (1991), 413–416.

[KR 89] R.KNÖRR–G.R.ROBINSON, Some remarks on a conjecture of Alperin, J.London Math.Soc. **79** (1989), 48–60.

[LMS 86] L.G.LEWIS–J.P.MAY–M.STEINBERGER, "Equivariant Stable Homotopy Theory", Lecture Notes in Math., 1213, Springer–Verlag, Berlin–New York, 1986.

[Ma 82] T.MATSUDA, On the unit groups of Burnside rings, Japanese J.Math.(new series), **8** (1982), 71–93.

[MM 83] T.MATSUDA–T.MIYATA, On the unit groups of the Burnside rings of inite groups, J.Math.Soc.Japan, **35** (1983), 345–354.

[Qu 78] D.QUILLEN, Homotopy properties of the poset of non-trivial p-subgroups of a group, *Adv. in Math.*, **28** (1978), 101–128.

[Ro 88] Some remarks on permutation modules, J.Algebra **118** (1988), 46–62.

[Se 77] J.-P.SERRE, ""Linear representations of finite groups", Springer–Verlag, Berlin–New York, 1977.

[Ta 9?] D.TAMBARA, Muyltiplicative transfer and Mackey functors, to appear.

[Th 92a] J.THÉVENAZ, Polynomial identities for partitions, Europian J.Combinatorics **13** (1992), 127–139.

[Th 92b] J.THÉVENAZ, On a conjecture of Webb, Arch.Math. **58** (1992), 105–109.

[TW 91] J.THÉVENAZ–P.J.WEBB, Homotopy equivalence of posets with a group action, J.Comb.Theory (A) **56** (1991), 173–181.

[Wa 80] B.WAGNER, A permutation representation theoretical version of a theorem of Frobenius, *Bayreuther Math.* **6** (1980), 23 – 32.

[We 86] P.J.WEBB, Complexes, groupscohomology, and an induction theorem for the Green ring, J.Algebra **104** (1986), 351–357.

[We 87] P.J.WEBB, Subgroup complexes, in "Amer.Math.Soc.Proc.Symp. in Pure Math. ", **47** pp.349–365, Providence, RI, 1987.

[We 9?] P.J.WEBB, A split exact sequence for Mackey functors, to appear.

[Yo 83] T.YOSHIDA, Idempotents of Burnside rings and Dress induction theorem, *J. Algebra* **80** (1983), 90 – 105.

[Yo 85] T.YOSHIDA, Idempotents and transfer thoerems of Burnside rings, character rings and span rings, in "Algebraic and Topological Theories ", 589–615, Kinokuniya, Tokyo, 1985.

[Yo 87] T.YOSHIDA, On the Burnside rings of finite groups and finite categories, Advanced Studies in Pure Math. **11** (1987), ""Commutative Algebra and Combinatorics", 337–353.

[Yo 88] T.Yoshida, MacWilliams identities for linear codes with group action, 代数的組み合わせ論 (1988 京都), 数研講究禄 671, pp33–54.

[Yo 90a] T.YOSHIDA, On the unit gruops of Burnside rings, J. Math. Soc. Japan **42** (1990), 31–64.

[Yo 90b] T.YOSHIDA, The generalized Burnside ring of a finite group, *Hokkaido Math. J.* **19** (1990), 509 – 574.

[Yo 9?] T.YOSHIDA, $|\mathrm{Hom}(A, G)|$, *J.Algebra*, in printing.

有限群と量子群の表現論
— Dipper-James理論への新たな視点 —

つくば大・数系　竹内光弘

$G = GL_n(q) = GL_n(\mathbb{F}_q)$ （$q = p$の巾）とおく．Kを標数$\neq p$なる体とし，有限群GのK上の表現を考える．Bを上半三角行列全体のなすGのBorel部分群とする．

$$[B] = \sum_{b \in B} b$$

の生成する，群環KGの左イデアル$M = KG \cdot [B]$への表現

$$\psi : KG \longrightarrow \mathrm{End}_K(M)$$

の核$\mathrm{Ker}(\psi)$の上で0となるKGの表現をユニポテント表現とよぶ．これは，多元環$\psi(KG)$の表現に他ならない．

Gのユニポテント表現論は，James [1]に展開されている．この理論の多くの結果において，数qは素数の巾というよりあたかも一つのパラメータのように振舞う．つまり，qを単にKのnonzero元と思って意味のある結果が数多く含まれている．とくに$q = 1$とおいて得られる結果は，ある場合には

一般線形群のn次多項式表現に関する結果と一致し，ある場合にはn次対称群$\mathfrak{S}_n$の表現に関する結果を表わす．これは何故であろうか？また$q\in K$のnonzero元とみて意味のある結果とは，何の表現に関する結果を意味しているのだろうか？
Jamesの前掲書[1]に再三述べられているように，これは長らく謎であった．DipperとJamesの一連の共同研究により，この謎が解明され，上記の結果が，qに関して量子化された一般線形群のn次多項式表現，又はqに関する$\mathfrak{S}_n$のヘッケ環の表現についての結果を意味している事が明らかにされた．

一般線形群GL_dのn次多項式表現と対称群$\mathfrak{S}_n$の表現の間には密接な関係がある．$d\geq n$のとき両者はSchurの関手で結ばれ，Kの標数が0ならばこのSchur関手は圏の同値を与える（Green [2]参照）．上の謎を解く最初の手がかりとなったのは，対称群の表現論のヘッケ環への拡張である[3]．

左KG加群Mの準同形環$\mathrm{End}_{KG}(M)$をHとおく．但し，HはMの右に作用させMを${}_{KG}M_H$なる双加群とみなす．ブルバキ[4]にあるように，Hは，GとBのペアに対応する岩堀-ヘッケ代数$H_K(G,B)$に一致する．従ってHは，Bのdouble cosetsに対応する基底をもつ．$W=\mathfrak{S}_n$をGの置換行列全体とみなすとBruhat分解

$$G=\bigsqcup_{\pi\in W}B\pi B$$

により，$\mathcal{H}$はK上の基底T_π，$\pi\in W$をもつ事が従う．ここでT_πは[B]を[BπB]に写像するKG準同形を表わす．$\pi\in W$，$s=(i,i+1)$互換とすると，次の関係が成立つ．

$$
T_\pi T_s = \begin{cases} T_{\pi s} & \pi(i)<\pi(i+1) \\ qT_{\pi s}+(q-1)T_\pi & \pi(i)>\pi(i+1) \end{cases}
$$

この関係を用いて，ヘッケ環$\mathcal{H}$は$q=p$の中からKの任意のnonzero元qに一般化される．即ち，$q\in K^\times$に対し，T_π，$\pi\in W$を基底とするKベクトル空間は上の関係により，K上の多元環の構造をもつ．この多元環$\mathcal{H}_{K,q}(W)$をWの，qに関するヘッケ環とよぶ．群環KWのqアナログである．このヘッケ環$\mathcal{H}=\mathcal{H}_{K,q}(W)$は次の生成元と基本関係式による表示をもつ．

（生成元）基本互換$s_1,\cdots,s_{n-1}$に対応する$T_1,\cdots,T_{n-1}$．

（関係式）i）$(T_i-q)(T_i+1)=0$，$i=1,\cdots,n-1$．

ii）$T_iT_{i+1}T_i=T_{i+1}T_iT_{i+1}$，$i=1,\cdots,n-2$．

iii）$T_iT_j=T_jT_i$，$|i-j|>1$．

DipperとJamesは[3]でヘッケ環の表現論を展開した後，Schurの相互律に基いて，Schur代数のqアナログq-Schur

代数を[5]で導入し，qがpの巾の場合に，$G=GL_n(q)$のユニポテント表現との関係を論じた．q-Schur代数の表現論は[6]で整理して展開され，さらにDipper-Donkin[7]でGL_dの量子化との関係が明らかにされた．この報告では，歴史的順序より論理的順序を優先させ，量子群を先に述べる．

アフィン代数群GL_dの関数環は次の形をしている．

$$K[GL_d]=K[x_{11},\cdots,x_{dd}][det^{-1}].$$

これは可換なホップ代数の構造をもち，多項式環

$$A_K(d)=K[x_{11},\cdots,x_{dd}]$$

はそのsub-bialgebraである．GL_dの多項式表現は右$A_K(d)$-comodulesに他ならない．$A_K(d)$のn次成分$A_K(d,n)$は有限次元subcoalgebraである．その双対代数

$$S_K(d,n)=A_K(d,n)^*$$

をSchur代数とよぶ．従ってその表現はGL_dのn次多項式表現と完全に一致する．（Green[2]参照）．

GL_dの量子化は現在までに幾通りかのものが知られているが，ここでは筆者が[8]で構成した2変数の量子化を用いることにする．α,βを$K^\times$の元とする．多元環$A_{K,\alpha,\beta}(d)$を

d^2個の生成元$x_{11}, \cdots, x_{dd}$と次の関係式で定義する．

$$x_{ik}x_{ij} = \alpha x_{ij}x_{ik} \qquad \text{if} \quad j<k,$$

$$x_{jk}x_{ik} = \beta x_{ik}x_{jk} \qquad \text{if} \quad i<j,$$

$$x_{jk}x_{il} = \beta\alpha^{-1}x_{il}x_{jk}, \quad x_{jl}x_{ik} - x_{ik}x_{jl} = (\beta - \alpha^{-1})x_{il}x_{jk}$$

$$\text{if} \quad i<j, \quad k<l.$$

この多元環$A_{K,\alpha,\beta}(d)$は非可換な多項式環である．即ち，その生成元$x_{11}, \cdots, x_{dd}$を勝手な順序に並べると，その順に従う単項式の全体がK上の基底をなす．また$A_K(d)$の場合と同様なbialgebraの構造をもち，そのn次成分$A_{K,\alpha,\beta}(d,n)$は$A_K(d,n)$と等しい次元をもつsubcoalgebraである．行列式detに相当するgroup-like元が$A_{K,\alpha,\beta}(d)$に存在し，これはcentralではないがOreの方法により，この量子化detに関しlocalizeするとホップ代数がえられる．この非可換ホップ代数のあらわす量子群を，GL_dのα,βに関する量子化と考える．従って，右$A_{K,\alpha,\beta}(d)$-comodulesは，この量子群の多項式表現と理解される．一方，$A_{K,\alpha,\beta}(d)$のcoalgebra構造は積$\alpha\beta$のみによる事が知られている[9]．そこで$q = \alpha\beta$とおき

$$S_{K,q}(d,n) = A_{K,\alpha,\beta}(d,n)^*$$

をq-Schur代数とよぶことにする．その表現は，(α,βに関する)量子化GL_dのn次多項式表現に他ならない事になる．

このq-Schur代数は，Schurの相互律のqアナログを考える事によりヘッケ環$H=H_{K,q}(W)$と結びつく．Eをd次元Kベクトル空間とする．対称群$W=\mathfrak{S}_n$は次のように，$E^{\otimes n}$に右から作用する．

$$(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)\sigma = v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(n)}\ ,\quad \sigma\in W.$$

次の代数の同形が存在する（Schurの相互律）

$$S_K(d,n)\ \cong\ \mathrm{End}_{KW}(E^{\otimes n})$$

この相互律のqアナログは次のように構成される．$q=\alpha\beta$なる$\alpha,\beta\in K^{\times}$をとる．([7]では$\alpha=1,\beta=q$にとられている)．Eの基底$e_1,\cdots,e_d$をとる．$E^{\otimes n}$は基底

$$e_i = e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}\ ,\quad 1\leqslant i_a\leqslant d$$

をもつ．$s=(a,a+1)\in W$とする．T_sの$E^{\otimes n}$への作用を

$$e_iT_s=\begin{cases} qe_{is} & \text{if}\quad i_a = i_{a+1}\\ \beta e_{is} & \text{if}\quad i_a < i_{a+1}\\ (q-1)e_i+\alpha e_{is} & \text{if}\quad i_a > i_{a+1}\end{cases}$$

で定義すると，p.3 の関係式 i) ii) iii) が成立する．従って $E^{\otimes n}$ は右 $\mathcal{H}$ 加群の構造をもつ事になる．この加群の構造も，実は積 $\alpha\beta$ のみによる．そして次の代数の同形が存在する．

$$S_{K,q}(d,n) \cong \mathrm{End}_{\mathcal{H}}(E^{\otimes n}).$$

Green[2]では GL_d の多項式表現論を先に展開し，Schur の関手を通してそれから対称群 $\mathfrak{S}_n$ の表現論を引出している．そこで用いられた手法をそっくり量子化する事は困難と思われる．Dipper-James [3][5][6] はむしろ逆に，組合せ論的手法により，対称群の表現論をヘッケ環に拡張し，次いで上の同形を通して q-Schur 代数の表現論を導く戦略を採った．そのために右 $\mathcal{H}$ 加群 $E^{\otimes n}$ の構造を決める必要がある．

和が n である d 個の整数 $\geqq 0$ の列

$$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_d) \qquad \lambda_1 + \cdots + \lambda_d = n$$

の全体を $\Lambda(d,n)$ とおく．このような λ を，d parts からなる n の組成 (composition) とよぶ．さらに $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_d$ のとき，λ を n の分割 (partition) とよび，その全体を $\Lambda^+(d,n)$ で表わす．$E^{\otimes n}$ の基底を構成する元

$$e_i = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}, \quad 1 \leqslant i_a \leqslant d$$

が weight λ ($\lambda \in \Lambda(d,n)$) をもつとは，各 $1 \leqslant t \leqslant d$ に対し $i_a = t$ なる $1 \leqslant a \leqslant n$ が丁度 λ_t 個存在する事をいう．組成 λ は，1 から n までの整数の区間を次の d 個の区間に分割する．

$$\{1, 2, \cdots, \lambda_1\}, \{\lambda_1+1, \lambda_1+2, \cdots, \lambda_1+\lambda_2\}, \cdots, \{\lambda_1+\cdots+\lambda_{d-1}+1, \cdots, n\}.$$

これら d 個の区間の stabilizer Y_λ を λ に関する Young 部分群という．ヘッケ環 H の元 x_λ, y_λ を次のように定める．

$$x_\lambda = \sum_{\pi \in Y_\lambda} T_\pi, \qquad y_\lambda = \sum_{\pi \in Y_\lambda} (-q)^{-\ell(\pi)} T_\pi$$

ここで $\ell(\pi)$ は π の長さを表わす．これらは，Young (anti-) symmetrizer のそれぞれ q アナログである．weight λ をもつ e_i すべての K スパンは $E^{\otimes n}$ の右 H 部分加群で，H の右イデアル $x_\lambda H$ と同形である．従って右 H 加群として

$$E^{\otimes n} \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda(d,n)} x_\lambda H.$$

この同形と q-Schur 相互律 (p.7) から，q-Schur 代数を次のように一般化する事が思い浮ぶ．

Λ を n の組成の有限集合とする．但し，同じ組成が重複して現れることを許す．(厳密には，十分大きい d をとり，集合 Λ と写像 $\Lambda \longrightarrow \Lambda(d,n)$ のペアと定義する)．右 H 加群

$$M_\Lambda = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda \mathcal{H} \quad (\text{又は} \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda \mathcal{H})$$

の準同形環

$$S_\Lambda = \mathrm{End}_{\mathcal{H}}(M_\Lambda)$$

を，一般化したq-Schur代数とよぶ．Dipper-Jamesの導入した$S_{K,q}(d,n)$は$\Lambda=\Lambda(d,n)$の場合に対応する．

[6]に展開されているq-Schur代数の表現論はS_Λに拡張する事ができる．その表現論において，Weyl加群の構成及びすべての既約加群の実現が基本的である．q-Schur代数を上のように把握すると，Weyl加群は次のように定義される．

nの組成λの共役λ'を

$$\lambda'_a = \#\{b \mid \lambda_b \geqq a\}$$

で定義する．すると$x_\lambda \mathcal{H} y_{\lambda'}$はK上1次元になる[3]．そのK上の生成元$z_\lambda$を選び

$$W_\lambda = S_\Lambda z_\lambda \quad , \quad \lambda\in\Lambda$$

とおく（M_ΛのS_Λ部分加群)．これをλに対するWeyl加群とよぶ．classicalなWeyl加群はてきとうなstandard性をもつλ-tableauに対応する基底をもつ事が知られている[2]．そ

の完全な$\mathfrak{g}$アナログが成立する．とくにW_λの次元はK, $\mathfrak{g}$に関係しない[6]．$\lambda, \mu \in \Lambda$が互にpartsの並べかえで得られるならば$W_\lambda = W_\mu$である．Λに現れる組成のpartsを並べかえて得られるnの分割の集合をΛ^+とする．（S_ΛはS_{Λ^+}と森田同値である）．今の事から，$\lambda \in \Lambda^+$に対するWeyl加群W_λがwell-definedになる．

一方Weyl加群はhighest weight加群なので，W_λは唯一の極大部分加群W_λ^{max}をもつ．商加群

$$F_\lambda = W_\lambda / W_\lambda^{max}$$

は絶対既約である．（W_λ^{max}はある内積の根基として実現される）．

nの分割λ, μの間に次の順序$\trianglerighteq$を導入する．

$$\lambda \trianglerighteq \mu \iff \lambda_1 + \cdots + \lambda_a \geqq \mu_1 + \cdots + \mu_a, \ \forall a \geqslant 1.$$

定理．Λ^+は次の性質をもつとする．

$$\mu \in \Lambda^+, \ \lambda \trianglerighteq \mu \implies \lambda \in \Lambda^+$$

このとき，F_λ, $\lambda \in \Lambda^+$は既約S_Λ加群の完全代表系をなす．

$\Lambda(d, n)$は明らかに上の条件をみたす．

Λ^+は上の条件をみたすとして，$\lambda, \mu \in \Lambda^+$に対し$d_{\lambda\mu}$を

W_λ における F_μ の組成重複度とする．行列 $(d_{\lambda\mu})$ は q-Schur 代数 S_Λ のモジュラー表現論における分解行列である．この行列は

$$d_{\lambda\lambda}=1, \quad \lambda \not\trianglerighteq \mu \Rightarrow d_{\lambda\mu}=0$$

のいみで三角行列である．James [10] は $n \leqq 10$ までの分解行列（$\Lambda^+ = n$ の分割すべて）を計算している．結果として，それは K の標数と q の $K^\times$ における位数だけに依存する．そのことは一般に成立するであろうと思われる [10, §4].

$[i]=1+q+\cdots+q^{i-1}$ とおくとき，もし $[n][n-1]\cdots[1] \neq 0$ ならば，H と S_Λ は半単純になり，$F_\lambda = W_\lambda$ である．

ここで，冒頭の状況（$q=p$ の巾，char $K \neq p$）に戻り，$G=GL_n(q)$ のユニポテント表現と（上のように一般化された）q-Schur 代数 S_Λ の表現の関係について述べる．以下の説明は筆者のプレプリント [11] による．

体 K は 1 の原始 p 乗根を含むとする．このとき群環 KG の巾等元 e，及び n の組成の有限集合 Λ で，次の性質をみたすものが存在する．

i) 多元環 $\psi(KG)$ と $\psi(eKGe)$ は互に森田同値である．

ii) $\psi(eKGe) \cong S_\Lambda$，かつ Λ^+ は n の分割すべてからなる．

この内，i) の森田同値は次の関手で実現される．

$$\mathrm{mod}\ \psi(KG) \longrightarrow \mathrm{mod}\ \psi(eKGe) \quad , \quad V \longmapsto eV$$

(この関手がカテゴリー同値であることは，任意の既約 $\psi(KG)$ 加群 F に対し，$eF \neq 0$ となることである [2, 才6章]).

従って多元環 $\psi(KG)$ は q-Schur 代数 S_Λ と森田同値である．後述のように e 及び Λ は体 K に依存しないので，modular reduction も含め，G のユニポテント表現論は S_Λ の表現論と全く一致する．とくに，G の既約ユニポテント表現は，n の分割と一対一に対応する．$K = \mathbb{F}_\ell$ $(\ell \neq p)$ に対する S_Λ の分解行列 $(d_{\lambda\mu})$ は，G のユニポテント表現の ℓ-モジュラー分解行列としての意味をもつことになる．このことは [5] の主結果の一つであった．

巾等元 e とラベリング Λ は次のように構成される．$\mathbb{F}_q$ の加法群から乗法群 $K^\times$ へのアーベル群準同形の全体を

$$\chi_1 = 1, \chi_2, \cdots, \chi_q$$

とする．整数の列 $c = (c_1, \cdots, c_{n-1})$, $1 \leq c_a \leq q$ に対応して，下半ユニポテント行列の部分群

$$U^- = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}$$

から $K^\times$ への群準同形 χ_c を次のように定める．

$$\chi_c(g) = \prod_{a=1}^{n-1} \chi_{c_a}(g_{a+1,a}) \quad , \quad g = (g_{ab}) \in U^-.$$

この乗法的指標 χ_c から，直交巾等元の族

$$e_c = |U^-|^{-1}\sum_{g\in U^-}\chi_c(g)g \quad \in KG$$

が定まる．すべての c に対する和 $\sum_c e_c$ を e とおく．これは

$$e = |(U^-, U^-)|^{-1}\sum_{g\in(U^-,U^-)} g$$

に等しい．各 c に対し，n の組成 λ^c が存在して

$$e_cM \cong \mathcal{Y}_{\lambda^c}\mathcal{H} \quad (\text{右}\mathcal{H}\text{加群として})$$

が成立つ．λ^c は次のように記述される．$c_a = 1$ なる $1 \leqslant a \leqslant n-1$ を大きさの順に $a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}$ とする．

$$\lambda^c = (a_1, a_2 - a_1, \cdots, a_{k-1} - a_{k-2}, n - a_{k-1}).$$

例．$c=(1,\cdots,1)$ なら $\lambda^c = (1,\cdots,1)$．$c=(2,\cdots,2)$ なら $\lambda^c = (n)$．

明らかに，任意の分割は λ^c の形にあらわされる．λ^c は c_a が 1 か 1 でないかで決るので，同じ組成が多くの c によってあらわされる．Λ をすべての c に対する組成 λ^c の族とする．右 $\mathcal{H}$ 加群として次の同形が成立つことになる．

$$eM \cong \bigoplus_c \mathcal{Y}_{\lambda^c}\mathcal{H} \quad (\text{又は} \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{Y}_\lambda\mathcal{H}).$$

ここで，Schurの相互律のユニポテント版が成立つ．

定理[11]．自然な代数写像

$$\psi : eKGe \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{H}}(eM)$$

は全射である．

もしかしたら，$e=1$として全射性が成立するのかもしれない（[11]の初版には錯覚によりそのように記載してしまった．上のように修正する必要がある．）

このユニポテント版相互律から，多元環の同形

$$\psi(eKGe) \cong \mathrm{End}_{\mathcal{H}}(eM) \cong S_{\Lambda}$$

が従う．

Dipper-James理論の概要は，Dipperの最近のsurvey [12]に述べられている．[5]よりは整理して書かれているが，$GL_n(q)$の表現とq-Schur代数の表現の結びつきの説明は大変こみいっており分り難い．

$GL_n(q)$の表現とq-Schur代数の結びつきは単にユニポテント表現にとどまらない．$n=km$とする．体$\mathbb{F}_{q^k}$の$\mathbb{F}_q$上の生成元sをとると，カスピダル表現とよばれる$GL_k(q)$の表現が対応する．この表現からある巡回的な表現（$G=GL_n(q)$）

$$\psi_s : KG \longrightarrow \mathrm{End}_K(M_s)$$

が引起される．冒頭の$(\mathcal{Y}, M)$は$s=1$に対応する．この左KG加群M_sの準同形環は，q^k, $\mathfrak{S}_m$のヘッケ環$\mathcal{H}_{q^k}(\mathfrak{S}_m)$に同形であり，多元環$\mathcal{Y}_s(KG)$の表現は，（$n$でなく）$m$の分割に係る$q^k$-Schur代数の表現と結びつく[5][12]．上に説明した[11]の方法は，この一般化された場合にも有効ではないかと考えられる．

引用文献（番号は引用順）

[1] G. James, Representations of general linear groups, London Math. Soc. L.N. 94, Cambridge 1984.

[2] J. A. Green, Polynomial representations of GL_n, L.N. in Math. 830, Springer 1980.

[3] R. Dipper and G. James, Representations of Hecke algebras of general linear groups, Proc. London Math. Soc. (3)52(1986), 20-52.

[4] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4-6, Hermann, Paris 1968.

[5] R. Dipper and G. James, The q-Schur algebra, Proc. London Math. Soc. (3)59(1989), 23-50.

[6] R. Dipper and G. James, q-Tensor space and q-Weyl modules, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 327 (1991), 251-282.

[7] R. Dipper and S. Donkin, Quantum GL_n, preprint.

[8] M. Takeuchi, A two-parameter quantization of GL(n) (Summary), Proc. Japan Acad., 66, Ser. A (1990), 112-114.

[9] J. Du, B. Parshall and J.-P. Wang, Two-parameter quantum

linear groups and the hyperbolic invariance of q-Schur algebras, Proc. London Math. Soc., to appear.

[10] G. James, The deconposition matrices of $GL_n(q)$ for $n \leq 10$, Proc. London Math. Soc. (3)60(1990), 225-265.

[11] M. Takeuchi, Dipper-James theory from a new point of view, preprint.

[12] R. Dipper, Polynomial representations of finite general linear groups in non-describing characteristic, Progress in Math., Vol. 95 (1991), 343-370.

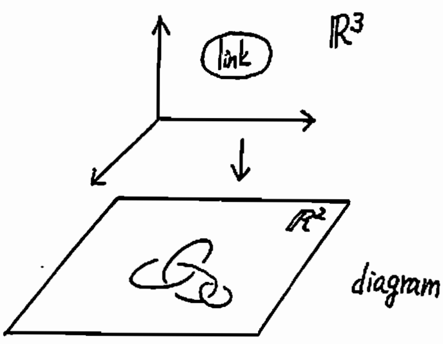
Hamming association schemes から作られる spin model I

九大 理　川越謙一

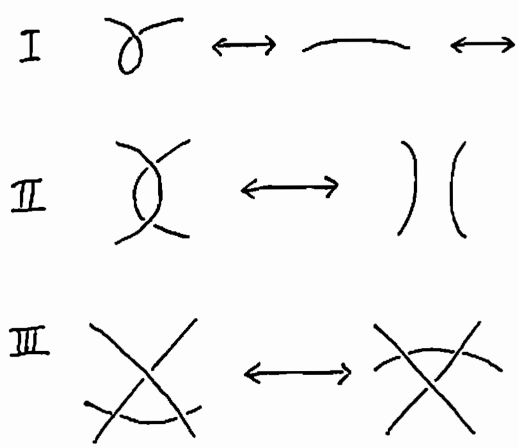
以下は九州大学の坂内英一先生，坂内悦子先生，生田卓也氏との共同研究で得られた結果です。

§1 Introduction to Knot Theory ([3])

link とは $\mathbb{R}^3$ (又は S^3) に embedded された n コの互いに disjoint な simple closed curves のことをいいます。特に、$n = 1$ の時を knot といいます。2つの link が同値とは、$\mathbb{R}^3$ の ambient isotopy で一方が他方に移りあう時にいいます。$\mathbb{R}^3$内で扱うのは難しいので、$\mathbb{R}^2$に射影して図示したものを考えます。これを link の diagram といいます。



ここで注意しなければいけないのは、linkのdiagramは一意的ではないということです。例えば、とはdiagramとしては異なりますが、$\mathbb{R}^3$内においては同じknotをあらわしています。そこでReidemeister move I, II, IIIと呼ばれるdiagram上のmoveで同値関係を導入します。



この時、$\{\text{diagram}\}/\sim \quad \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \quad \{\mathbb{R}^3\text{内の link}\}/\text{ambient isotopy}$

但し、$\sim$はReidemeister move I, II, III

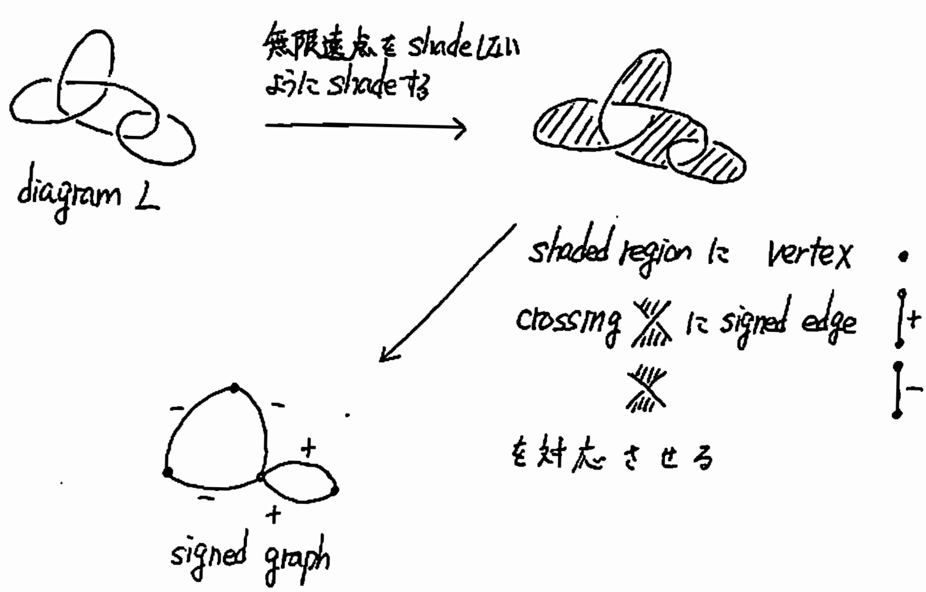
が成り立つことが知られています。Knot Theoryにおいて、knot又はlinkの分類問題というのがあります。そのためには不変量が必要ですが、その1つとして次の方法があります。まずdiagramから$\mathbb{C}$への写像Zを考えます。Zは$\{\mathbb{R}^3\text{内の link}\}$から$\mathbb{C}$への写像と自然に考えられますが、もしこの$Z$が

move I, II, III で変化しないなら、Z は $\{\mathbb{R}^3$内のlink$\}$/ambient isotopy から $\mathbb{C}$ への写像となります。これは Z が $\mathbb{R}^3$内のlinkの不変量になることを意味します。つまり、同値な2つのlinkに対して Z は同じ値をとります。次のsectionでこの方針から Z を構成します。

$$
\begin{tikzcd}
Z : \{\text{diagram}\} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C} \\
\{\mathbb{R}^3\text{内のlink}\}/\text{ambient isotopy} \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}
$$

§2、linkの不変量とspin model ([1], [2])

diagramから $\mathbb{C}$ への写像 Z を次の様にして定めます。



上の rule で diagram から signed graph が得られます。逆に signed graph からもとの diagram が回復されます。そこで、
X：有限集合，$|X|=n$，　$w^{\pm}: X\times X \to \mathbb{C}$ を考えます。
また写像 σ : { signed graph の vertices } $\to X$ を state ということにします。今 state σ が与えられた時、次の様にして signed graph に $\mathbb{C}$ 上の値 $\langle L|\sigma\rangle$ を対応させます。

「signed graph の各 edge $\overset{u}{\underset{v}{\pm}}$ に対し、$w^{\pm}(\sigma(u),\sigma(v))\in\mathbb{C}$ を対応させ、すべての edge に関する積を $\langle L|\sigma\rangle$ とかく」

この時、$Z_L := D^{-b(L)}\sum_{\text{states}}\langle L|\sigma\rangle$

但し、$D^2=n$
　$b(L)$ は shaded region の個数（= vertex の個数）
　$\sum$ はすべての state に関する和

と定義します。これで diagram から $\mathbb{C}$ への写像 Z が構成できましたが、かってな (X, w^+, w^-) をとってきたのでは link の不変量にはなりません。ここで (X, w^+, w^-) として次の条件を満たしているものを考えましょう。

X：有限集合，$|X|=n=D^2$，$0\neq a\in\mathbb{C}$ とし．$w^{\pm}: X\times X\to\mathbb{C}$ を $W^{\pm} := (w^{\pm}(\alpha,\beta))_{\alpha,\beta\in X}$: $n\times n$ 行列とみなします。

(X, W^+, W^-) が次の6つの条件を満たす時、spin model with loop variable D and modulus a とよびます。
(I は単位行列、J はすべての成分が1の行列)

(1) W^+, W^- は対称行列.

(2) $I \circ W^+ = aI$, $I \circ W^- = a^{-1}I$, 但し $\circ$ は Hadamard 積

(3) $JW^+ = Da^{-1}J$, $JW^- = DaJ$

(4) $W^+ \circ W^- = J$

(5) $W^+ \cdot W^- = nI$

(6) 任意の $(\beta, \gamma) \in X \times X$ に対し、$W^+ Y_{\beta\gamma} = D W^-(\beta,\gamma) Y_{\beta\gamma}$

但し、$Y_{\beta\gamma} = \begin{bmatrix} W^+(\beta,x) W^-(\gamma,x) \end{bmatrix}_{x \in X}$: $n \times 1$ ベクトル

この条件下で Jones は次のことを示しました。

Theorem (Jones)

(X, W^+, W^-) が spin model with loop variable D and modulus a の時.

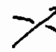
Z は Reidemeister move II, III で不変

一方、Reidemeister move I では $Z_{\gamma^-} = a Z_{-}$

$Z_{-\gamma} = a^{-1} Z_{-}$ □

move Ⅰで Z の値が変わるのでこのままでは R^3 内の link の不変量にはなりません。しかし向きのついた link を考えると次の様にして R^3 内の向きのついた link の不変量が構成できます。

$$R_L := a^{-w(L)} Z_L$$

但し、各 crossing  に $+1$  に -1 を対応させ、
すべての crossing に関する和をとったものを $w(L)$ とかき、
writhe とよぶ
Z_L は向きを忘れて計算する。

この時、R は R^3 内の向きのついた link の不変量となります。

§3、$H(d,q)$ から作られる spin model と link の不変量

Jaeger は [2] で spin model と self-dual association scheme とを関連づけました。我々はこのことを用いて Hamming association scheme $H(d,q)$ から spin model の例を構成しました。それは次の様にして与えられます。

$\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{0 \le i \le d})$: Hamming association scheme $H(d, g)$ とし

$W^{+} := \sum_{i=0}^{d} t_i A_i$, $W^{-} = \sum_{i=0}^{d} t_i^{-1} A_i$ とおきます.

但し、$\alpha^2 + (g-2)\alpha + 1 = 0$, $\alpha_0^3 = \dfrac{g^{\frac{d}{2}}}{(1+(g-1)\alpha)^d}$ とした時

$t_i = \sqrt{\alpha_0^3}\,\alpha^i$

A_i は relation R_i に関する adjacency matrix

Theorem

上の (X, W^{+}, W^{-}) は spin model with loop variable $\sqrt{n} = g^{\frac{d}{2}}$ and modulus t_0

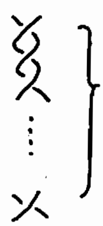
$\square$

詳しい証明は同報告集の坂内悦子先生の解説を参照して下さい。ここでは対応する link の不変量について述べます。$g = 1, 2, 3, 4$ の時は link の不変量としてはあまり面白くないので $g \ge 5$ を仮定します。W^{+} の最小多項式を $f(x)$ とすると

$$f(x) = (x - \sqrt{n}\,t_0^{-1})(x - \sqrt{n}\,t_1^{-1}) \cdots (x - \sqrt{n}\,t_d^{-1})$$

$$= (x - \sqrt{n}\sqrt{\alpha_0^3}^{-1} \cdot 1)(x - \sqrt{n}\sqrt{\alpha_0^3}^{-1}\alpha^{-1}) \cdots (x - \sqrt{n}\sqrt{\alpha_0^3}^{-1}\alpha^{-d})$$

$$\therefore\ f(x) = x^{d+1} - \sqrt{n}\sqrt{\alpha_0^3}^{-1}\Big(\sum_{i=0}^{d}\alpha^{-i}\Big)x^{d} + (\sqrt{n})^2\sqrt{\alpha_0^3}^{-2}\Big(\sum_{0\le i<j\le d}\alpha^{-i-j}\Big)x^{d-1} - \cdots + (-1)^{d+1}(\sqrt{n})^{d+1}\sqrt{\alpha_0^3}^{-d-1}\alpha^{-\frac{1}{2}d(d+1)}$$

ここで $L_n =$  n crossings　$\vec{L}_n =$  n crossings

とおくと、$f(x)$ の係数から

$$Z_{L_{d+1}} - \sqrt{\alpha_0^3}^{-1}\Big(\sum_{i=0}^{d}\alpha^{-i}\Big)Z_{L_d} + \sqrt{\alpha_0^3}^{-2}\Big(\sum_{0\le i<j\le d}\alpha^{-i-j}\Big)Z_{L_{d-1}} - \cdots + (-1)^{d+1}\sqrt{\alpha_0^3}^{-d-1}\alpha^{-\frac{1}{2}d(d+1)}Z_{L_0} = 0$$

$$\sqrt{\alpha_0^3}^{d+1}R_{\vec{L}_{d+1}} - \sqrt{\alpha_0^3}^{d-1}\Big(\sum_{i=0}^{d}\alpha^{-i}\Big)R_{\vec{L}_d} + \sqrt{\alpha_0^3}^{d-1}\Big(\sum_{0\le i<j\le d}\alpha^{-i-j}\Big)R_{\vec{L}_{d-1}} - \cdots + (-1)^{d+1}\sqrt{\alpha_0^3}^{-d-1}\alpha^{-\frac{1}{2}d(d+1)}R_{\vec{L}_0} = 0$$

が成立します。最近、Jaeger によりこの不変量は Jones polynomial の d 乗になるだろうと指摘されています。実際、$d=1,2$ の時は成り立ちます。

References

[1] F. Jaeger, Strongly regular graphs and spin models for the Kauffman polynomial, to appear in Geom. Dedicata.

[2] V. F. R. Jones, On knot invariants related to some statistical mechanical models, Pac. J. Math. 137 (1989) 311-336

[3] L. Kauffman, An invariant of regular isotopy, Trans. Amer. Math. Soc. 318 (1990), 417-471

Spin models constructed from Hamming association schemes, II

坂内悦子

岐阜の講演では、川越氏の講演（Spin models constructed from Hamming association schemes, I）の続きとして、Hamming association scheme $H(d, q)$ 上に spin model が構成出来ることの概略を話した。これは坂内英一・生田卓也・川越謙一との共同研究である。この証明の詳細については、講演直前に書き上げられたプレプリント：

Spin models constructed from Hamming association schemes $H(d,q)$, by Eiichi Bannai, Etsuko Bannai, Takuya Ikuta and Kenichi Kawagoe

をこの報告集に入れることにしたので、それを参照されたい。

その際、このプレプリントを何名かの研究者に送ったが、ここでの主結果：Hamming association scheme $H(d, q)$ に spin model の構造の入ることは、スピンモデルのテンソル積にスピンモデルの構造が入るという product construction からも直ちに証明出来るという comments を F. Jaeger と P. de la Harpe の両氏からもらった（1992年7月）。確か

にその方がはるかに簡単である。 またこのことから link の invariant は Jones 多項式の d 乗になることも直ちにわかる。 <u>従って、このプレプリント自体は雑誌には投稿しない予定である。</u> ただしこのプレプリントの中の ideas は後に色々な所に使われており、また途中の議論も捨てがたい魅力を持っていると思う。

SPIN MODELS CONSTRUCTED FROM THE HAMMING ASSOCIATION SCHEMES $H(d,q)$

Eiichi Bannai, Etsuko Bannai, Takuya Ikuta and Kenichi Kawagoe

Abstract: New spin models are constructed from the Hamming association schemes $H(d,q)$. A spin model is defined by V. F. Jones as a triple (X,w^+,w^-), where X is a finite set and w^+ and w^- are complex-valued functions on X^2 satisfying certain axioms. Regarding $W^+ = \left(w^+(\alpha,\beta)\right)_{\alpha\in X,\beta\in X}$ and $W^- = \left(w^-(\alpha,\beta)\right)_{\alpha\in X,\beta\in X}$ as matrices of size $|X|\times|X|$, F. Jaeger studies the algebra $\mathfrak{M}$ generated by W^+ and the matrix J, and proves that if the algebra $\mathfrak{M}$ is closed under Hadamard product, then $\mathfrak{M}$ becomes the Bose-Mesner algebra of a symmetric self-dual association scheme. Hence $W^+ = \sum_{i=0}^{d} t_i A_i$, where A_i is the adjacency matrix with respect to the relation R_i of the association scheme (and the t_i's are non-zero complex numbers). [Also, in this case Jaeger proves that the condition that (X,w^+,w^-) becomes a spin model can be given in terms of the corresponding association scheme.] So, starting from a (symmetric) self-dual association scheme, if we can find the numbers $t_i (i=0,1,\cdots,d)$ that satisfy certain conditions in the association scheme, then we obtain a spin model. In this paper, starting from the Hamming association schemes $H(d,q)$, we construct spin models which we belive to be new. Here, the numbers t_i are found from the work of the first two authors on the modular invariance of the character table of the association schemes $H(d,q)$. We have not yet studied the detailed properties of the link invariants obtained from these spin models. However, since the minimal polynomial of W^+ is of degree $d+1$ for $q\geq 5$, at least for $q \geq 5$ (and for large d), these link invariants are expected to be different from the ones expressed by Kauffman polynomials, and are hoped to give strong and useful new invariants. (Added later: comment by F. Jaeger and P. de la Harpe (July 1992). This invariant is equivalent to the d-th power of Jones polynomial.)

§ 1. Introduction

The following definition of spin model is essentially due to Jones[7]. (See also Jaeger [6, §2.2].)

Definition 1.1. *Let a be a non-zero complex number, n a positive integer, and D one of its square roots. A spin model with loop variable D and modulus a is a triple (X,w^+,w^-), where X is a finite set of size $n=D^2$ and w^+,w^- are complex-valued functions on X^2 which satisfy the following properties for all α,β,γ in X :*

(1) $w^+(\alpha,\beta)=w^+(\beta,\alpha)$, $w^-(\alpha,\beta)=w^-(\beta,\alpha)$.
(2) $w^+(\alpha,\alpha)=a$, $w^-(\alpha,\alpha)=a^{-1}$.

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

(3) $\sum_{x\in X} w^+(\alpha,x) = Da^{-1}$, $\sum_{x\in X} w^-(\alpha,x) = Da$.
(4) $w^+(\alpha,\beta)w^-(\alpha,\beta) = 1$.
(5) $\sum_{x\in X} w^+(\alpha,x)w^-(x,\beta) = n\delta(\alpha,\beta)$ *(where δ is the Kronecker symbol).*
(6) $\sum_{x\in X} w^+(\alpha,x)w^+(\beta,x)w^-(\gamma,x) = Dw^+(\alpha,\beta)w^-(\beta,\gamma)w^-(\gamma,\alpha)$.

Regarding $W^\pm = (w^\pm(\alpha,\beta))_{\alpha\in X,\beta\in X}$ as matrices of size $n\times n$, we reformulate the definition of spin model in terms of matrices in Proposition 1.2. The symbol $\circ$ denotes Hadamard product of matrices (i.e., the entry-wise product of two matrices of the same size). Furthermore, for (β,γ) in X^2 let $Y_{\beta\gamma}$ be the column vector indexed by X defined by

$$Y_{\beta\gamma}(x) = w^+(\beta,x)w^-(\gamma,x) \text{ for every } x \text{ in } X.$$

Also let I denote the identity matrix and J denote the matrix whose entries are all 1.

Proposition 1.2. *(X,w^+,w^-) is a spin model with loop variable D and modulus a if and only if the following properties hold:*

(1′) W^+ *and* W^- *are symmetric.*
(2′) $I\circ W^+ = aI$, $I\circ W^- = a^{-1}I$.
(3′) $JW^+ = Da^{-1}J$, $JW^- = DaJ$.
(4′) $W^+\circ W^- = J$.
(5′) $W^+W^- = nI$.
(6′) *For every* (β,γ) *in* X^2, $W^+Y_{\beta\gamma} = Dw^-(\beta,\gamma)Y_{\beta\gamma}$.

In Jaeger [6], the following two complex commutative algebras are associated to a spin model (X,w^+,w^-).

$\mathfrak{M}$ = the algebra generated by W^+ and J with product the ordinary matrix product,
$\mathfrak{H}$ = the algebra generated by W^- and I with product the Hadamard product.

It is shown in Jaeger[6, Proposition 3(i)] that there exists a natural algebra isomorphism ψ from $\mathfrak{M}$ to $\mathfrak{H}$ satisfying the conditions

$$\begin{aligned}\psi(W^+) &= DW^-,\\ \psi(I) &= J,\\ \psi(W^-) &= DW^+,\\ \psi(J) &= nI.\end{aligned}$$

Also, Jaeger [6, Proposition 3(ii)] proves that for every M in $\mathfrak{M}$, we have

$$\psi(M) = D^{-1}a^{-1}W^-\Big(W^+\circ(W^-M)\Big) = D^{-1}aW^+\Big(W^-\circ(W^+M)\Big).$$

Using this property, Jaeger[6, Proposition 4] obtained the following proposition.

Proposition 1.3. *If $\mathfrak{M}$ is closed under Hadamard product, then it is the Bose-Mesner algebra of a (symmetric) self-dual association scheme.*

The reader is referred to [3, 4, 5] for the definition of (symmetric) association scheme and the Bose-Mesner algebra. A symmetric associaiton scheme is called self-dual, if $P = Q$ (i.e., the first eigenmatrix is equal to the second eigenmatrix). (Note that the definition of a self-dual association scheme for general commutative association schemes should be $P = \bar{Q}$ where the bar denotes complex conjugation, but $\bar{Q} = Q$ in the symmetric case).

Remark. It is an interesting open question when the algebra $\mathfrak{M}$ is closed under Hadamard product. From the argument in Jaeger [6, § 3.1], it is easy to see that $\mathfrak{M}$ is closed under Hadamard product if W^+ and W^- satisfy the relation:

$$W^+ + \varepsilon W^- = z(DI + \varepsilon J)$$

for some complex number z and $\varepsilon = \pm 1$. Of course it seems that the condition $\mathfrak{M}$ is closed under Hadamard product is a very strong condition, and that there should exist many spin models which do not satisfy this condition. (For instance, in the examples constructed from $H(d, q)$ later in this paper, $\mathfrak{M}$ is not closed under Hadamard product if $q = 2$ and $d \geq 4$.)

Now, we consider the case when $\mathfrak{M}$ is closed under Hadamard product. Let $\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ be the associated (symmetric) self-dual association scheme. Let A_i be the adjacency matrix with respect to the relation R_i ($i = 0, 1, \cdots, d$). Let $\mathfrak{A} = \langle A_0, A_1, \cdots, A_d \rangle$ be the Bose-Mesner algebra of $\mathfrak{X}$. Also let $E_0 (= \frac{1}{n} J), E_1, \cdots, E_d$ be the primitive idempotents of $\mathfrak{A}$. (See [3, §2.3 - §2.4] etc.). Recall that the first eigenmatrix P (the character table of $\mathfrak{X}$) and the second eigenmatrix Q are defined by the following relations:

$$(A_0, A_1, \cdots, A_d) = (E_0, E_1, \cdots, E_d) \cdot P,$$
$$(E_0, E_1, \cdots, E_d) = \frac{1}{|X|}(A_0, A_1, \cdots, A_d) \cdot Q$$

(here $PQ = QP = nI$).

Proposition 1.3 implies that in a spin model in which $\mathfrak{M}$ is closed under Hadamard product, W^+ is expressed as follows:

$$W^+ = \sum_{i=0}^{d} t_i A_i$$

for some complex numbers t_i ($i = 0, 1, \cdots, d$). The condition (4) in Definition 1.1 implies that

$$W^- = \sum_{i=0}^{d} {t_i}^{-1} A_i$$

and that the t_i's are all non-zero numbers.

The following result is proved in Jaeger [6, Proposition 5], and we use this result crucially in what follows.

Proposition 1.4. *Let $\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ be a symmetric self-dual association scheme. Let*

$$W^+ = \sum_{i=0}^{d} t_i A_i \quad \text{(with } t_i \text{ non-zero for all } i\text{)}$$

be an element in the Bose-Mesner algebra $\mathfrak{A}$ of $\mathfrak{X}$, and let W^- be defined by

$$W^- = \sum_{i=0}^{d} t_i^{-1} A_i.$$

Then (X, w^+, w^-) is a spin model with loop variable D and modulus $a = t_0$ if and only if the following two conditions (7) and (8) hold.

$$PT = D\mathbf{T}^-, \tag{7}$$

$$E_i Y_{\beta\gamma} = 0 \quad \text{for all } i, j \in \{1, 2, \cdots, d\} \text{ such that } t_i \neq t_j \text{ and } (\beta, \gamma) \in R_j. \tag{8}$$

Here $\mathbf{T}$ and $\mathbf{T}^-$ are the column vectors defined by

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_d \end{pmatrix}$$

and

$$\mathbf{T}^- = \begin{pmatrix} t_0^{-1} \\ t_1^{-1} \\ \vdots \\ t_d^{-1} \end{pmatrix}.$$

(Namely, under the existence of the associated self-dual association scheme, the conditions (1)-(6) in Definition 1.1 are equivalent to the conditions (7) and (8) in Proposition 1.4.)

Remark. In Proposition 1.4, note that it is not necessary to assume that $\mathfrak{M} = \langle W^+, J \rangle$ is closed under Hadamard product.

Now, the problem which will be discussed in the present paper is as follows :

Problem. Take a symmetric self-dual association scheme $\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$. Then find the elements $W^+ = \sum_{i=0}^{d} t_i A_i$, satisfying the conditions (7) and (8) in Proposition 1.4.

We solve this problem affirmatively for the Hamming association schemes $H(d, q)$, which implies the construction of new spin models coming from the Hamming association schemes $H(d, q)$.

First we recall the definition of the Hamming association schemes $H(d,q)$. The reader is referred to [3, 4, 5] for further details. Let S be a finite set with cardinality any integer $q \geq 2$. Let $X = \{(x_1, x_2, \cdots, x_d) | x_i \in S\}$. (Hence $|X| = n = q^d$.) For $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d)$ and $y = (y_1, y_2, \cdots, y_d)$ in X, let $(x,y) \in R_i$ if and only if the Hamming distance between x and y is i, (that is, $\sharp\{j \mid x_j \neq y_j\} = i$) $(i = 0, 1, \cdots, d)$. Then $\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ is a symmetric association scheme and is called the Hamming association scheme. It is well known that the Hamming association scheme $H(d,q)$ is a self-dual association scheme (i.e., $P = Q$), and that the entries in P are expressed by Krawtchouk polynomials. That is,

$$P = \Big(P_j(i)\Big)_{\substack{0 \leq i \leq d \\ 0 \leq j \leq d}} = \Big(K_j(i)\Big)_{\substack{0 \leq i \leq d \\ 0 \leq j \leq d}},$$

where $K_j(\theta)$ is the Krawtchouk polynomial defined by

$$K_j(\theta) = \sum_{u=0}^{j} (-q)^u (q-1)^{j-u} \binom{d-u}{j-u} \binom{\theta}{u}.$$

The following result was obtained in Bannai-Bannai [2].

Proposition 1.5. *Let P be the character table of the Hamming association scheme $H(d,q)$. Then we have*

$$(PT)^3 = q^{\frac{3d}{2}} I$$

for the matrix

$$T = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \alpha & & & \\ & & \alpha^2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \alpha^d \end{pmatrix},$$

where α and α_0 are the numbers defined by the following relations:

$$\alpha^2 + (q-2)\alpha + 1 = 0 \quad \text{and} \quad \alpha_0^3 = \frac{q^{\frac{d}{2}}}{\Big(1 + (q-1)\alpha\Big)^d}.$$

(Generally, there are 6 choices for T. If $q = 4$, there are 3 choices for T as the equation $\alpha^2 + (q-2)\alpha + 1 = 0$ has double roots.)

(Note that the condition $(PT)^3 = q^{\frac{3d}{2}} I$ corresponds to the condition $(ST)^3 \doteq I$ for the fusion algebra at algebraic level corresponding to the Hamming association scheme, cf.[1] .)

The main purpose of this paper is to prove the following:

Theorem 1.6. *Let $\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{0\leq i\leq d})$ be the Hamming association scheme $H(d,q)$, and let A_i be the adjacency matrix with respect to the relation R_i $(i = 0, 1, \cdots, d)$. Let α_0, α be the numbers given in Proposition 1.5 above. Let us define*

$$t_i = \sqrt{\alpha_0{}^3}\alpha^i$$

(here $\sqrt{\alpha_0{}^3}$ means to take one of the square roots of the complex number α_0^3). Let us set

$$W^+ = \sum_{i=0}^{d} t_i A_i \text{ and } W^- = \sum_{i=0}^{d} t_i^{-1} A_i.$$

Then (X, w^+, w^-) is a spin model with loop variable $\sqrt{n} = q^{\frac{d}{2}}$ and modulus t_0.

§ 2. Proof of Theorem 1.6.(Reduction to Proposition 2.2)

In order to prove Theorem 1.6, we prove the following:

Theorem 2.1. *Let W^+ and W^- be as defined in the assumptions of Theorem 1.6. Let us set*

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_d \end{pmatrix} \cdot$$

and

$$\mathrm{T}^- = \begin{pmatrix} t_0{}^{-1} \\ t_1{}^{-1} \\ \vdots \\ t_d{}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Then we have the following relations :

$$P\,\mathrm{T} = \sqrt{n}\,\mathrm{T}^-, \tag{7}$$

$$E_i Y_{\beta\gamma} = 0 \text{ for any } (\beta,\gamma) \notin R_i. \tag{8'}$$

(Note that (8') is stronger than the condition (8) in Proposition 1.4. Therefore, by Proposition 1.4, Theorem 2.1 implies Theorem 1.6.)

Proof of Theorem 2.1.

Step 1. (Proof of (7).) Here we prove condition (7). Note that in this proof, no particular property of Hamming association scheme is used. So, this proof generalizes for any symmetric self-dual association schemes whose character table P has the modular invariance property.

The (i,j)-entry of $(PT)^3$ is given by

$$\alpha_0^3 \sum_{l,k=0}^{d} P_l(i)P_k(l)P_j(k)\alpha^{l+k+j}$$
$$= \delta_{ij} n^{\frac{3}{2}}.$$

Therefore,

$$\sum_{l,k} P_l(i)P_k(l)P_j(k)\alpha^{l+k} = \alpha_0^{-3}\alpha^{-j}\delta_{ij}n^{\frac{3}{2}}.$$

Summing over j, we have

$$\sum_{l,k} P_l(i)P_k(l)\sum_{j=0}^{d} P_j(k)\alpha^{l+k} = \alpha_0^{-3}\alpha^{-i}n^{\frac{3}{2}}.$$

Since $\sum_j P_j(k) = \delta_{k0}n$, we have

$$\sum_{l=0}^{d} P_l(i)P_0(l)n\alpha^l = \alpha_0^{-3}\alpha^{-i}n^{\frac{3}{2}}.$$

(Here $P_0(l) = 1$.) Thus we have

$$\sum_{l=0}^{d} P_l(i)t_l = \alpha_0^{-\frac{3}{2}}\alpha^{-i}\sqrt{n}$$
$$= \sqrt{n}t_i^{-1}.$$

This proves the condition (7).

Step 2. **(Proof of (8′).)** Here we want to prove the condition (8′) that $E_iY_{\beta\gamma} = 0$ for $\forall(\beta,\gamma) \notin R_i$. Since

$$E_i = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{d} P_i(j)A_j,$$

the condition (8′) is equivalent to the following condition

$$\text{(9)} \qquad \Big(\sum_{j=0}^{d} P_i(j)A_j\Big)Y_{\beta\gamma} = 0 \quad \text{for } \forall i \ (1 \le i \le d).$$

The x-entry of the LHS of (9) is given by

$$\sum_{y\in X} P_i(j_{xy})w^+(x,y)w^-(\gamma,y),$$

where $j_{xy} \in \{0, 1, \cdots, d\}$ and $(x, y) \in R_{j_{xy}}$. So, it is equal to

$$\sum_{y \in X} P_i(j_{xy}) t_{j_{\beta y}} t_{j_{\gamma y}}$$

$$= \sum_{j,l,k=0}^{d} P_{j,k,l}(x, \beta, \gamma) P_i(j) t_k t_l^{-1}$$

$$= \sum_{j,k,l}^{d} P_i(j) P_{j,k,l}(x, \beta, \gamma) \alpha^{k-l},$$

where $P_{j,k,l}(x, \beta, \gamma) = \sharp\{y \mid (x, y) \in R_j, (\beta, y) \in R_k, (\gamma, y) \in R_l\}$.

The key to the proof of Proposition 2.1 (hence of Theorem 1.6) is given by the following proposition.

Proposition 2.2. *Let $t_i = \sqrt{\alpha_0^3}\alpha^i$ $(i = 0, 1, \cdots, d)$ be as in the assumption of Theorem 1.6. Then we have*

$$\sum_{k,l=0}^{d} P_{j,k,l}(x, \beta, \gamma) t_k t_l^{-1} = \alpha^{b-c} P_j(a)$$

for a fixed triple $(x, \beta, \gamma) \in X^3$ with $(\beta, \gamma) \in R_a, (\beta, x) \in R_b$ and $(\gamma, x) \in R_c$. (Note that the symbol a is an index for the relation, and is not the modulus of the spin model.)

Note that the condition (9) in Proposition 2.1 is immediately obtained from Proposition 2.2 by using the self-dual property $P^2 = nI$ of the character table P of the Hamming association scheme. Thus, the proof of Proposition 2.1, hence the proof of Theorem 1.6, is reduced to the proof of Proposition 2.2, which will be proved in the next section.

§ 3, Proof of Proposition 2.2

The number $P_{j,k,l}(x, \beta, \gamma)$ depends not only on a, b, c, j, k, and l but also on how we choose x, β, and γ. Choose $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_d), \gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_d)$ and $x = (x_1, \cdots, x_d)$ arbitrarily. Let $s = \sharp\{\mu \mid \beta_\mu = \gamma_\mu \neq x_\mu\}$, $t = \sharp\{\mu \mid \beta_\mu \neq \gamma_\mu, x_\mu \neq \beta_\mu, x_\mu \neq \gamma_\mu\}$ and $u = \sharp\{\mu \mid \beta_\mu \neq \gamma_\mu = x_\mu\}$. Since $(\beta, \gamma) \in R_a, (\beta, x) \in R_b$, and $(\gamma, x) \in R_c$, s, t, and u must satisfy the following relations:

$$b = s + u + t, \tag{10}$$

$$c = s + a - u. \tag{11}$$

For fixed β, γ, and x (that is for fixed a, b, c, s, t and u), let $y = (y_1, \cdots, y_d)$ with $(x, y) \in R_j, (\beta, y) \in R_k$, and $(\gamma, y) \in R_l$. We define $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{10}$ as follows:

$$\lambda_1 = \sharp\{\mu \mid \beta_\mu = \gamma_\mu = x_\mu, x_\mu \neq y_\mu\},$$
$$\lambda_2 = \sharp\{\mu \mid \beta_\mu = \gamma_\mu \neq x_\mu, x_\mu = y_\mu\},$$

$$\lambda_3 = \sharp\{\mu \mid \beta_\mu = \gamma_\mu \neq x_\mu, x_\mu \neq y_\mu, \gamma_\mu \neq y_\mu\},$$
$$\lambda_4 = \sharp\{\mu \mid x_\mu = \beta_\mu \neq \gamma_\mu = y_\mu\},$$
$$\lambda_5 = \sharp\{\mu \mid x_\mu = \beta_\mu \neq \gamma_\mu, \gamma_\mu \neq y_\mu, \beta_\mu \neq y_\mu\},$$
$$\lambda_6 = \sharp\{\mu \mid \beta_\mu \neq \gamma_\mu = x_\mu = y_\mu\},$$
$$\lambda_7 = \sharp\{\mu \mid \beta_\mu \neq \gamma_\mu = x_\mu, \gamma_\mu \neq y_\mu, \beta_\mu \neq y_\mu\},$$
$$\lambda_8 = \sharp\{\mu \mid \beta_\mu \neq \gamma_\mu, \gamma_\mu \neq x_\mu, \beta_\mu \neq x_\mu, \gamma_\mu = y_\mu\},$$
$$\lambda_9 = \sharp\{\mu \mid \beta_\mu \neq \gamma_\mu, \gamma_\mu \neq x_\mu, x_\mu \neq \beta_\mu, x_\mu = y_\mu\},$$
$$\lambda_{10} = \sharp\{\mu \mid \beta_\mu, \gamma_\mu, x_\mu \text{ and } y_\mu \text{ are all distinct }\},$$

Since $(x,y) \in R_j$, $(\beta,y) \in R_k$, and $(\gamma,y) \in R_l$, we have

$$k = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{10}, \tag{12}$$

$$j = \lambda_1 + (s - \lambda_2) + \lambda_4 + \lambda_5 + (u - \lambda_6) + (t - \lambda_9), \tag{13}$$

$$l = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_6 - \lambda_8 + a. \tag{14}$$

With these notations, we have

$$\begin{aligned} P_{j,k,l}(x,\beta,\gamma) = \sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_{10}} & \binom{d-a-s}{\lambda_1} (q-1)^{\lambda_1} \binom{s}{\lambda_2} \binom{s-\lambda_2}{\lambda_3} \\ & \cdot (q-2)^{\lambda_3} \binom{a-u-t}{\lambda_4} \binom{a-u-t-\lambda_4}{\lambda_5} \\ & \cdot (q-2)^{\lambda_5} \binom{u}{\lambda_6} \binom{u-\lambda_6}{\lambda_7} (q-2)^{\lambda_7} \\ & \cdot \binom{t}{\lambda_8} \binom{t-\lambda_8}{\lambda_9} \binom{t-\lambda_8-\lambda_9}{\lambda_{10}} (q-3)^{\lambda_{10}}, \end{aligned} \tag{15}$$

where the summation goes over $\lambda_1, \cdots, \lambda_{10}$ satisfying (12), (13), (14) and we use the usual convention $\binom{m}{n} = 0$ for $n \leq -1$ or $n \geq m+1$.

Now we are ready to prove Proposition 2.2. By the definition of t_k and t_l, we have $t_k t_l^{-1} = \alpha^{k-l}$. Therefore by (15) we have

$$\sum_{k,l=0}^{d} P_{j,k,l}(x,\beta,\gamma) t_k t_l^{-1} \tag{16}$$

$$= \sum_{k,l=0}^{d} \sum_{\substack{\lambda_1,\cdots,\lambda_{10} \\ \text{with } (12),(13),(14)}} \binom{d-a-s}{\lambda_1} (q-1)^{\lambda_1} \binom{s}{\lambda_2} \binom{s-\lambda_2}{\lambda_3}$$

$$\cdot (q-2)^{\lambda_3}\binom{a-u-t}{\lambda_4}\binom{a-u-t-\lambda_4}{\lambda_5}(q-2)^{\lambda_6}\binom{u}{\lambda_6}\binom{u-\lambda_6}{\lambda_7}$$

$$\cdot (q-2)^{\lambda_7}\binom{t}{\lambda_8}\binom{t-\lambda_8}{\lambda_9}\binom{t-\lambda_8-\lambda_9}{\lambda_{10}}(q-3)^{\lambda_{10}}.$$

Let $\lambda = j-s-\lambda_1+\lambda_2$, $\mu = \lambda_4+\lambda_5$ (that is $\lambda_2 = \lambda+\lambda_1+s-j$, $\lambda_5 = \mu-\lambda_4$). Then by (12), (13) and (14) we have

$$\lambda_9 = \mu-\lambda-\lambda_6+u+t,$$

$$k = 2\lambda_1+\lambda_3+\lambda_7+\lambda_8+\lambda_{10}+2\mu-j+s+u+t,$$

$$l = 2\lambda_1+\lambda_3-\lambda_4-\lambda_6-\lambda_8+\lambda-j+s+a.$$

Then we have

$$\binom{a-u-t}{\lambda_4}\binom{a-u-t-\lambda_4}{\lambda_5} = \binom{a-u-t}{\lambda_4+\lambda_5}\binom{\lambda_4+\lambda_5}{\lambda_4} = \binom{a-u-t}{u}\binom{u}{\lambda_4}$$

and

$$\binom{t}{\lambda_8}\binom{t-\lambda_8}{\lambda_9} = \binom{t}{t-\lambda_9}\binom{t-\lambda_9}{\lambda_8} = \binom{t}{\lambda-\mu+\lambda_6-u}\binom{\lambda-\mu+\lambda_6-u}{\lambda_8}.$$

Therefore the right hand side of (16) is reduced to the following:

$$\sum_{\substack{\lambda_1,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_6,\lambda_7,\\ \lambda_8,\lambda_{10},\lambda,\mu}}\binom{d-a-s}{\lambda_1}\binom{s}{j-\lambda-\lambda_1}(q-1)^{\lambda_1}\binom{j-\lambda-\lambda_1}{\lambda_3}(q-2)^{\lambda_3}$$

$$\cdot\binom{a-u-t}{\mu}\binom{\mu}{\lambda_4}(q-2)^{\mu-\lambda_4}\binom{u}{\lambda_6}\binom{u-\lambda_6}{\lambda_7}(q-2)^{\lambda_7}\binom{t}{\lambda-\mu+\lambda_6-u}$$

$$\cdot\binom{\lambda-\mu+\lambda_6-u}{\lambda_8}\binom{\lambda-\mu+\lambda_6-u-\lambda_8}{\lambda_{10}}(q-3)^{\lambda_{10}}$$

$$\cdot\alpha^{\lambda_4+\lambda_6+\lambda_7+2\lambda_8+\lambda_{10}-\lambda+2\mu+u+t-a}$$

$$= \alpha^{u+t-a}\sum_{\lambda}\alpha^{-\lambda}\Big[\sum_{\lambda_1}\Big\{\binom{d-a-s}{\lambda_1}\binom{s}{j-\lambda-\lambda_1}(q-1)^{\lambda_1}$$

$$\cdot\sum_{\lambda_3}\binom{j-\lambda-\lambda_1}{\lambda_3}(q-2)^{\lambda_3}\Big\}\cdot\sum_{\mu,\lambda_6,\lambda_8}\Big\{\binom{a-\mu-t}{\mu}(q-2)^{\mu}\alpha^{2\mu}\binom{u}{\lambda_6}$$

$$\cdot\alpha^{\lambda_6}\binom{t}{\lambda-\mu+\lambda_6-u}\binom{\lambda-\mu+\lambda_6-u}{\lambda_8}\alpha^{2\lambda_8}\cdot\sum_{\lambda_4}\binom{\mu}{\lambda_4}(q-2)^{-\lambda_4}\alpha^{\lambda_4}$$

$$\cdot\sum_{\lambda_7}\binom{u-\lambda_6}{\lambda_7}(q-2)^{\lambda_7}\alpha^{\lambda_7}\cdot\sum_{\lambda_{10}}\binom{\lambda-\mu+\lambda_6-u-\lambda_8}{\lambda_{10}}(q-3)^{\lambda_{10}}\alpha^{\lambda_{10}}\Big\}\Big]$$

$$= \alpha^{u+t-a}\sum_{\lambda}\alpha^{-\lambda}\Big\{\sum_{\lambda_1}\binom{d-a-s}{\lambda_1}\binom{s}{j-\lambda-\lambda_1}(q-1)^{j-\lambda}\Big\}$$

$$\cdot\Big\{\sum_{\mu,\lambda_6,\lambda_8}\binom{a-u-t}{\mu}(q-2)^{\mu}\alpha^{2\mu}$$

$$\cdot\binom{u}{\lambda_6}\alpha^{\lambda_6}\binom{t}{\lambda-\mu+\lambda_6-u}\binom{\lambda-\mu+\lambda_6-u}{\lambda_8}\alpha^{2\lambda_8}\Big(1+(q-2)^{-1}\alpha\Big)^{\mu}$$

$$\cdot\Big(1+(q-2)\alpha\Big)^{u-\lambda_6}\Big(1+(q-3)\alpha\Big)^{\lambda-\mu+\lambda_6-u-\lambda_8}\Big\}$$

$$= \alpha^{u+t-a}\Big(1+(q-3)\alpha\Big)^{-u}\Big(1+(q-2)\alpha\Big)^{u}\sum_{\lambda}\alpha^{-\lambda}(q-1)^{j-\lambda}\Big(1+(q-3)\alpha\Big)^{\lambda}$$

$$\cdot\Big[\sum_{\lambda_1}\binom{d-a-s}{\lambda_1}\binom{s}{j-\lambda-\lambda_1}\cdot\sum_{\mu,\lambda_6}\Big\{\binom{a-u-t}{\mu}(q-2)^{\mu}\alpha^{2\mu}$$

$$\cdot\Big(1+(q-2)^{-1}\alpha\Big)^{\mu}\Big(1+(q-3)\alpha\Big)^{-\mu}\binom{u}{\lambda_6}\alpha^{\lambda_6}\Big(1+(q-2)\alpha\Big)^{-\lambda_6}\Big(1+(q-3)\alpha\Big)^{\lambda_6}$$

$$\cdot\binom{t}{\lambda-\mu+\lambda_6-u}\sum_{\lambda_8}\binom{\lambda-\mu+\lambda_6-u}{\lambda_8}\alpha^{2\lambda_8}\Big(1+(q-3)\alpha\Big)^{-\lambda_8}\Big\}\Big].$$

Since $\alpha^2+(q-2)\alpha+1=0$, we have

$$1+(q-2)\alpha=-\alpha^2 \quad \text{and} \quad (q-2)\alpha^2\Big(1+(q-2)^{-1}\alpha\Big)=-\alpha.$$

On the other hand we have

$$\sum_{\lambda_1}\binom{d-a-s}{\lambda_1}\binom{s}{j-\lambda-\lambda_1}=\binom{d-a}{j-\lambda}$$

and

$$\sum_{\lambda_8}\binom{\lambda-\mu+\lambda_6-u}{\lambda_8}\alpha^{2\lambda_8}\Big(1+(q-3)\alpha\Big)^{-\lambda_8}$$
$$= \Big(1+\alpha^2(1+(q-3)\alpha)^{-1}\Big)^{\lambda-\mu+\lambda_6-u}$$
$$= \Big(1+(q-3)\alpha\Big)^{-\lambda+\mu-\lambda_6+u}\cdot(-\alpha)^{\lambda-\mu+\lambda_6-u}.$$

Hence the right hand side of (16) is reduced to

$$\alpha^{u+t-a}\Big(1+(q-3)\alpha\Big)^{-u}(-\alpha^2)^{u}\sum_{\lambda}\alpha^{-\lambda}(q-1)^{j-\lambda}\Big(1+(q-3)\alpha\Big)^{\lambda}\binom{d-a}{j-\lambda}$$

$$\cdot\Big\{\sum_{\mu,\lambda_6}\binom{a-u-t}{\mu}(-\alpha)^{\mu}\binom{u}{\lambda_6}\alpha^{\lambda_6}\Big(-\alpha^2\Big)^{-\lambda_6}\Big(1+(q-3)\alpha\Big)^{\lambda_6}$$

$$\cdot \binom{t}{\lambda-\mu+\lambda_6-u}\left(1+(q-3)\alpha\right)^{-\lambda+\mu-\lambda_6+u}(-\alpha)^{\lambda-\mu+\lambda_6-u}\Big\}$$

$$= \alpha^{2u+t-a}\sum_{\lambda}(-1)^{\lambda}(q-1)^{j-\lambda}\binom{d-a}{j-\lambda}$$

$$\cdot\Big\{\sum_{\lambda_6}\binom{u}{\lambda_6}\sum_{\mu}\binom{a-u-t}{\mu}\binom{t}{\lambda-\mu+\lambda_6-u}\Big\}$$

$$= \alpha^{b-c}\sum_{\lambda}(-1)^{\lambda}(q-1)^{j-\lambda}\binom{d-a}{j-\lambda}\sum_{\lambda_6}\binom{u}{\lambda_6}\binom{a-u}{\lambda+\lambda_6-u}$$

$$= \alpha^{b-c}\sum_{\lambda}(-1)^{\lambda}(q-1)^{j-\lambda}\binom{d-a}{j-\lambda}\sum_{\lambda_6}\binom{u}{\lambda_6}\binom{a-u}{a-\lambda-\lambda_6}$$

$$= \alpha^{b-c}\sum_{\lambda}(-1)^{\lambda}(q-1)^{j-\lambda}\binom{a}{a-\lambda}$$

$$= \alpha^{b-c}P_j(a).$$

This completes the proof of Proposition 2.2.

§ 4. Concluding Remarks

(4.1) One important reason why one is interested in spin models is that an invariant of links is defined from a spin model. (See [7],[6].)

In [6], Jaeger considers spin models which satisfy the relation :

$$W^+ + \varepsilon W^- = z(DI + \varepsilon J). \tag{17}$$

(See [6, § 3.1].)

This condition implies that

$$(W^+)^2 + \varepsilon nI = z(DW^+ + \varepsilon Da^{-1}J),$$

and so the degree of the minimal polynomial of W^+ is at most 3. (Note that if the condition (17) is satisfied, then the exchange property (see Jaeger[6, § 2.1, formula (2)]) is satisfied. However, it seems that this does not mean that there is a guarantee that the condition (17) is satisfied if the partition function Z_L is a specialization of a Kauffman polynomial.

At the time of this writing, we do not know exactly, what is the link invariant defined from the spin model constructed from the Hamming association scheme $H(d,q)$.

We note the following facts.

(i) The minimal polynomial for $H(d,2)$ is of degree

$$d+1 \quad \text{for} \quad d \le 3,$$
$$4(\ne d+1) \quad \text{for} \quad d \ge 4.$$

(ii) The minimal polynomial for $H(d,3)$ is of degree

$$d+1 \quad \text{for} \quad d \leq 2,$$
$$3(\neq d+1) \quad \text{for} \quad d \geq 3.$$

(iii) The minimal polynomial for $H(d,4)$ is of degree 2 ($\neq d+1$) for $d \geq 2$.

(iv) The minimal polynomial for $H(d,q)$ for $q \geq 5$ is of degree $d+1$.

The above assertions are immediately obtained from the fact that

$$\begin{aligned} W^+ &= \sum_{i=0}^{d} t_i A_i \\ &= \sum_{j=0}^{d} \Big(\sum_{i=0}^{d} t_i P_i(j)\Big) E_j \\ &= \sqrt{n} \sum_{j=0}^{d} t_j^{-1} E_j \text{ (by the condition (7))} \end{aligned}$$

This seems to imply that the link invariants obtained from the spin models constructed from $H(d,q)$ (in particular for $q \geq 5$ and for large d) are not likely to be obtained as specializations of a Kauffman polynomial, and that these link invariants (in particular for $q \geq 5$ and for large d) are fairly elaborate ones. We hope to study these link invariants furthermore from a view point of topology in a subsequent paper.

(4.2) Currently, we do not know whether we can construct other spin models from other (symmetric) self-dual association schemes. We feel that the classification of spin models which satisfy the condition (17) given in Jaeger[6, Chap 3] seems to suggest that they cannot exist very freely. However, it seems to be an interesting question to try to find other examples of spin models starting from other symmetric association schemes.

(4.3) Of course, as was already pointed out by Y. Watatani and A. Munemasa (unpublished remarks), it is natural not to assume W^+ and W^- symmetric. Then naturally a commutative nonsymmetric association scheme should be associated. All the results in Section 2 of Jaeger[6] should have corresponding similar results for the commutative nonsymmetric case (with certain modifications). So, we believe that the trial of finding other new examples of spin models should not be limited to symmetric association schemes.

Appendix.

In this appendix, we recall how the link invariant is defined from a spin model (*cf.*[7], [6], [8], [9]). Also we discuss how the link invariant for the spin model coming from the Hamming association scheme $H(d,q)$ coincides with the known link invariant when $d=1$ or $d=2$. For the unexplained notation, the reader is referred to [8].

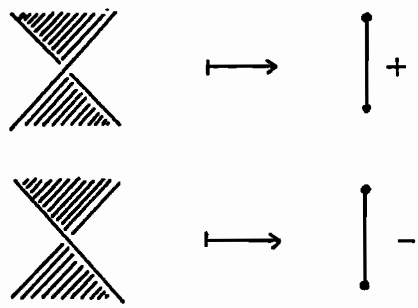
Let (X, w^+, w^-) be a spin model. Let L be an unoriented link diagram. We color the regions determined by L either by black (shaded) or white by the following rules:

(a) the unbounded region is colored by white,

(b) adjacent regions have different colors.

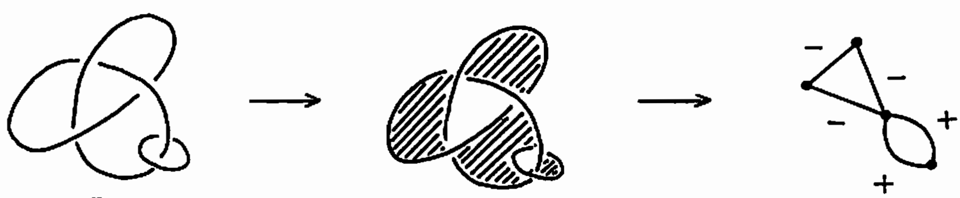
(Note that this coloring is uniquely determined.)

We assign to each shaded region a vertex, and to each crossing a signed edge as follows, thus we assign a signed graph to each unoriented link diagram L.



(Note that we can recover L from the that signed graph.)

Example.



L

A state σ is a map from the set of vertices of the signed graph (obtained from L) to the set X of the spin model. For a given state σ, and for each signed edge between vertices v_1 and v_2, we assign the complex number $w^{\pm}(\sigma(v_1), \sigma(v_2)) = w^{\pm}(a, b)$. We define

$$Z : \{\text{unoriented link diagrams}\} \to \mathbf{C}$$

by

$$Z_L := D^{-b(L)} \sum_{states} \prod_{edges} w^{\pm}(a, b),$$

where $b(L)$ is the number of shaded regions of L (= the number of the vertices of the signed graph). Then we have the following:

Proposition. *([7], [6].)*

Z_L is a regular isotopy invariant for unoriented links. Furthermore, we have

$$Z_{\gamma} = aZ_{\frown} \text{ and } Z_{\gamma} = a^{-1}Z_{\frown},$$

where a is the modulus of the spin model. (For the notation, see[8]. Here the small diagrams indicate otherwise identical parts of larger diagrams.)

Now, let $\vec{L}$ be an oriented link diagram associated to an unoriented link diagram L. For each crossing C of $\vec{L}$, we define $sign(C)$ as follows:

We define $\qquad +1 \qquad\qquad -1$

$$w(\vec{L}) := \sum_{C:crossings} sign(C),$$

and call it the writhe of $\vec{L}$. Also, we define

$$R_{\vec{L}} := a^{-w(\vec{L})} Z_L.$$

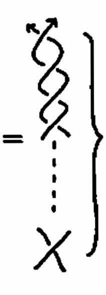
Then we have the following.

Proposition. *([7], [6].) $R_{\vec{L}}$ is an ambient isotopy invariant for oriented links.*

Now, we discuss what kind of properties does the link invariant obtained from the spin model coming from $H(d,q)$ have. Here we assume that $q \geq 5$. The minimal polynomial $f(x)$ of W^+ is given by

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-\sqrt{n}t_0^{-1})(x-\sqrt{n}t_1^{-1})\cdots(x-\sqrt{n}t_d^{-1})\\
&= (x-\sqrt{n}\cdot\sqrt{\alpha_0{}^3}^{-1}\cdot 1)(x-\sqrt{n}\cdot\sqrt{\alpha_0{}^3}^{-1}\cdot\alpha^{-1})\cdots(x-\sqrt{n}\sqrt{\alpha_0{}^3}^{-1}\cdot\alpha^{-d})\\
&= x^{d+1}-\sqrt{n}\sqrt{\alpha_0{}^3}^{-1}\Big(\sum_{i=0}^{d}\alpha^{-i}\Big)x^d+(\sqrt{n})^2\sqrt{\alpha_0{}^3}^{-2}\Big(\sum_{0\leq i<j\leq d}\alpha^{-i-j}\Big)x^{d-1}-\\
&\qquad\cdots+(-1)^{d+1}(\sqrt{n})^{d+1}\sqrt{\alpha_0{}^3}^{-d-1}\alpha^{-\frac{1}{2}d(d+1)}.
\end{aligned}$$

Let us set

$L \;=$  n crossing $\qquad \vec{L} \;=$  n crossing

Then we have

$$Z_{L_{d+1}}-\sqrt{\alpha_0{}^3}^{-1}\Big(\sum_{i=0}^{d}\alpha^{-i}\Big)Z_{L_d}+\sqrt{\alpha_0{}^3}^{-2}\Big(\sum_{0\leq i<j\leq d}\alpha^{-i-j}\Big)Z_{L_{d-1}}-$$

$$\cdots+(-1)^{d+1}\sqrt{\alpha_0{}^3}^{-d-1}\alpha^{-\frac{1}{2}d(d+1)}Z_{L_0}=0.$$

Thus, we have

$$\sqrt{\alpha_0^3}^{d+1} R_{\tilde{L}_{d+1}} - \sqrt{\alpha_0^3}^{d-1}\Big(\sum_{i=0}^{d} \alpha^{-i}\Big) R_{\tilde{L}_d} + \sqrt{\alpha_0^3}^{d-3}\Big(\sum_{0\le i<j\le d} \alpha^{-i-j}\Big) R_{\tilde{L}_{d-1}} - \cdots$$

$$+(-1)^{d+1}\sqrt{\alpha_0^3}^{d-1}\alpha^{-\frac{1}{2}d(d+1)} R_{\tilde{L}_0} = 0.$$

For $d = 1$ and 2, $R_{\tilde{L}}$ coincides with known invariants.

(a) Suppose $d = 1$. Then

$$\alpha_0{}^3\sqrt{-\alpha} R_{\times} - \frac{1}{\alpha_0{}^3\sqrt{-\alpha}} R_{\times} = \Big(\sqrt{-\alpha} - \frac{1}{\sqrt{-\alpha}}\Big) R_{=}.$$

Thus, $R_{\tilde{L}}$ is a specialization of the Jones polynomial.

(b) Suppose $d = 2$. Then

$$R_{\tilde{L}} = \Big(V_{\tilde{L}}(t)\Big)^2 \text{ with } t^3 = (\alpha_0{}^3)^{-1},$$

where $V_{\tilde{L}}(t)$ is the Jones polynomial. (This is already mentioned in Jaeger[6, §3.6.4].)

For $d \geq 3$ we do not know whether $R_{\tilde{L}}$ coincides with a known link invariant. We expect that they do not coincide with the known ones. (Added later: They do. F. Jaeger and P. de la Harpe pointed out that $R_{\tilde{L}}$ is the d-th power of the Jones polynomial.)

Acknowledgment. The authors thank Toshitake Kohno and Louis Kauffman for showing us a preprint of Jaeger[6] and for telling us the connection between association schemes and spin models. We also thank Francois Jaeger for some useful communications about the content of the paper[6].

References

[1] E. Bannai, *Association schemes and fusion algebras (an introduction), preprint.*

[2] E. Bannai and E. Bannai, *Modular invariance of the character table of the Hamming association scheme $H(d,q)$* , ~~submitted for publication~~ to appear in J. Number Theory.

[3] E. Bannai and T.Ito, *Algebraic Combinatorics I: Association Schemes*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, CA, 1984.

[4] A. E. Brouwer, A. M. Cohen and A. Neumaier, *Distance Regular Graphs*, Springer-Verlag, 1989.

[5] P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Reports Supplements 10 (1973).

[6] F. Jaeger, *Strongly regular graphs and spin models for the Kauffman polynomial, to appear in Geom. Dedicata.*

[7] V. F. R. Jones, *On knot invariants related to some statistical mechanical models*, Pac. J. Math. 137 (1989), 311–336.

[8] L. Kauffman, *An invariant of regular isotopy*, Trans. Amer. Math. Soc. 318 (1990), 417–471.

[9] L. Kauffman, *State models and the Jones polynomial*, Topology 26 (1987), 395–407.

Pre-Hamming Scheme について

橋爪道彦　　(岡山理科大・理)
市原浩二　　(岡山理科大・理)

association scheme のひとつの例として pre-Hamming scheme を紹介する。そして、この pre-Hamming scheme の指標表を決定し、それが自己双対的であることを示す。また、Hamming scheme が pre-Hamming scheme の subassociation scheme になっていることを最後に示す。

以下、$d,q>1$ (整数) とする。F を q-元集合, $X=F^d$, $T=2^{\{1,\cdots,d\}}$ とおく。
写像 $\pi : X\times X \longrightarrow T$ を

$$\pi(x,y)=\{i\in\{1,\cdots,d\}\ ;\ x_i\neq y_i\},\quad x=(x_1,\cdots,x_d),\quad y=(y_1,\cdots,y_d)$$

で定義する。これより

(i)　π は全射である。
(ii)　$\pi(x,y)=\emptyset$ であるための必要十分条件は、$x=y$ である。
(iii) すべての $(x,y)\in X\times X$ に対し、$\pi(x,y)=\pi(y,x)$ が成り立つ。

各 $I\in T$ に対し、$R_I\subset X\times X$ を

$$R_I=\pi^{-1}(I)=\{(x,y)\in X\times X\ ;\ \pi(x,y)=I\}$$

とおく。

$\boxed{\text{定理 1}}$ $(X,(R_I)_{I\in T})$ は symmetric association scheme を構成し、その交叉数 b_{IJ}^K $(I,J,K\in T)$ は

$$b_{IJ}^K=\begin{cases}(q-1)^{|I\cup J-K|}\,(q-2)^{|K-I\ominus J|} & I\ominus J\subset K\subset I\cup J \text{ のとき}\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

で与えられる。但し、$I\ominus J=(I-J)\cup(J-I)$ である。

〈証明〉まず、π の定義より、

$$R_\emptyset=\{(x,x)\ ;\ x\in X\}$$
$$\bigcup_{I\in T} R_I=X\times X$$
$${}^tR_I=R_I$$

が得られる。$I,J,K\in T$, $(x,y)\in R_K$ に対し、

$$\Delta(I,J:(x,y))=\{z\in X\ ;\ (x,z)\in R_I,\ (z,y)\in R_J\}$$

とおく。この定理を示すには $|\Delta(I,J:(x,y))|$ が I,J,K にのみ依存し、(x,y) の取り方に依らないこと、さらにその値が b_{IJ}^K と等しくなることをいえばよい。

次のことに注意されたし。

$$(x,y)\in R_K \iff x_k\neq y_k\ (k\in K)\ \text{かつ}\ x_\ell=y_\ell\ (\ell\in K^c)$$

次の3つの場合を考えることにより仮定を示す。$z\in\Delta(I,J:(x,y))$, $(x,y)\in R_K$ とする。

Case 1. $I\ominus J\subset K\subset I\cup J$ の場合

この場合

$$\{1,\cdots,d\}=(I^c\cap J^c)\cup(I\ominus J)\cup(K-I\ominus J)\cup(I\cup J-K)$$

を得る。（右辺は直和） $\ell\in I^c\cap J^c$ のとき $\ell\in K$ で $z_\ell=x_\ell=y_\ell$ となる。$\ell\in I-J$（あるいは $\ell\in J-I$） のとき $\ell\in K$ で $z_\ell=y_\ell$, $z_\ell\neq x_\ell$ （あるいは $z_\ell=x_\ell$, $z_\ell\neq y_\ell$）したがって、z_ℓ ($\ell\in I^c\cup J^c$) は x と y により一意的に決まる。$\ell\in K-I\ominus J$ とする。この場合、$z_\ell\neq x_\ell$, $z_\ell\neq y_\ell$, $x_\ell\neq y_\ell$ であるので F における z_ℓ の取り方は $q-2$ 存在する。$\ell\in I\cup J-K$ とすると、$z_\ell\neq x_\ell$, $z_\ell\neq y_\ell$, $x_\ell=y_\ell$ であるので F における z_ℓ の取り方は $q-1$ 存在する。これらのことより Case 1 では $|\Delta(I,J:(x,y))|=(q-1)^{|I\cup J-K|}(q-2)^{|K-I\ominus J|}$ となる。

Case 2. $K\cap(I\cup J)^c=K\cap I^c\cap J^c\neq\emptyset$ の場合

$\ell\in K\cap I^c\cap J^c$ とすると $z_\ell=x_\ell$, $z_\ell=y_\ell$, $x_\ell\neq y_\ell$ となるのでこれは矛盾である。よって、$\Delta(I,J:(x,y))=\emptyset$ となり、$|\Delta(I,J:(x,y))|=0$ である。

Case 3. $K^c\cap I\ominus J\neq\emptyset$ の場合

$\ell\in K^c\cap I\ominus J$ とする。$\ell\in K^c\cap(I-J)$ のとき、$z_\ell\neq x_\ell$, $z_\ell=y_\ell$, $x_\ell=y_\ell$ となり、$\ell\in K^c\cap(J-I)$ のとき、$z_\ell=x_\ell$, $z_\ell\neq y_\ell$, $x_\ell=y_\ell$ となる。よって、どちらの場合も矛盾となり、$\Delta(I,J:(x,y))=\emptyset$ である。

この3つの場合ですべてが尽くされるから、定理が成立する。□

定理1で得られる symmetric association scheme を pre-Hamming scheme といい、$H(d,q)^{\sim}$ で表す。また、この pre-Hamming scheme の次数 $\kappa(I)$ ($I\in T$) は

$$\kappa(I)=b_{I}{}^{\emptyset}{}_{I}=(q-1)^{|I|}$$

で与えられる。

pre-Hamming scheme $H(d,q)^{\sim}$ の Bose-Mesner algebra

$\mathcal{A}$ を pre-Hamming scheme $H(d,q)^{\sim}$ の Bose-Mesner algebra とする。$I\in T$ に対し、隣接行列 A_I を

$$A_I(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in R_I\ \text{のとき}\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

で定義すると、積に関し次のことが成り立つ。

$$A_IA_J=\sum_{I\ominus J\subset K\subset I\cup J}(q-1)^{|I\cup J-K|}(q-2)^{|K-I\ominus J|}A_K$$

とくに、$I\cap J=\emptyset$ のとき $A_IA_J=A_{I\cup J}$, $I=\{i_1,\cdots,i_r\}$ のとき $A_I=A_{\{i_1\}}\cdots A_{\{i_r\}}$ となる。したがって、pre-Hamming scheme $H(d,q)^{\sim}$ の Bose-Mesner algebra $\mathcal{A}$ は、$\{A_{\{i\}}\ ;\ 1\leq i\leq d\}$ により生成される。

pre-Hamming scheme $H(d,q)^{\sim}$ の指標表の決定

まず、$\hat{\mathcal{A}}$ を $\mathcal{A}$ の指標の集合とする。$|\hat{\mathcal{A}}|=\dim\mathcal{A}=2^d$ であることに注意する。

定理2 $H,I\in T$ に対し

$$\lambda_H(A_I)=(-1)^{|I\cap H|}(q-1)^{|I-H|}$$

とおくと

$$\hat{\mathcal{A}}=\{\lambda_H\ ;\ H\in T\}$$

である。

〈証明〉各 λ_H が $\mathcal{A}$ の指標であることを示す。まず $\lambda_H(A_\emptyset)=1$ となることは明白である。ゆえに、$\lambda_H(A_IA_J)=\lambda_H(A_I)\,\lambda_H(A_J)$ を示せばよい。この右辺は定理の仮定より、

$$(-1)^{|I\cap H|+|J\cap H|}(q-1)^{|I-H|+|J-H|}$$

となる。$|I\cap H|+|J\cap H|=|I\ominus J\cap H|+2|I\cap J\cap H|$ であり、$|I-H|+|J-H|=|I\ominus J\cap H^c|+2|I\cap J\cap H^c|$ であるので、

$$\lambda_H(A_I)\,\lambda_H(A_J)=(-1)^{|I\ominus J\cap H|}(q-1)^{|I\ominus J\cap H^c|+2|I\cap J\cap H^c|}$$

となる。一方、左辺は、

$$\lambda_H(A_IA_J)=\sum_{I\ominus J\subset K\subset I\cup J}(-1)^{|K\cap H|}(q-1)^{|I\cup J-K|+|K-H|}(q-2)^{|K-I\ominus J|}$$

を得る。$K=I\ominus J\cup L$ $(L\subset I\cap J)$ と書ける。このとき $I\cup J-K=I\cap J-L$, $K-I\ominus J=L$, $K\cap H=(I\ominus J\cap H)\cup(L\cap H)$, $K-H=(I\ominus J\cap H^c)\cup(L\cap H^c)$ となる。したがって上の和は、

$$(-1)^{|I\ominus J\cap H|}(q-1)^{|I\ominus J\cap H^c|}\sum_{L\subset I\cap J}(-1)^{|L\cap H|}(q-1)^{|I\cap J-L|+|L\cap H^c|}(q-2)^{|L|}$$

と表わせる。ゆえに、次が成り立てば $\lambda_H(A_IA_J)=\lambda_H(A_I)\,\lambda_H(A_J)$ が示される。

$$\sum_{L\subset I\cap J}(-1)^{|L\cap H|}(q-1)^{|I\cap J-L|+|L\cap H^c|}(q-2)^{|L|}=(q-1)^{2|I\cap J\cap H^c|}$$

$r=|I\cap J\cap H|$, $s=|I\cap J\cap H^c|$ とおく。$r+s=|I\cap J|$ となる。$a\in\{0,\cdots,r\}$, $b\in\{0,\cdots,s\}$ に対し、集合 $\{L\subset I\cap J\,;\,|L\cap H|=a,\ |L\cap H^c|=b\}$ の個数は $\binom{r}{a}\binom{s}{b}$ であり、$|L|=a+b$ となる。左辺は

$$\sum_{0\leq a\leq r}\sum_{0\leq b\leq s}\binom{r}{a}\binom{s}{b}(-1)^a(q-1)^{r+s-a}(q-2)^{a+b}$$

となり

$$(q-1)^s\sum_{0\leq a\leq r}\binom{r}{a}(q-1)^{r-a}(-(q-2))^a\sum_{0\leq b\leq s}\binom{s}{b}(q-2)^b$$

と変形される。したがってこれは $(q-1)^{2n}$ となり等式が成り立つ。指標 λ_H $(H\in T)$ はすべて異なるので、$\mathfrak{A}=\{\lambda_H\ ;H\in T\}$ となる。□

$H(d,q)^{\sim}$ の指標表 P は、$P=(\lambda_H(A_I))_{(H,I)\in T\times T}$ より定義される $2^d\times 2^d$-行列である。したがって、

$$P=((-1)^{|H\cap I|}(q-1)^{|I-H|})_{(H,I)\in T\times T}$$

が得られる。

ここで、$m(H)$ $(H\in T)$ を $\mathfrak{A}$-module $\mathfrak{F}(X)=\{f:X\to \mathbb{C}\}$ における λ_H の重複度とすると、重複度の一般の公式 $m(H)=|X|/\Sigma_{I\in T}\kappa(I)^{-1}\lambda_H(A_I)^2$ より、次を得る。

$$m(H)=(q-1)^{|H|}$$

定理３ pre-Hamming scheme $H(d,q)^{\sim}$ は自己双対である。

〈証明〉$2^d\times 2^d$-行列 $Q=(Q_{IJ})_{(I,J)\in T\times T}$ を $I,J\in T$ に対し、次のように定義する。

$$Q_{IJ}=\kappa(I)^{-1}m(J)\lambda_J(A_I)$$

定理を示すには P=Q が成り立てばよい。所で

$$Q_{IJ}=(q-1)^{|J|-|I|}(-1)^{|I\cap J|}(q-1)^{|I-J|}=(-1)^{|I\cap J|}(q-1)^{|J-I|}=\lambda_I(A_J)$$

より、P=Q が満たされる。□

定理４ Hamming scheme $H(d,q)$ は pre-Hamming scheme $H(d,q)^{\sim}$ の subassociation scheme である。

〈証明〉$\rho:X\times X\longrightarrow\{0,1,\cdots,d\}$ を次のように定義する。

$$\rho(x,y)=|\pi(x,y)| \qquad ((x,y)\in X\times X)$$

すると、ρ は X における Hamming 距離となり、$(X,(\rho^{-1}(j))_{j=0}^{d})$ は Hamming scheme $H(d,q)$ を構成する。$j\in\{0,1,\cdots,d\}$ に対し、$T(j)=\{J\in T;\ |J|=j\}$ とおくと、$T=\bigcup_{j=0}^{d}T(j)$, $T(0)=\{\emptyset\}$ となる。さらに、すべての $j\in\{0,1,\cdots,d\}$ に対し、

$$\rho^{-1}(j)=\bigcup_{J\in T(j)}R_J$$

を得る。したがって、$H(d,q)$ は $H(d,q)^{\sim}$ の subassociation scheme となる。□

参考文献

[1] E. Bannai and T. Ito, Algebraic Combinatorics I, Benjamin/Cummings, Menlo Park, California, 1984.

[2] E. Bannai, Subschemes of Some Association Schemes, J. of Algebra 144 (1991) 167-188.

[3] M. Hashizume and K. Ichihara, The pre-Hamming schemes.

Bratteli diagrams of finite groups

千吉良直紀　(筑波大大学院２年)

作用素環論において、$\mathrm{II}_1 factor$ の分類は現在のところ極めて重要な問題であって、$\mathrm{II}_1 factor$ の一部は有限群から得られるということがわかっている。また Ocneanu や Popa などによる paragroup の研究によれば、有限群から得られる $\mathrm{II}_1 factor$ は、Bratteli diagram とその dual から得られることが知られている。今回は、有限群とその部分群の組と Bratteli diagram との対応について調べた。 この研究は、筑波大の飯寄信保氏との共同研究である。

定義１． G を有限群とし、H をその部分群とする。*Bratteli diagram* $B(G,H)$ とは次のようなグラフである。

$$V(B(G,H)) = Irr_{\mathbb{C}}(G) \cup Irr_{\mathbb{C}}(H)$$

$$\chi \overset{m}{-} \varphi \Leftrightarrow (\chi_H,\varphi)_H = m \quad for\ \chi \in Irr_{\mathbb{C}}(G), \varphi \in Irr_{\mathbb{C}}(H)$$

注意１． $B(G,H)$ は *bipartite graph* である。

次のような記号を用意する。

記号１．

(1) $$n(B(G,H)) = B(G,H)\text{の連結成分の個数}$$
(2) $$M = B(G,H)\text{の最大の}valency$$

$B(G,H)$ の連結性について次のような補題がある。

補題１ (Ito-Munemasa,Kiyota)．

$$n(B(G,H)) = 1$$

$\Longleftrightarrow$

$$Core_G(H) = \bigcap_{g\in G} H^g = 1$$

またこの補題から
(1_G を含む component)$\cong B(G/Core_G(H), H/Core_G(H))$
であることがわかる。したがって $Core_G(H) = 1$ について考察する。さらに簡単な考察から次のような補題が得られる。

補題２． $(G:H) < M^2$.

この補題を用いて次のような定理を得た。

定理１． $Core_G(H) = 1$ とする。このとき $M \leq 3$ ならば、群の同型を除いて *15* 個の場合に分類される。

これらの 15 個の $B(G,H)$ は、実際別表 (1) のようになる。
また、$B(S_4, Z_4) \cong B(S_4, Z_2 \times Z_2)$ のように、群が違っていても同じ diagram になる場合として次のようなものが考えられる。

注意２．

1. G がある *Frobenius* 群の場合になる。例えば、

$$B(D_{18}, Z_2) \cong B(3^2 : 2, Z_2)$$

である。

2. G を有限群とし、H をその部分群とする。さらに 2 つの有限群 K_1, K_2 が全く同じ *character degree* をもつとき、

$$B(G \times K_1, H) \cong B(G \times K_2, H)$$

この他にもまだ考えられるが、一般にどのようなものがあるかは知られていない。
さて定理 1 からわかるように、任意の bipartite graph が Bratteli diagram となるような組 (G,H) をもつとき、グラフにかなりの制限があることがわかる。そこで以下特別なグラフについて考察する。

定理２． $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ を別表（2）にあるグラフとする。

1. 組 (G,H) が存在して $\Gamma_1 = B(G,H)$ となる。
$\Longleftrightarrow$
$a = 2^{n-1}$, $b = 2^{n-1} - 1$,
$G = PSL(2, 2^n)$, $H = N_G(Q)$, $Q \in Syl_2(G)$.

2. 組 (G,H) が存在して $\Gamma_2 = B(G,H)$ となる。

$\Longleftrightarrow$

$a = b = (q-3)/4$, $q \equiv -1 \pmod 4$,

$G = PSL(2,q)$, $H = N_G(Q)$, $Q \in Syl_p(G)$, $|Q| = q = p^n$.

3. 組 (G,H) が存在して $\Gamma_3 = B(G,H)$ となる。

$\Longleftrightarrow$

$a = (q-1)/4$, $b = (q-5)/4$, $q \equiv 1 \pmod 4$,

$G = PSL(2,q)$, $H = N_G(Q)$, $Q \in Syl_p(G)$, $|Q| = q = p^n$.

このようにいくつかの例外を除いて、多くの Bratteli diagram は組 (G,H) と対応がつくのではないかと考えられる。実際つぎのようなことがわかる。

定理 3 . $G = PSL(2,q)$, $Sz(q)$, $PSU(3,q)$ とし、
$H = N_G(Q)$, $Q \in Syl_p(G)$, $|Q| = q = p^n$ とする。
このとき *Bratteli diagram* $B(G,H)$ と組 (G,H) は 1 対 1 に対応する。

$Sz(q)$, $PSU(3,q)$ のグラフは複雑になる。

さらに $Sz(q)$, $PSU(3,q)$ についても定理 2 のようにグラフに自由度を与えても、組 (G,H) と対応するグラフが決定できることがわかっている。

References

[1] V. Jones, *Index for subfactors*, Inventiones Mathematicae **72** (1983) pp. 1-25.

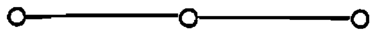
[2] M. Kiyota, *The Connected Components of Bratteli Diagrams for Finite Groups*, Bull. Gen. Educ. Tokyo Med. Dent. Univ. **22** (1992) pp. 31-34.

[3] T. Ito and A. Munemasa, *private communication.*

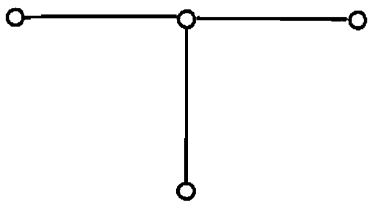
[4] N. Chigira and N. Iiyori, *Bratteli Diagrams of Finite Groups* (*in preparation*).

別表（1）

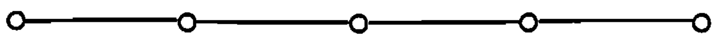
$\cong B(1,1)$



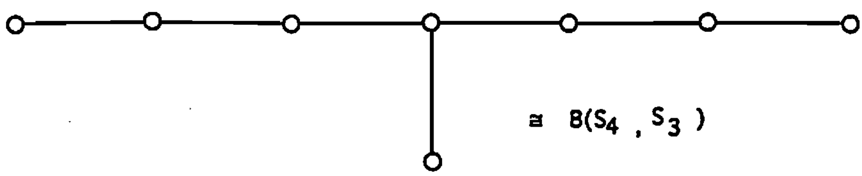
$\cong B(Z_2, 1)$



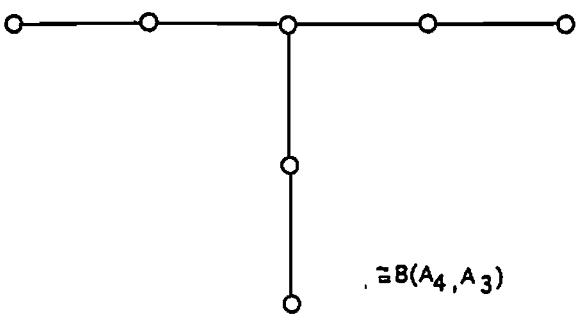
$\cong B(Z_3, 1)$



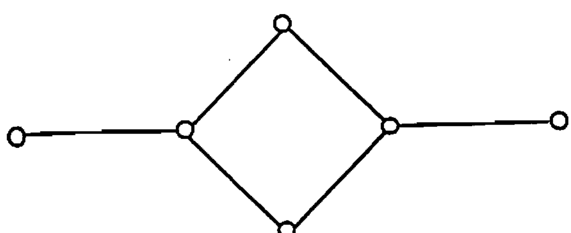
$\cong B(S_3, S_2)$



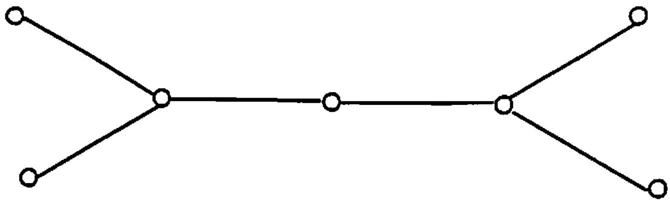
$\cong B(S_4, S_3)$



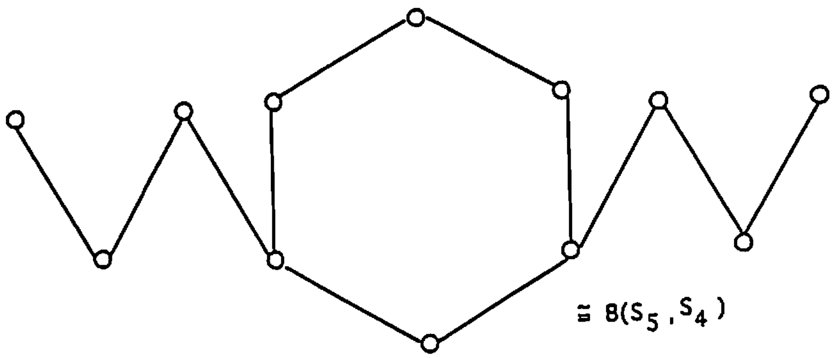
$\cong B(A_4, A_3)$



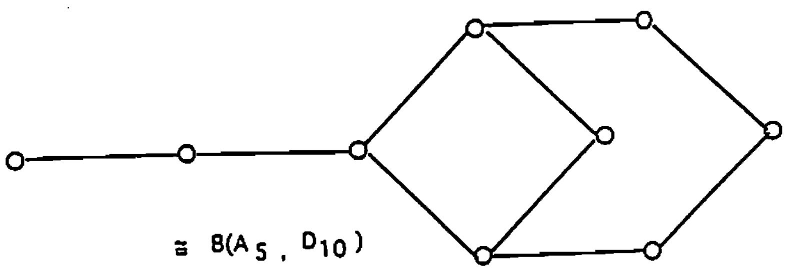
$\cong B(D_{10}, Z_2)$



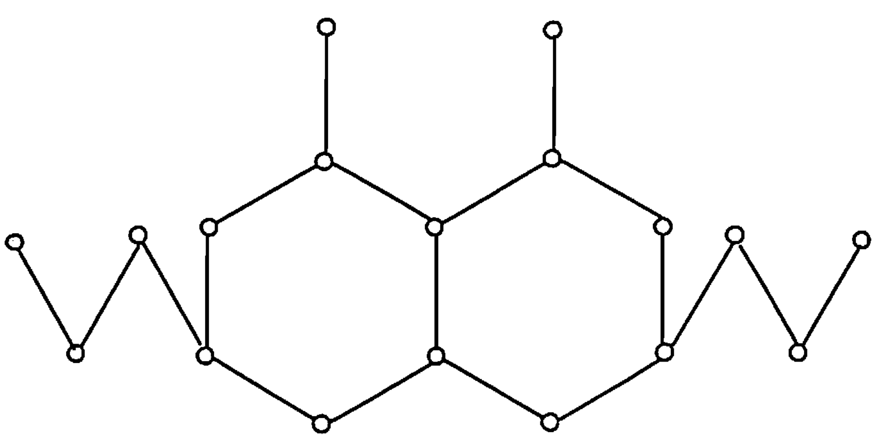
$\cong B(D_8, Z_2)$



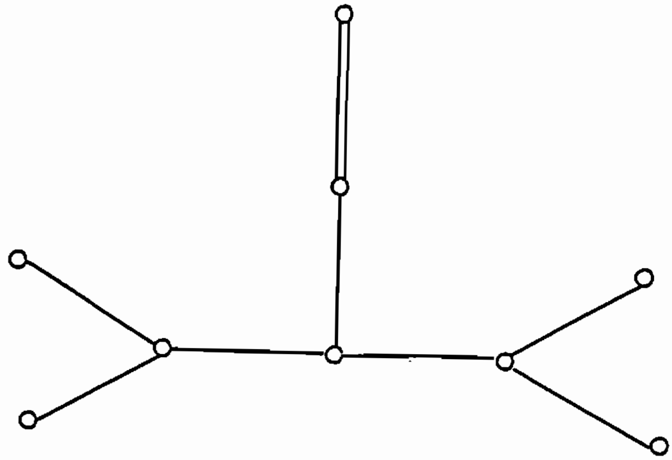
$\cong B(S_5, S_4)$



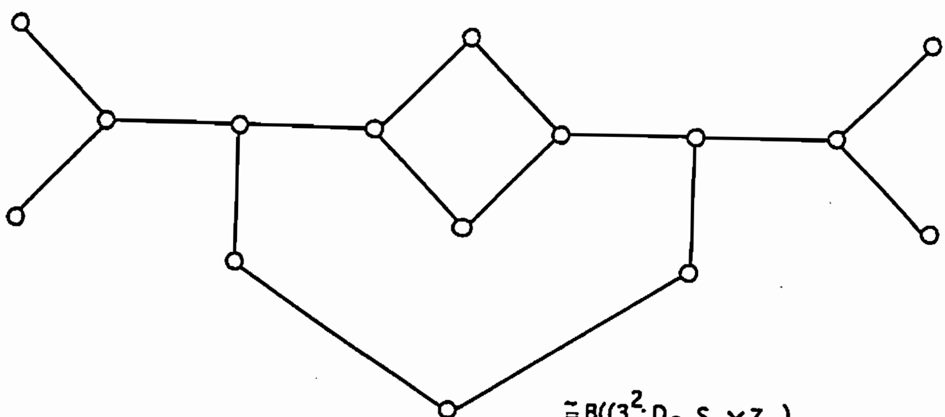
$\cong B(A_5, D_{10})$



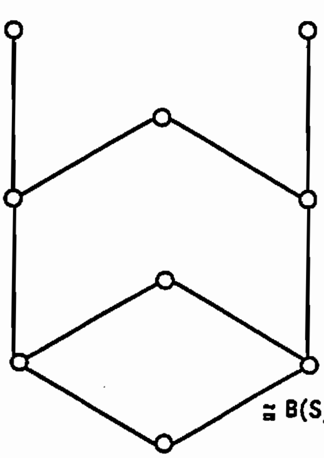
$\cong B(S_6, S_5)$



$\cong$ B(3^2:4, S_3)

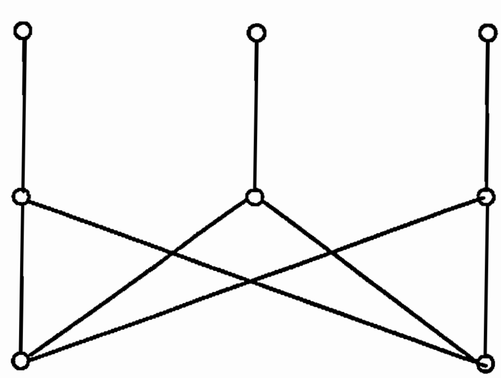


$\cong$B((3^2:D_8, $S_3 \times Z_2$)



$\cong$ B(S_4 , $Z_2 \times Z_2$)

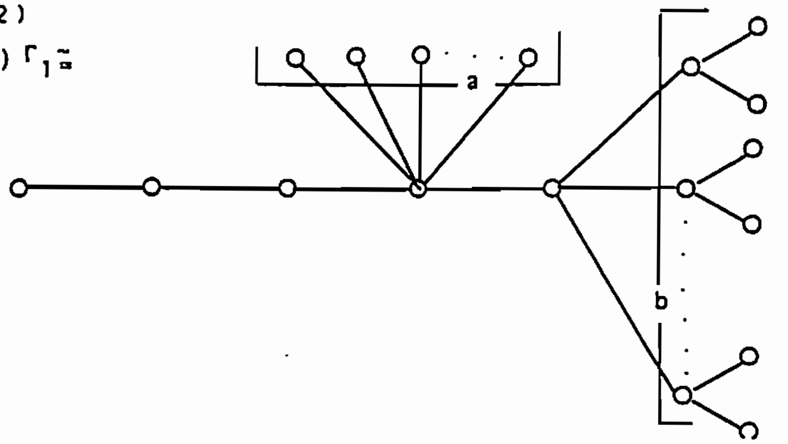
$\cong$ B(S_4 , Z_4)



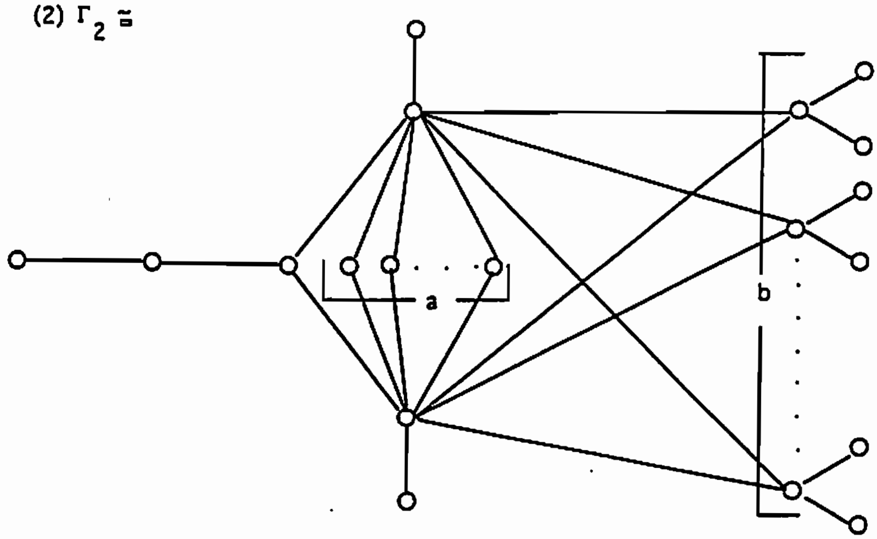
$\cong$ B(7:3, Z_3)

別表（２）

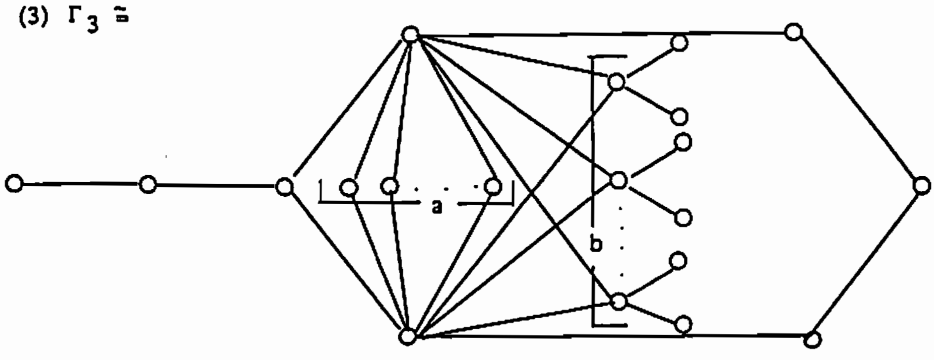
(1) $\Gamma_1 \cong$



(2) $\Gamma_2 \cong$



(3) $\Gamma_3 \cong$



可換不足群を持ち惰性剰余群が位数4の巡回群であるブロックのパーフェクトアイソメトリーについて

パリ第7大学　Lluis Puig
お茶の水女子大学　宇佐美陽子 (Yoko Usami)

§1 可換不足群を持つ場合の Alperin 予想

この講演内容は、1991年秋京都大学数理解析研究所で行なわれたシンポジウム「有限群と有限次元多元環の表現論」における講演 "Perfect isometries for blocks with abelian defect groups and Klein four inertial quotients" (with Lluis Puig) [6],[7] に続くものである。惰性剰余群が、位数4の群のうち、位数4の巡回群になる場合を残していたが、消去したい可能性の一つが消せないでいた。ところが、後述する Puig-渡辺の新しい定理によって首尾良くそれが消せた為に、今回の結果を得ることができた。従って、背景は、前回と同じであり、細かい定義や文献等の詳しい事は、前回シンポジウム報告集 [7] を参照して頂きたく、余り重複せぬ様、最小限の記述にとどめる。

pは素数、kは標数pの代数的閉体、$\mathcal{O}$は完備離散付値環でその剰余体がk、商体が標数0のKとなるものとし、Gは有限群、bはGのp-ブロック（すなわち、$Z(kG)$の原始巾等元）、Pは、bの不足群，eは$C_G(P)$におけるbのルートと呼ばれるp-ブロック，Eは、惰性剰余群$N_G(P,e)/PC_G(P)$とする。Kは、考慮する群に関し、十分に大きいと仮定する。また、$\ell(b)$は、単純kGb-加群の同型類の個数、$k(b)$は、単純$KG\hat{b}$-加群の同型類の個数（$\hat{b}$はbの持ち上げ）とする。

有名なAlperinのweight予想は、Pが可換の時は、次のように表わされる。

予想1　Pが可換群ならば、$\ell(b)$は、単純$kN_G(P,e)e$-加群の同型類の個数に等しい。

この予想は、$|E|\leqq 3$及びEがKleinの4元群の時は、成り立つことが知られている。今回Eが位数4の巡回群の場合に、成り立つことが言えて、$|E|\leqq 4$で言えたことになる。

今、(G,b)に対して、$L_K(G)$とは、Gの（通常）一般指標全体、$L_K(G,b)$とは、そのうちbに関するもの（bで決まるprojectorによる像）とする。$CF_{\mathcal{O}}(G)$は、$\mathcal{O}$に値を取るG上のcentral function全体であり、$CF_{\mathcal{O}}(G,b)$は、そのう

ちbに関するものとする。更に$BCF_K(G)$とは、Kに値を取るGのp'-元上のG-central function全体とし、$BCF_K(G,b)$は、そのうちbに関するものとする。群とそのp-ブロックの組が、2組ある時、(片方の組を(G,b)として)Broué [1]の命名したパーフェクトアイソメトリーとは$L_K(G,b)$どうしの間の全単射アイソメトリーであって、それが$CF_0(G,b)$どうしの全単射のみならず、$BCF_K(G,b)$どうしの全単射をも誘導するものである([7]第5節定義1参照)。そしてこのパーフェクトアイソメトリーは、その定義から、$k(b)$、$\ell(b)$を保存するのみならず、通常既約指標の高さ等をも、保存する性質を持つ([7]第5節命題3参照)。

実際$|E| \leqq 4$のいずれの場合も、(G,b)と$(N_G(P,e),e)$の間に、パーフェクトアイソメトリーの存在する事が示せて予想1が成り立った。しかもそのパーフェクトアイソメトリーは、全てのb-Brauer pair(Q,f)達を介してinductiveに構成される強い性質を持つものである。Brouéは、そのような密接な関連を持つ群とそのp-ブロックの組どうしに、<u>同じブロックタイプ</u>という概念を定義し、(正確な定義は、[7]第5節定義4参照)次のような予想を立てている。

<u>予想2 (Broué)</u> Pが可換なら、(G,b)と$(N_G(P,e),e)$とは

同じブロックタイプである。

$|E| \leqq 4$では、予想2も成り立つことが示せた。

§2. 予想1の言い換え及び主定理

$N_G(P,e)$のp-ブロックeは正規部分群となる不足群Pを持っている為、既に得られている正規不足群の場合のPuig, Külshammerの結果[3],[2]によって、$(N_G(P,e),e)$の方は、$P \rtimes E$（PとEの半直積）のある twisted群環に帰着できる。Pが特に可換の時は、$N_G(P,e)$とeから決まるEのk^*-中心拡大のoppositeな群$\hat{E}$が定義し易く、$(N_G(P,e),e)$との関連も見易い（[7]第2節、Lemma 1 参照）。$\hat{L}$をPとこの$\hat{E}$の半直積とし、実際上、(G,b)と$\hat{L}$の間にパーフェクトアイソメトリーを構成（存在を示す）し、$\ell(b)$が単純$k_*\hat{L}$-加群（単純$k_*\hat{E}$-加群にしても同値）の同型類の個数に等しいと言う（$k_*\hat{E}$等は対応するtwisted群環，[7]の予想2参照）。実は、$\hat{L}$は、その適当な有限部分群L'とその適当なp-ブロックb'によって、(L',b')に置き換え得る。

<u>主定理</u>　上記表記法で、Pは可換、Eは位数4の巡回

群とすると、$CF_0(\hat{\mathcal{L}})$と$CF_0(G,b)$の間に次の(i)(ii)をみたす全単射アイソメトリーΔが存在する。

(i) $\Delta(L_K(\hat{\mathcal{L}})) = L_K(G,b)$

(ii) 任意の$\eta \in CF_0(\hat{\mathcal{L}})$及びE-不変な任意の$\lambda \in CF_0(P)$に対して、$\Delta(\lambda * \eta) = \lambda * \Delta(\eta)$が成り立つ。

$\lambda * \eta$等の定義及び、この性質(i)(ii)で、パーフェクトアイソメトリーである事が保証される事は、[7]第3節を参照せよ。

§3. Puig-渡辺の定理

Puigは、[4]第1節1.9.2において一般のpーブロックb(不足群が可換と限らず)について

bが巾零 $\Longrightarrow$ 任意のb-Brauer pair (Q,f)について$\mathcal{O}C_G(Q)f$をそのラディカルで割ったものは単純k-algebraである。

を示し、逆も多分正しいであろうと述べている。この右側帰結部分は、任意のb-Brauer pair (Q,f)について、($C_G(Q)$では)$\ell(f)=1$ということである。ところで、b-Brauer element (u,f)とは、$Q=\langle u\rangle$なる特殊なb-Brauer pairにほかならないので、次の定理は、不足群が可換であれば、逆の成り

立つこと（しかもよりゆるい条件で）を示している。

<u>Puig-渡辺の定理</u> [8] 有限群Gのp-ブロックbの不足群が可換とする。全てのb-Brauer element (u,f)について（$(1,b)$も含めて）$\ell(f)=1$であれば、bは巾零である。

一般に可換不足群の時、巾零ブロックは、惰性剰余群が1となる。Eが位数4の巡回群の時、証明途上の消したかった可能性は、この定理の条件をぴったり満たす場合なので消去できた。

§4. 追加と展望

証明方針は、[7]第4節を参照せよ。任意のb-Brauer pair (Q,f)について、全単射アイソメトリー $\Delta_Q : CF_0(C_{\hat{L}}(Q)) \longrightarrow CF_0(C_G(Q),f)$を（$Q=P$から開始し、$P$の全ての部分群について最終的に$Q=1$へ）構成してゆきながら、言わば、貼り合わせてゆくとでも言っておこう。

Eを与えられた群として証明する時、予想1の言い換えでは、$\ell(b)$は$\hat{E}$に依り、EのPへの作用に依らないし、我々の方法は、EのPへの作用のあらゆる場合を包括する（実

は、せざるを得ぬ）形になっている。またアイソメトリーが作れるか否かの鍵は、ガーえ上零となる一般指標どうしのアイソメトリーを、一般指標どうしのアイソメトリーに拡張できるか否かにかかっている。ところが、P ⋊ E が（E を Frobenius 補群とする）Frobenius 群になる場合は、ガーえ上零となる一般指標どうしのアイソメトリーは、作れても、（[5] 1.4 の最後及び定理 6.11，系 6.15 も参照せよ）一般指標どうしのアイソメトリーまで拡張する時に、E が大きいと、消したいのに消せぬ可能性が混入してしまう。E が位数 4 の巡回群の時は、Puig－渡辺の定理で切り抜けたが、位数 5 の巡回群で、既に手に負えない。しかし、E が位数 6 の二面体群ならば、Frobenius 補群になり得ぬ為、主定理と同じ事が証明できたと思う。現在 E が位数 8 の二面体群の場合を計算中である。

E を与えられた群 H にした時、証明途中で、（先の言わば貼り合わせ等の為）惰性剰余群が、H に involve される H より小さい位数の群の時の結果を使う。従って、|E| の素因数が 2，3 のみかつ E が Frobenius 補群になり得る群を involve しない限り、E の位数がそれ程大きくなく構造が決まる間は、inductive にやってゆく事は、或いは可能かも知れない。Alperin 予想についての Dade の研究を考慮し、

Gが単純群の時のEの可能性とからめて考えるとか、P⊲E
がFrobenius群になる場合（特にE巡回群の時）を、何か
別の方法を導入して解決できないかという事が課題となろう。

文　　献

[1] M. Broué　Isométries parfaites, types de blocs, catégories derivés, Astérisque 181–182 (1990) 61–92

[2] B. Külshammer　Crossed products and blocks with normal defect groups, Comm. Algebra 13 (1985) 147–168

[3] L. Puig　Pointed groups and constructions of modules, J. Algebra 116 (1988) 7–129

[4] L. Puig　Nilpotent blocks and their source algebras, Invent. Math. 93 (1988) 77–116

[5] L. Puig　Une correspondance de modules pour les blocs à groupes de défaut abéliens

[6] L. Puig & Y. Usami　Perfect isometries for blocks with abelian defect groups and Klein four inertial quotients

[7] 同上　同上,「有限群と有限次元多元環の表現論」シンポジウム報告集 1991　京大数理解析研講究録

[8] L. Puig & A. Watanabe　On blocks with one simple module in any Brauer correspondent

Alternating Sign Matirx と Weyl の分母公式

名大・理　岡田聡一　(Soichi Okada)

§1. Alternating Sign Matrix.

Alternating sign matrix は，正方行列 M の行列式 $\det M$ を M の小行列式の有理関数として表わす公式と関連して，導入された.（[RR]）そして，平面分割の数え上げ問題との関係から，alternating sign matrix の数え上げ問題も考察されている.（[MRR1], [MRR2], [R]）

定義. $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n}$ は，次の条件を満たすとき，**alternating sign matirx** という.

(1) $a_{ij} \in \{1, 0, -1\}$
(2) $\sum_{k=1}^{j} a_{ik} = 0$ or 1 for any i and j.
(3) $\sum_{k=1}^{i} a_{kj} = 0$ or 1 for any i and j.
(4) $\sum_{k=1}^{n} a_{kj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} = 1$ for any i and j.

n 次 alternating sign matrix 全体の集合を $\mathcal{A}_n$ と表わす.

n 次置換行列全体の集合を $\mathfrak{S}_n$（n 次対称群）とすると，上の定義から，-1 を成分としない alternating sign matrix は置換行列に他ならないから，$\mathfrak{S}_n \subset \mathcal{A}_n$ である．例えば，$\mathcal{A}_1 = \mathfrak{S}_1, \mathcal{A}_2 = \mathfrak{S}_2$ であるが，

$$\mathcal{A}_3 = \mathfrak{S}_3 \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Mills-Robbins-Rumnsey は，$\mathcal{A}_n$ の元の個数について，次の予想をたてている.

予想. ([MRR1])

$$\#A_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(3k+1)!}{(n+k)!}$$

ここでは，alternating sign matrix を置換行列の拡張と見なして，それを用いた Weyl の分母公式の deformation について述べる.

§2. A 型の場合.

Alternating sign matrix $A = (a_{ij}) \in \mathcal{A}_n$ に対して,

$$i(A) = \sum_{i<k,j>l} a_{ij}a_{kl}$$

とおく. A が置換 σ に対応する置換行列ならば, つまり, $a_{ij} = \delta_{i,\sigma(j)}$ ならば,

$$i(A) = \#\{(i,j) : 1 \leq i < j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

となり, $i(A)$ は置換 σ の転倒数 (inversion number) に等しい. また, $A \in \mathcal{A}_n$ 中の -1 の個数を $s(A)$ と表わす. このとき,

定理 A. (徳山 [T])

$$\prod_{1\leq i<j\leq n} (1 + tx_ix_j^{-1}) = \sum_{A\in\mathcal{A}_n} t^{i(A)} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{s(A)} x^{\delta(A_{n-1})-A\delta(A_{n-1})}$$

ここで, $\delta(A_{n-1}) = {}^t(n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$ であり, $\alpha = {}^t(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ に対して, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ である.

この定理で, $t = -1$ とおくと,

系.

$$\prod_{1\leq i<j\leq n} (1 - tx_ix_j^{-1}) = \sum_{A\in\mathfrak{S}_n} (-1)^{i(A)} x^{\delta(A_{n-1})-A\delta(A_{n-1})}$$

これは, A_{n-1} 型の root 系 $(GL(n, \mathbb{C}))$ に対する Weyl の分母公式 (Vandermonde の行列式) である. また, $t = 1$, $x_1 = \cdots = x_n = 1$ の場合を考えると,

系.

$$\sum_{A\in\mathcal{A}_n} 2^{s(A)} = 2^{\binom{n}{2}}$$

§3. B 型の場合.

次に, B 型の root 系に対する Weyl の分母公式の deformation を考える. J_N を次のような $N \times N$ 行列とする.

$$J_N = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

そして,

$$\mathcal{B}_n = \{A \in \mathcal{A}_{2n} : J_{2n} A J_{2n} = A\}$$

とおく. このとき,

$$\mathcal{B}_n \cap \mathfrak{S}_{2n} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma\tau_n = \tau_n\sigma\} = W(B_n)$$

($\tau_n = (1,2n)(2,2n-1)\dots(n,n+1)$) は, B_n 型の Weyl 群となる. 分母公式の deformation を述べるために, 次の量を導入する.

定義. $L = \{(i,j;k,l) \in [2n]^4 : i < k, j > l\}$ ($[2n] = \{1,2,\dots,2n\}$) とおき, L の部分集合 L_1, L_2 を

$$L_1 = \{(i,j;k,l) \in L : i+k = 2n+1, j+l = 2n+1\}$$
$$L_2 = L - L_1$$

によって定め, $A \in \mathcal{B}_n$ に対して,

$$i_p(A) = \sum_{(i,j;k,l)\in L_p} a_{ij}a_{kl}, \quad p = 1,2$$

$$i_1^+(A) = \#\{(i,j) : 1 \le i \le n, n+1 \le j \le 2n, a_{ij} = 1\}$$

とおく.

これらの記号を用いると,

定理 B.

$$\prod_{i=1}^{n}(1-tx_i)\prod_{1\le i<j\le n}(1-t^2x_ix_j)(1-t^2x_ix_j^{-1})$$

$$=\sum_{A\in B_n}(-1)^{i_1^+(A)+i_2(A)/2}t^{i(A)}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^{s(A)/2}x^{\delta(B_n)-A\delta(B_n)}$$

ここで，$\delta(B_n)={}^t(n-\frac{1}{2},n-\frac{3}{2},\dots,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\dots,-(n-\frac{1}{2}))$ であり，$\alpha={}^t(\alpha_1,\dots,\alpha_n,-\alpha_n,\dots,-\alpha_1)$ に対して，$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$ と書く．

この定理で，$t=1$ とおくと，B_n 型の root 系に対する Weyl の分母公式になる．

系.

$$\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)\prod_{1\le i<j\le n}(1-x_ix_j)(1-x_ix_j^{-1})=\sum_{A\in W(B_n)}(-1)^{l(A)}x^{\delta(B_n)-A\delta(B_n)}$$

ここで，$l(A)=i_1^+(A)+\frac{1}{2}i_2(A)$ は $A\in W(B_n)$ の長さである．

§4. C 型の場合．

C 型の場合には，

$$\mathcal{C}_n=\{A\in\mathcal{A}_{2n+1}:J_{2n+1}AJ_{2n+1}=A\}$$

とおく．すると，$\mathcal{C}_n\cap\mathfrak{S}_n\cong W(B_n)$ となる．

定義．$L=\{(i,j;k,l)\in[2n+1]^4:i<k,j>l\}$ とおき，L の部分集合 L_0, L_1, L_2 を次のように定める．

$$L_0=\{(i,j;k,l)\in L:i=n+1\text{ or }k=n+1\}$$

$$L_1=\{(i,j;k,l)\in L:i+k=2n+2,j+l=2n+2\}$$

$$L_2=L-(L_0\cup L_1)$$

$A\in\mathcal{C}_n$ に対して，

$$i_p(A)=\sum_{(i,j;k,l)\in L_p}a_{ij}a_{kl},\quad p=1,2$$

$$i_1^+(A)=\#\{(i,j):1\le i\le n,n+2\le j\le 2n+1,a_{ij}=1\}$$

とおく．

これらの記号を用いると，

定理 C.

$$\prod_{i=1}^{n}(1-tx_i)(1+t^2x_i)\prod_{1\le i<j\le n}(1-t^2x_ix_j)(1-t^2x_ix_j^{-1})$$

$$=\sum_{A\in C_n}(-1)^{i_1^+(A)+i_2(A)/2}t^{i(A)}\prod_{k=1}^{s(A)}\left(1+\frac{(-1)^k}{t}\right)x^{\delta(C_n)-A\delta(C_n)}$$

ここで，$\delta(C_n)={}^t(n,n-1,\dots,1,0,-1,\dots,-n)$ であり，$\alpha={}^t(\alpha_1,\dots,\alpha_n,0,-\alpha_n,\dots,-\alpha_1)$ のとき，$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$ である．

この定理で，$t=1$ とおくと，C_n 型の root 系に対する Weyl の分母公式が得られる．

系.

$$\prod_{i=1}^{n}(1-x_i^2)\prod_{1\le i<j\le n}(1-x_ix_j)(1-x_ix_j^{-1})=\sum_{A\in W(B_n)}(-1)^{l(A)}x^{\delta(C_n)-A\delta(C_n)}$$

D 型の root 系に対する Weyl の分母公式の deformation は，$2n\times(2n-1)$ 行列を用いてできるが，詳しくは [O3] を参照されたい．

§5. 証明.

定理 A, B, C の証明の概略を述べる．証明では，monotone triangle の母関数と，Littlewood の公式を用いる．

まず，monotone triangle とは，正整数 t_{ij} を

$$T=\begin{array}{ccccccccc} & & & & t_{11} & & & & \\ & & & t_{21} & & t_{22} & & & \\ & & t_{31} & & t_{32} & & t_{33} & & \\ & & & & \cdots & & & & \\ t_{n1} & & t_{n2} & & \cdots & & \cdots & & t_{nn}\end{array}$$

の形に並べたもので

(T1) $t_{i1} < t_{i2} < \cdots < t_{ii}$.

(T2) $t_{i+1,j} \leq t_{i,j} \leq t_{i+1,j+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1,\ j = 1, \ldots, i-1)$.

を満たすもののことである．

分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ $(\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > 0)$ に対して，λ を 1 番下の行とする monotone triangle 全体の集合を $\mathcal{M}(\lambda)$ とする．Monotone triangle $T = (t_{ij})$ に対して，

$$\max(T) = \#\{(i,j) : t_{i+1,j} < t_{ij} = t_{i+1,j+1}\}$$
$$\mathrm{sp}(T) = \#\{(i,j) : t_{i+1,j} < t_{ij} < t_{i+1,j+1}\}$$
$$x^T = x_1^{s_1} x_2^{s_2 - s_1} \ldots x_n^{s_n - s_{n-1}}$$

（ここで，$s_i = \sum_{j=1}^{i} t_{ij}$）とおく．

$n \times n$ alternating sign matrix $A = (a_{ij})$ が与えられたとき，$n \times n$ 行列 $B = B(A) = (b_{ij})$ を $b_{ij} = \sum_{k=1}^{i} a_{kj}$ によって定める．すると，alternating sign matrix の条件 (A1), (A2) から，$b_{ij} = 0$ または 1 であり，B の第 i 行には 0 でない成分がちょうど i 個ある．そこで，$b_{i,t_{i1}} = b_{i,t_{i2}} = \cdots = b_{i,t_{ii}} = 1$ $(t_{i1} < t_{i2} < \cdots < t_{ii})$ とすると，$T = T(A) = (t_{ij})$ は monotone triangle となる．例えば，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

のとき，

$$B(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(A) = \begin{array}{ccccccc} & & & 3 & & & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & 1 & & 2 & & 4 & \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 \end{array}$$

命題 1. $\delta_n = (n, n-1, \ldots, 2, 1)$ とする．このとき，

(1) T は $\mathcal{A}_n$ から $\mathcal{M}(\delta_n)$ への全単射である．

(2) $A \in \mathcal{A}_n$ のとき，

$$i(A) = \max(T(A)) + \mathrm{sp}(T(A)),$$
$$s(A) = \mathrm{sp}(T(A)),$$
$$x^{\delta_n - A\delta_n} = x^{T(A)} x_1^{-1} x_2^{-2} \dots x_n^{-n}.$$

命題 2. λ を長さ n 以下の分割とする．このとき，

$$\prod_{1 \le i < j \le n} (1 + t x_i x_j^{-1}) s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$$
$$= \sum_{T \in \mathcal{M}(\lambda + \delta_n)} t^{\max(T) + \mathrm{sp}(T)} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\mathrm{sp}(T)} x^T x_1^{-1} x_2^{-2} \dots x_n^{-n}$$

ここで，$s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ は分割 λ に対応する Schur 関数である．

ここで，$\lambda = 0$ のときを考えると，命題 1 とあわせて，定理 A が得られる．

次に，B, C 型の Weyl の分母公式の deformation を導く．$\mathcal{B}_n$, $\mathcal{C}_n$ の元 $A = (a_{ij})$ は，行列を 180° 回転しても変わらないから，$T(A)$ の上半分から A が復元できる．

命題 3. $A \in \mathcal{B}_n$ に対して，$T(A)$ の上半分の n 行からなる monotone triangle を $T^+(A)$ とする．このとき，T^+ は，全単射

$$T^+ : \mathcal{B}_n \to \coprod_\lambda \mathcal{M}(\lambda + \delta_n)$$

（ここで，λ は $\lambda \subset (n^n)$ となる self-conjugate な分割全体を走る）を引き起こす．さらに，$A \in \mathcal{B}_n$, $T = T^+(A) \in \mathcal{M}(\lambda + \delta_n)$ のとき，

(1) $i_1^+(A) + \frac{1}{2} i_2(A) = \frac{|\lambda| + p(\lambda)}{2} + \max(T) + \mathrm{sp}(T)$.

(2) $i(A) = |\lambda| + 2\max(T) + 2\,\mathrm{sp}(T)$.

(3) $s(A) = 2\,\mathrm{sp}(T)$.

(4) $x^{\delta(B_n) - A\delta(B_n)} = x^T x_1^{-1} x_2^{-2} \dots x_n^{-n}$.

ここで，$p(\lambda) = \#\{k \in \mathbb{Z} : \lambda_k \geq k\}$ である．

補題 4. ([L, p.238], [Mac, I. Ex.5.9])

$$\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)\prod_{1\leq i<j\leq n}(1-x_ix_j) = \sum_{\lambda}(-1)^{(|\lambda|+p(\lambda))/2}s_\lambda(x_1,\ldots,x_n)$$

ここで，λ は $\lambda \subset (n^n)$ となる self-conjugate な分割全体を走る．

この補題で，x_i を tx_i と置き換えると，

$$\prod_{i=1}^{n}(1-tx_i)\prod_{1\leq i<j\leq n}(1-t^2x_ix_j) = \sum_{\lambda}(-1)^{(|\lambda|+p(\lambda))/2}t^{|\lambda|}s_\lambda(x_1,\ldots,x_n)$$

この両辺に $\prod_{1\leq i<j\leq n}(1-t^2x_ix_j^{-1})$ をかけて，命題 2 で t を $-t^2$ で置き換えたものを用いると，

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{n}(1-tx_i)\prod_{1\leq i<j\leq n}(1-t^2x_ix_j)(1-t^2x_ix_j^{-1}) \\
&= \sum_{\lambda\subset(n^n),\lambda'=\lambda}\ \sum_{T\in\mathcal{M}(\lambda+\delta_n)}(-1)^{(|\lambda|+p(\lambda))/2+\max(T)+\mathrm{sp}(T)} \\
&\qquad\qquad \times t^{|\lambda|+2\max(T)+2\,\mathrm{sp}(T)} \\
&\qquad\qquad \times x^T x_1^{-1}x_2^{-2}\ldots x_n^{-n}
\end{aligned}$$

よって，命題 3 を用いると，定理 B が得られる．

定理 C もほぼ同様に示すことができるが，補題 4 のかわりに次の公式を用いなければならない．

補題 5.

$$\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)(1+tx_i)\prod_{1\le i<j\le n}(1-x_ix_j)$$
$$=\sum_{\lambda}(-1)^{(q(\lambda)+r(\lambda))/2}t^{|\lambda|-r(\lambda)}\prod_{k=1}^{u(\lambda)}\left(1+\frac{(-1)^k}{t}\right)s_\lambda(x_1,\ldots,x_n)$$

ここで，λ は，

$$n\ge\beta_1+1\ge\alpha_1\ge\beta_2+1\ge\alpha_2\ge\cdots\ge\beta_p+1\ge\alpha_p$$

（ここで，$p=p(\lambda)$, $\alpha_k=\lambda_k-k$, $\beta_k=\lambda'_k-k$, λ' は λ の connjugate partition）を満たす分割全体を動き，

$$q(\lambda)=\#\{k\in[n]:\lambda_k>k\}$$
$$r(\lambda)=\#\{(k,l)\in[n]\times[n]:\lambda_k+\lambda_l>k+l\}$$
$$u(\lambda)=\#\{(k,l)\in[n]\times[n]:\lambda_k+\lambda_l=k+l\}$$

References

[L] D. E. Littlewood, "The Theory of Group Characters," 2nd ed., Oxford Univ. Press, London, 1950.

[Mac] I. G. Macdonald, "Symmetric Functions and Hall Polynomials," Oxford Univ. Press, Oxford, 1979.

[MRR1] W. H. Mills, D. P. Robbins, and H. Rumsey. Jr, *Alternating sign matrices and descending plane partitions*, J. Combin. Theory Ser. A 34 (1983), 340–359.

[MRR2] ———————, *Self-complementary totally symmetric plane partitions*, J. Combin. Theory Ser. A 42 (1986), 277-292.

[O1] S. Okada, *shifted plane partition* の母関数, in "組合せ論とその周辺の研究," 数理解析研究所講究録 670, 1988, pp. 233–250.

[O2] *Partially strict shifted plane partitions*, J. Combin. Theory Ser. A **53** (1990), 143–156.

[O3] *Alternating sign matrices and some defoemations of Weyl's denominator formulas*, preprint.

[R] D. P. Robbins, *The Story of* $1, 2, 7, 42, 429, 7436, \ldots$, Math. Intelligencer **13** (1991), 12–19.

[RR] D. P. Robbins and H. Rumsey, Jr, *Determinants and Alternating Sign Matrices*, Adv. in Math. **62** (1986), 169–184.

[T] T. Tokuyama, *A generating function of strict Gelfand patterns and some formulas on characters of general linear groups*, J. Math. Soc. Japan **40** (1988), 671–685.

The Hammond operator algebra and the Bell polynomials

上野　一男　（Kazuo UENO）
名工大・数学　（Math., Nagoya Inst. Tech.）

1. Hammond operators は，Hammond [4,5]により，対称式の理論に導入された。これの研究を本格的に展開したのは MacMahon [7, 8]である。彼らの仕事は主に1880年代に行なわれたが，それから約半世紀後に書かれた [14] には，同じような内容がもう少し要領よくまとめられている。ただし，[14]の著者 van der Corput が Hammond や MacMahon の仕事を知っていたのかどうかは読みとれない。

私は [5, 7, 14] の中の基本的な結果を，もう少し clear に説明し，また，Riordan [11]によって指摘された対称式と Bell 多項式との関連を，理解しやすい形にしようと試みた [13]．以下にそれを簡単にスケッチします。

2. 記号は，MacMahon [7] と Macdonald [6]によるものを混ぜて使う。また，すべて有理数体$\mathbb{Q}$上で考える。$\{\alpha_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ を可算個の不定元とし，これに関する対称式代数

を $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ と書く [6]。$\Lambda_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{\lambda} \mathbb{Q}\cdot m_\lambda$，$m_\lambda$ は partition λ に対する monomial symmetric function，だが，その代数独立基として，次の3つがよく用いられる：elementary symmetric functions a_i，complete homogeneous symmetric functions h_i，power sum symmetric functions s_i；つまり，$\Lambda_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[a_1, a_2, \ldots] = \mathbb{Q}[h_1, h_2, \ldots] = \mathbb{Q}[s_1, s_2, \ldots]$.

$\Lambda_{\mathbb{Q}}$ には $\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$，$\lambda, \mu$ は partition，$h_\lambda = h_{\lambda_1} \cdot h_{\lambda_2} \cdots$，により正値対称双線形形式を導入できる [6].

$\langle D(f)g, h \rangle = \langle g, fh \rangle$ により $D: \Lambda_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{End}(\Lambda_{\mathbb{Q}})$ がきまるが，これは代数単射になる。Dについては [6, pp.43–45] を見よ。$\omega(a_i) = h_i$ できまる $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ の involution と D の合成として $\mathrm{Ham} = D\circ\omega : \Lambda_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{End}(\Lambda_{\mathbb{Q}})$ を定義するとこれは代数単射になるので，$\mathrm{Ham}(\Lambda_{\mathbb{Q}}) = \mathbb{Q}[\mathrm{Ham}(s_1), \mathrm{Ham}(s_2), \ldots]$，ただし積は写像の合成，となる。$d_i = \mathrm{Ham}(s_i)$ とおくと，$d_i = \sum_{r \geq 0} a_r \partial/\partial a_{i+r}$，ただし $a_0 = 1$，がわかる。特に $d_1 = \partial/\partial a_1 + a_1 \partial/\partial a_2 + a_2 \partial/\partial a_3 + \cdots$ だが，これは次のように理解される：別の不定元 ξ を導入すると，

$$(1+\xi x)\prod_{i\geq 1}(1+\alpha_i x) = (1+\xi x)(1+a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)$$
$$= 1 + (a_1+\xi)x + (a_2 + \xi a_1)x^2 + \cdots,$$

つまり x^i の係数に注目すると，$a_i \mapsto a_i + \xi a_{i-1}$ という変換が引きおこされている。これを $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ 上の変換と考えると，次項の記号

を使えば，$\exp^{\#}(\xi d_1)$ と表せる。この意味で d_1 は，新しい不定元を導入することに対応する無限小変換と見なせる [7, p. 27]．

3. part λ が i 個，part μ が j 個，… あるような partition $(\lambda^i\mu^j\cdots)$ に対し augmented monomial symmetric function を $[\lambda^i\mu^j\cdots]=i!j!\cdots(\lambda^i\mu^j\cdots)$，ただし $(\lambda^i\mu^j\cdots)$ は同じ記号の partition に対応する monomial symmetric function，と定める。次に，$d_{i_1}\#d_{i_2}\#\cdots\#d_{i_k}=\sum_{r_1,\ldots,r_k\geq 0}a_{r_1}\cdots a_{r_k}\times\partial^k/\partial a_{i_1+r_1}\cdots\partial a_{i_k+r_k}$ と定義する。

Proposition [5, 7, 13, 14]. $\mathrm{Ham}([\lambda^i\mu^j\cdots])=d_\lambda^{\#i}\#d_\mu^{\#j}\#\cdots$，ただし $d_\lambda^{\#i}=d_\lambda\#\cdots\#d_\lambda$ (i 個)．

Corollary [13]. $\mathrm{Ham}(\Lambda_{\mathbb{Q}})=\bigoplus_{\text{all partitions}}\mathbb{Q}\cdot d_\lambda^{\#i}\#d_\mu^{\#j}\cdots$.

Ham$(\Lambda_{\mathbb{Q}})$ には２つの積，$\circ$（写像の積）と $\#$，がある。

Proposition [13]. $d_r\circ=d_r\#+\sum_{i\geq 1}d_{r+i}\#\partial^{\#}_{d_i}$，ただし，$\partial^{\#}_{d_i}$ は $\#$ 積による表式を d_i に関して微分することを表す。これは $\circ$ を $\#$ に翻訳する公式である。

Theorem [7, 12, 13]. c を Ham$(\Lambda_{\mathbb{Q}})$ のどの元とも可換な新しい不定元とすると，Ham$(\Lambda_{\mathbb{Q}})[[c]]$ において，

$\exp(d_1 c) = \exp^{\#}\left(\sum_{i \geq 1} d_i c^i / i!\right)$，ここで左辺の積は$\circ$，右辺の積は$\#$，がなりたつ。[13]では，この直前のPropositionを使って証明している。

4. 前項のTheoremの式の両辺をcのベキ級数に展開してc^iの係数を比較すると，$\pi(i)$をiのpartitionの全体として，

$$d_1^i = \sum_{\pi(i)} i!\, d_1^{\# k_1} \# \cdots \# d_i^{\# k_i} / k_1! \cdots k_i!\, 1!^{k_1} \cdots i!^{k_i}$$

$(k_1 + 2k_2 + \cdots + ik_i = i)$ [7, 13] が得られる。この両辺に$\mathrm{Ham}^{-1} : \mathrm{Ham}(\Lambda_{\mathbb{Q}}) \to \Lambda_{\mathbb{Q}}$を作用させると，

$$s_1^i = \sum_{\pi(i)} i!\, [1^{k_1} \cdots i^{k_i}] / k_1! \cdots k_i!\, 1!^{k_1} \cdots i!^{k_i}$$

[7, 11, 13]となる。ところで，d_1^iの右辺の表式は，$\#$積に関するBell多項式になっている。これは，前項のTheoremの式の右辺がその母級数になっているからである：

$$\sum_{i \geq 0} Y_i^{\#}(d_1, \ldots, d_i)\, c^i / i! = \exp^{\#}\left(\sum_{j \geq 1} d_j c^j / j!\right),$$

$Y_i^{\#}$は$\#$積に関するBell多項式。[7, 11]におけるこれらの事柄の説明の仕方は私にとってややミステリアスに感じられたことが，本稿のようなことを考える出発点だった。なお，前項のTheoremと同様なやり方で，より一般的な

$$\exp(d_i c) = \exp^{\#}\left(\sum_{j \geq 1} d_{ij} c^j / j!\right)$$

を証明することができる [13]。

5. MacMahon の本 [7] には Hammond operators に関していろいろな記述が見られるが，全集 [8] には [7] には収録されていない内容もある。[2, 3] には別の視点からの考察が書かれている。Bell 多項式については，ここでは [1, 9, 10] をあげておく。

References

[1] E.T. Bell, Exponential polynomials, Annals Math. 35 (1934), 258–277.

[2] H. O. Foulkes, Differential operators associated with S-functions, J. London Math. Soc. 24 (1949), 136–143.

[3] L. Geissinger, Hopf algebras of symmetric functions and class functions, LNM 579, Springer, 1976, pp. 168–181.

[4] J. Hammond, On the calculation of symmetric functions, Proc. London Math. Soc. 13 (1882), 79–84.

[5] J. Hammond, On the use of certain differential operators in the theory of equations, Proc. London Math. Soc. 14 (1883), 119–129.

[6] I. G. Macdonald, "Symmetric Functions and Hall

Polynomials," Clarendon, Oxford, 1979.
[7] P. A. MacMahon, "Combinatory Analysis I (reprint with II in one volume)," Chelsea, New York, 1960 (original 1917).
[8] P. A. MacMahon, "Collected Papers I," MIT Press, 1978.
[9] J. Riordan, "An Introduction to Combinatorial Analysis (reprint)," Princeton Univ. Press, 1980 (original 1958).
[10] J. Riordan, "Combinatorial Identities (reprint)," Krieger, New York, 1979 (original 1968).
[11] J. Riordan, Symmetric function expansions of power sum products into monomials and their inverses, Duke Math. J. 38 (1971), 285-294.
[12] J. J. Sylvester, On a generalization of Taylor's theorem, The Collected Mathematical Papers, vol III (reprint), Chelsea, New York, 1973, pp. 88-92 (Philosophical Mag. 4 (1877), 136-140).
[13] Kazuo Ueno, The Hammond operator algebra and the Bell polynomials, preprint.
[14] J. G. van der Corput, Sur les fonctions symétriques, Indag. Math. 12 (1950), 216-230.

Griess の関数と直交群の非分裂拡大

岐阜大教養　北詰正顕 (Masaaki Kitazume)

1. Introduction.

本稿の目的は，以下で g と表す「Griess 関数」という単純な仕掛けから，複雑な数学的対象が定義され，その全自己同型群として興味深い群が現れる 2，3 の例を紹介することにある。中心テーマは，いわゆる Conway-Norton 代数の全自己同型群の非分裂性が g の性質から直接示されるということである。

なお，シンポジウムの後で Moufang loop などに関する論文集 [2] を見たところ，この g が Griess の論文を引用することなく書かれていた。g および，これから得られる Moufang loop は以前から知られていたもので Griess の名を冠するのは不適当なのかもしれないが，本稿ではこのままにしておく。

2. The Griess function g [2,4]

まず，表題の Griess 関数を定義する。

3 元体 $\mathbb{F}_3$ 上の 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{F}_3{}^3$ を考え，ベクトル $x = (x_1, x_2, x_3)$，$y = (y_1, y_2, y_3)$ に対し $g(x,y)$ を，

$$g(x,y) = (x_1 - y_1)(x_2y_3 - x_3y_2) \ (\in \mathbb{F}_3).$$

と定義する。

基本的な関係式として，以下が成り立つ。

(1) $g(x,o) = g(x,x) = g(x,-x) = 0$

(2) $g(x,y) = g(y,x) = g(x,-x-y) = -g(-x,-y)$

(3) $g(x,y) + g(x+y,z) - g(y,z) - g(x,y+z) = \det \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(4) $$\begin{aligned} &g(x,y) + g(x,z) + g(x+y,x+z) \\ &\qquad = g(y,z) + g(x,y+z) + g(x,x+y+z). \end{aligned}$$

3. A Moufang loop and a special Fischer group

まず，g に関する基本的な事項から述べることにする。

まず Moufang loop と呼ばれる群に近い代数系を定義する。これについては，文献［2］に，さらに一般的な形で述べられている。

まず，集合 $\mathcal{M}$ を，$\mathcal{M} = \mathbb{F}_3 \times {\mathbb{F}_3}^3$ と定義し，$\mathcal{M}$ 上の演算を，

$$(\alpha, x)(\beta, y) = (\alpha + \beta + g(x, y), x + y)$$

と定義する。この演算は可換で，$(0,0)$ は単位元になり，各 (α, x) は逆元 $(-\alpha, -x)$ を持つが，結合法則は一般に成立しない（すなわち $\mathcal{M}$ は loop）。しかし，2 節の (4) 式は $(ab)(ca) = (a(bc))a$ という関係式を意味していて，$\mathcal{M}$ は Moufang loop と呼ばれる代数構造であるとわかる。

次に $\mathcal{M}$ から 3-transposition group を定義することができる。一般に 3-transposition group とは位数 2 の元で生成され，その異なる 2 つの元の積の位数が 2 または 3 であるような群のことをいうが，ここで現れるのは，積の位数が 2（すなわち，2 元が可換）である場合が起こらないものである。これを一般に special Fischer group と呼ぶ。

さて，各 $(\alpha, x) \in \mathcal{M}$ に対し $\mathcal{M}$ 上の置換 $t_{(\alpha,x)}$ を

$$\begin{aligned} t_{(\alpha,x)}(\beta, y) &= (\alpha, x)^{-1}(\beta, y)^{-1} \\ &= (-\alpha - \beta - g(x, y), -x - y) \end{aligned}$$

と定義する。このとき

$${t_{(\beta,y)}}^{t_{(\alpha,x)}} = t_{\{t_{(\alpha,x)}(\beta,y)\}},$$

であり $\langle t_{\mathcal{M}} \rangle$ は special Fischer group となる。その生成元 $t_{\mathcal{M}}$ は 81 個からなる。

そして，本稿における最も重要な次の関係式が成り立つ。これについては，今のところ文献上には現れていない。

$$(5)\quad \{t_{(\alpha,x)}t_{(\beta,y)}t_{(\gamma,z)}\}^2(\delta,u)=(\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 1 \\ z & 1 \\ u & 1 \end{vmatrix}+\delta,\ u).$$

重要なことは，x, y, z, u を同一平面上にないように選べば，右辺の行列式は 0 でなく，(δ, u) は固定されないということである。

(Remark.)

講演時には省略したが，本節の話においては Hall triple system という組み合せ論的対象も定義できるので，ここで簡単に述べておく。

$(S, \mathcal{D})$ を 2-design で，すべての block が 3 元集合であるようなものとする。このとき，$x, y \in S$ を含む block のもう一つの元を $x \circ y$ と表す（これを積として quasigroup ができる）。$x = y$ なら $x \circ x = x$ と約束する。任意の $x, y, z \in S$ に対し

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ (x \circ z)$$

が成り立つとき $(S, \mathcal{D})$ を Hall triple system という。

Special Fischer group が与えられていれば S を生成する位数 2 の元の集合とし block は $\{x, y, x^y\}$ とすれば良い。

逆に Hall triple system から special Fischer group や Moufang loop を構成することもできる。

4. The Jordan algebra $\mathcal{J}$.

さて，この g を用いて Griess は，$F_4(\mathbb{C})$ を全自己同型群にもつ，27 次元の Jordan 代数 $\mathcal{J}$ の構造定数を決定している。

すなわち，$\mathcal{J}$ を $\mathbb{C}$ 上の 27 次元ベクトル空間とし，その基底は $\mathbb{F}_3{}^3$ の 27 個のベクトルを index として $\{e_x | x \in \mathbb{F}_3{}^3\}$ と表されているものとする。このとき，基底の間の積を

$$e_x e_y = (-2)^{-c(x,y)} \omega^{g(x,y)} e_{x+y}$$

と定義する。ただし，

$$c(x,y) = \begin{cases} 0 & (x, y \text{が線型独立}) \\ 1 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である。あとは原論文に譲るが，$\mathcal{J}$ はある複雑な関係式をみたし Jordan 代数であることが示される。

5. The Dickson's trilinear form f over $\mathbb{F}_4$

次に，古くから知られるものを，g で記述するもう一つの例として $\mathbb{F}_4$ 上の trilinear form について述べる。

まず，一般の体で定義しておく［3］。最近の文献として，Aschbacher による仕事［1］を掲げておく。

F を任意の体とし，F 上の 27 次元ベクトル空間 $\mathcal{K}$ の基底が次のように与えられているとする。

$$x_i, y_j, z_{ij} \quad (1 \le i < j \le 6,\ i \le j)$$

ただし $z_{ji} = -z_{ij}$ とする。$\mathcal{K}$ 上の対称な trilinear form を次のように定める。

$$\begin{aligned} f(x_s, y_t, z_{st}) &= 1, \\ f(z_{ij}, z_{kl}, z_{mn}) &= 1. \end{aligned}$$

ただし $s \neq t$ とし，さらに順列 (i, j, k, l, m, n) は $(1,2,3,4,5,6)$ の A_6（交代群）による orbit に入るものとする。したがって，例えば，$f(z_{ji}, z_{kl}, z_{mn}) = -1$ である。上記以外の場合の f の値は 0 と定める。

全自己同型群は E_6型の universal Schevalley 群になる。

さて $F = \mathbb{F}_4$ の場合は，標数が 2 なので $z_{ij} = z_{ji}$ であるのと，f の定義で A_6 の orbit も考える必要がないので，扱い易い。このときは，Griess 関数を用いて次のような記述ができる。

$\tilde{\mathcal{K}}$ を $\mathbb{F}_4$ 上の 27 次元のベクトル空間とし，その基底は Jordan 代数のときと同様に $\{d_x | x \in \mathbb{F}_3{}^3\}$ と表されているとする。このとき $\mathcal{K}$ 上の対称な trilinear form f を

$$f(d_x, d_y, d_z) = \begin{cases} \omega^{g(x,y)} & (\text{if } x + y + z = 0) \\ 0 & (\text{if } x + y + z \neq 0) \end{cases}$$

と定義する。対称性のためには，$z=-x-y$ のときに，$f(d_x,d_y,d_z) = f(d_y,d_x,d_z) = f(d_x,d_z,d_y)$ 等が成り立たなくてはいけないが，これは 1 節の (2) 式から直ちに得られる。

この $\mathcal{K}$ と，初めの $\tilde{\mathcal{K}}$ は次のような基底の変換で同一視できる。以下で，$\bar{1}$ は -1 を表すものとし，ω で $\mathbb{F}_4$ の乗法群の生成元を表す。

$$
\begin{aligned}
d_{(000)} &= x_1 + y_2 + z_{12} & d_{(001)} &= x_4 + y_5 + z_{45} \\
d_{(010)} &= x_2 + y_3 + z_{23} & d_{(011)} &= x_5 + y_6 + z_{56} \\
d_{(0\bar{1}0)} &= x_3 + y_1 + z_{13} & d_{(0\bar{1}1)} &= x_6 + y_4 + z_{46} \\
d_{(100)} &= \omega x_1 + \omega^2 y_2 + z_{12} & d_{(101)} &= \omega^2 x_4 + \omega y_5 + z_{45} \\
d_{(110)} &= x_2 + \omega y_3 + \omega^2 z_{23} & d_{(111)} &= \omega^2 x_5 + \omega y_6 + z_{56} \\
d_{(1\bar{1}0)} &= \omega^2 x_3 + y_1 + \omega z_{13} & d_{(1\bar{1}1)} &= \omega^2 x_6 + \omega y_4 + z_{46} \\
d_{(\bar{1}00)} &= \omega^2 x_1 + \omega y_2 + z_{12} & d_{(\bar{1}01)} &= \omega x_4 + \omega^2 y_5 + z_{45} \\
d_{(\bar{1}10)} &= x_2 + \omega^2 y_3 + \omega z_{23} & d_{(\bar{1}11)} &= \omega x_5 + \omega^2 y_6 + z_{56} \\
d_{(\bar{1}\bar{1}0)} &= \omega x_3 + y_1 + \omega^2 z_{13} & d_{(\bar{1}\bar{1}1)} &= \omega x_6 + \omega^2 y_4 + z_{46}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{(00\bar{1})} &= z_{15} + z_{24} + z_{36} \\
d_{(01\bar{1})} &= z_{14} + z_{26} + z_{35} \\
d_{(0\bar{1}\bar{1})} &= z_{16} + z_{25} + z_{34} \\
d_{(10\bar{1})} &= \omega z_{15} + \omega^2 z_{24} + z_{36} \\
d_{(11\bar{1})} &= \omega z_{14} + \omega^2 z_{26} + z_{35} \\
d_{(1\bar{1}\bar{1})} &= \omega z_{16} + \omega^2 z_{25} + z_{34} \\
d_{(\bar{1}0\bar{1})} &= \omega^2 z_{15} + \omega z_{24} + z_{36} \\
d_{(\bar{1}1\bar{1})} &= \omega^2 z_{14} + \omega z_{26} + z_{35} \\
d_{(\bar{1}\bar{1}\bar{1})} &= \omega^2 z_{16} + \omega z_{25} + z_{34}
\end{aligned}
$$

6. Conway-Norton 代数 $(\mathcal{B},\tau)$

次に，メインテーマである Conway-Norton 代数と呼ばれる非結合的可換代数を g を用いて定義する。

$\mathcal{B}$ を $\mathbb{C}$ 上の 27×2 次元のベクトル空間とする。その基底は，各 $x\in{\mathbb{F}_3}^3$ に対し 2 個づつ $v_x, \bar{v}_x$ と表されるものからなるとする：

$$\mathcal{B} = \langle v_x, \bar{v}_x | x \in {\mathbb{F}_3}^3 \rangle$$

我々が（非結合的）可換代数の積と呼ぶのは，対象な bilinear map $\tau : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ で

$$\begin{cases} \tau(v_x, v_y) &= \omega^{g(x,y)} \bar{v}_{(-x-y)} \\ \tau(\bar{v}_x, \bar{v}_y) &= \omega^{2g(x,y)} v_{(-x-y)} \\ \tau(v_x, \bar{v}_y) &= 0 \end{cases}$$

と定義する。これは，筆者［5］により（再）構成されたものを，さらに書き直したものになる。［5］での構成法，および，今回のものとの同一視の方法については省略する。同一視は前節のやり方と全く同様である。

全自己同型群 $G = \mathrm{Aut}(\mathcal{B}, \tau)$ は $3.O(7,3)$ という形である。この記法で，G が位数 3 の正規部分群（以下 $Z = \langle \zeta \rangle$ と表す）を持ち，Z による商群 G/Z が（すぐ後に定義を述べる）直交群 $O(7,3)$ と同型であることを表す。また，記法からでは読み取れないこととして，次が成り立つ。

$$|G : G'| = 2, Z(G) = 1, Z(G') = Z$$

とくに，$G \setminus G'$ の位数 2 の元 a は ζ を invert（$\zeta^a = \zeta^{-1}$）する。また ζ は B 上に ω倍（$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$）で作用する。

さて $O(7,3)$ は次のように定義される群である。

$V = \langle v_1, u_1 \rangle \perp \langle v_2, u_2 \rangle \perp \langle v_3, u_3 \rangle \perp \langle w \rangle$ は $\mathbb{F}_3$ 上 7 次元の直交空間で，内積について $(v_i, v_i) = (u_i, u_i) = 0$，$(v_i, u_i) = 1$，$(w, w) = 1$ が成り立っているものとする。長さ 1 のベクトル $x \in V$ に対し reflection r_x が

$$r_x(y) = y + (x, y)x$$

で定義される。このとき

$$O(7,3) = \langle (-1) r_x | (x, x) = 1 \rangle$$

と定義する。生成元を-1 倍したのは，群を $\mathrm{SL}(V)$ に入れ，その中心が単位群になるようにしたのである。このとき，$O(7,3)$ の交換子群は単純群で，指数 2 である。

7. A proof of the non-splitness of $\mathrm{Aut}(\mathcal{B}, f)$.

本節で，Conway-Norton 代数の全自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{B},\tau) \cong 3.O(7,3)$ が $O(6,3)$ の非分裂拡大であることの証明のアウトラインを示す。

まず，各 $x \in \mathbb{F}_3{}^3$ に対し，$\mathrm{Aut}(\mathcal{B}, f)$ の元 a_x を

$$a_x(v_y) = \tau(v_x, v_y), \quad a_x(\bar{v}_y) = \tau(\bar{v}_x, \bar{v}_y).$$

と定義することができる。これは $G \setminus G'$ の位数 2 の元で，$\zeta^{a_x} = \zeta^{-1}$ ゆえ $a_x{}^{\zeta} = \zeta a_x$ となる。従って，

$$(\zeta^{\alpha} a_x)^{(\zeta^{\beta} a_y)} = \zeta^{-\alpha-\beta-g(x,y)} a_{(-x-y)}.$$

が成り立ち，(5) 式から

$$(\zeta^{\delta} a_u)^{\{(\zeta^{\gamma} a_z)(\zeta^{\beta} a_y)(\zeta^{\alpha} a_x)\}^2} = \zeta^{m+\delta} a_u$$

を得る。ただし $m = \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 1 \\ z & 1 \\ u & 1 \end{vmatrix}$ である。

さて G が分裂するなら，その補群は各剰余類 Za_x の元を丁度 1 つずつ含んでいることになるが x, y, z, u のとり方で $m \neq 0$ となるということは，そのような補群が存在しないことを意味している。従って G は分裂しない。

(Remark.)
上記の $\{\zeta^{\alpha} a_x | x \in \mathbb{F}_3{}^3\}$ は $O(7,3)$ においては，ある極大全等方部分空間 W をとるときの $\{r_{p+w} | w \in W\}$ に対応している。ただし p は $(p,p) = 1$ をみたす $W^{\perp}$ のベクトルである。

$O(7,3)$ と g との関わりは，W が 3 次元であるというところにあるのである.

8. おわりに

Fischer の最大の 3-transposition group F_{24} に含まれる $3^7.O(7,3)$ という非分裂拡大を構成したいというのがそもそもの目標だった。

この群が構成できると F_{24} に対する 783×2 次元の Conway-Norton 代数が（再）構成できるからである。そうなれば，もともとの g は $\mathbb{F}_3{}^3$ の話だから「F_{24} も元をただせば $L_3(3)$」ということになって F_{24} のような大きな群も身近になるというものである。今のところ，この群の極大部分群を構成することはできたものの，全体については，すっきりしない状況が続いている。

さらに Monster に含まれる $3^8.\Omega^-(8,3)$ も非分裂拡大で同様な構成法を考えたいと思っている。この場合は F_24 のような直接の御利益はないが，かつて数理解析研究所の集会［6］で紹介した 26-node theorem をみても Monster の中で $L_3(3)$ は重要な働きをしているのである。この辺に何か埋まっているだろうというのは過大な期待でもあるまい。

1. M. Ascbacher, The 27-dimensional module for E_6, I, Invent. Math. 89(1987), 159-195

2. L. Bénéteau, Commutative Moufang loops and related groupoids, in "Quasigroups and Loops: Theory and Applications" (O. Chein, H. O. Pflugfelder and J. D. H. Smith, eds)(1991),115-142

3. L. Dickson, A class of groups in arbitrary realm connected with the configuration of the 27 lines on a cubic surface, Quaterly J. Math. 33(1901),145-173

4. R. L. Griess, A Moufang loop, the Exceptional Jordan Algebra and a Cubic form in 27 Variables, J. Algebra 131-1(1990),281-293

5. M. Kitazume, The Conway-Norton algebras for $\Omega^-(6,3)$, $\Omega(7,3)$, F'_{24}, and their full automorphism groups, Invent. Math. 88(1987), 277-318.

6. M. Kitazume, Monster と Coxeter 群 Y_{555}, 京都大学数理解析研究所講究録 735「組合せ論とその周辺の研究」(1990), 1-18

MULTIPLICITY–FREE SUBGROUPS OF THE ALTERNATING GROUPS

JOSE MARIA P. BALMACEDA

Abstract: In this note we investigate the multiplicity-free permutation characters of the alternating groups associated with the action on cosets of subgroups. We show how to find the subgroups H of $A_n, n > 18$, for which the permutation characters $(1_H)^{A_n}$ are multiplicity-free.

§ 0. Introduction

Let π be the permutation character associated with an action of a group G. If the action is transitive, then $\pi = (1_H)^G$, where H is the stabilizer in G of a point.

Definition. *π is* multiplicity-free *if all of its irreducible constituents are distinct.*

Multiplicity-free permutation characters are of interest in a variety of situations. Foremost, they arise in the study of commutative centralizer algebras of transitive permutation representations (cf. [Wi]). These algebras can be studied in the setting of Hecke algebras, $\mathfrak{H}(G,H)$, of complex-valued functions on G which are constant on (H,H)-double cosets under the convolution product. Then, $\mathfrak{H}(G,H)$ is commutative if and only if $(1_H)^G$ is multiplicity-free.

N.Iwahori studied the algebra $\mathfrak{H}(G,B)$ of a Chevalley group G over a finite field with respect to a Borel subgroup B (see [Iw]). The algebras $\mathfrak{H}(G,P)$, where G is a finite group with a BN-pair and P is an arbitrary parabolic subgroup were studied by C.Curtis, Iwahori, and R.Kilmoyer [CIK]. The conditions when the character $(1_P)^G$ is multiplicity-free have been more or less completely determined.

Recently, N.Inglis, M.Liebeck, and J.Saxl [ILS] determined all the primitive multiplicity-free permutation representations of any group G with socle $G_o = PSL(n,q)$, for $n \geq 8$.

It is also well known that if G is a group acting distance transitively on a graph, and if H is the stabilizer of a vertex, then $(1_H)^G$ is multiplicity-free.

Definition. *If $(1_H)^G$ is multiplicity-free, we call H a* multiplicity-free subgroup *of G.*

Typeset by $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

§ 1. Main Result

We obtain the following theorem, which is included in the author's thesis [Ba]. This extends the result of J.Saxl [Sa], who classified the multiplicity-free subgroups of the symmetric groups.

Theorem. *Let H be a multiplicity-free subgroup of $A_n, n > 18$, and Ω a set of n points on which H acts. Then one of the following holds:*

(i) $A_k \times A_k \subseteq H \subseteq (S_k \times S_{n-k}) \cap A_n$ for some integer k with $0 \leq k < n/2$,

(ii) $n = 2k$ and $A_k \times A_k \subset H \subseteq (S_k \wr S_2) \cap A_{2k}$,

(iii) $n = 2k$ and $H \subseteq (S_2 \wr S_k) \cap A_{2k}$ of index at most two,

(iv) $n = 2k+1$, H fixes a point of Ω, and is one of the two groups in (ii) or (iii) on the rest of Ω,

(v) $F_{10} \times A_{n-5} \subseteq H \subseteq (F_{20} \times S_{n-5}) \cap A_n$, where F_{10} and F_{20} are Frobenius groups of orders 10 and 20 respectively,

(vi) $PSL(2,5) \times A_{n-6} \subseteq H \subseteq (PGL(2,5) \times S_{n-6}) \cap A_n$,

(vii) $P\Gamma L(2,8) \times A_{n-9} \subseteq H \subseteq (P\Gamma L(2,8) \times S_{n-9}) \cap A_n$.

Remarks. The restriction $n > 18$ is not strictly necessary, but was imposed to allow as much generality. For $n \leq 18$, *ad hoc* arguments can be used. All the subgroups H in (i) and (ii) are multiplicity-free. For instance, let k and n be integers with $0 < k \leq n/2$, and $n > 4$. Then the following is multiplicity-free:

$$(1_{A_k \times A_{n-k}})^{A_n} = [n-k+1, 1^{k-1}]_{A_n} + [n-k, 1^k]_{A_n} + \sum_{i=0}^{k} [n-i, i]_{A_n},$$

where $[\lambda]_{A_n}$ denotes the irreducible character of A_n obtained by the restriction of the irreducible character $[\lambda]$ of S_n corresponding to the partition λ of n. (See [JK] for the representation theory of the symmetric groups.) This shows that all the subgroups H in (i) are multiplicity-free.

On the other hand, not all groups in the other cases are. For example, if $k \equiv 0 (mod 4)$, then $(1_{(S_2 \wr S_k) \cap A_{2k}})^{A_{2k}}$ is not multiplicity-free. To see this, we use the fact that

$$(1_{S_2 \wr S_k})^{S_{2k}} = \sum_{\lambda} [2\lambda],$$

where $[2\lambda]$ denotes an even partition of $2k$ and the sum runs over all partitions λ of the integer k ([JK, Th.5.4.23]). Applying Mackey's Theorem (see [Do, §21]), we obtain

$$(1_{(S_2 \wr S_k) \cap A_{2k}})^{A_{2k}} = \sum_{\lambda} [2\lambda]_{A_k}.$$

Thus if $k = 4t$ for some positive integer t, then the partitions $(2t, 2t, 2t, 2t)$ and (4^{2t}) are both even partitions of $2k$ and hence are included in the sum $\sum[2\lambda]$. Since these two partitions are associates of each other, they restrict to the same irreducible character of A_{2k}.

§ 2. Key Tools Used

The search for the multiplicity-free subgroups relies heavily on the following two properties. Here H will denote a multiplicity-free subgroup of $A_n, n > 18$. And Ω, the set of n elements on which H acts. These notations will be assumed fixed, unless otherwise indicated.

Property 1. *(i) Let $\Omega_{\{k\}}$ be the set of k-element subsets of Ω, $0 \le k \le n/2, n > 4$. Then*

$$\sharp orb(H, \Omega_{\{k\}}) \le k + 1.$$

(ii) If H is transitive on Ω, $\sharp orb(H, \Omega_{\{k\}}) \le k$.

Property 2. *Let a be an integer with $1 \le a \le n/2$. Then*

$$| H |> (n+2)^{-1} min_a 2^a a!(n-2a)!.$$

Corollary. *(i) If $n = 2k$, then $| H |> 2(k!)$.*
(ii) For any n, $| H |> \lfloor \frac{n}{2} \rfloor !$.

Property 1 is proved by computing the permutation character $\pi^{\{k\}}$ of A_n on $\Omega_{\{k\}}$ and showing that for $n > 4$,

$$\pi^{\{k\}} = \sum_{i=0}^{k} [n-i, i]_{A_n},$$

a sum of $k+1$ distinct irreducible characters. Then we use the fact that

$$\sharp \mathrm{orb}(H, \Omega_{\{k\}}) = < 1_H, (\pi^{\{k\}})_H >_H$$

to obtain (i). Now use (i) and transitivity to obtain (ii).

Property 2 says that the order of H is essentially large. The multiplicity-free condition on H imposes an immediate restriction on its order, since

$$\text{degree } (1_H)^G = [G:H] \leq \sum_{\chi_i \in Irr(G)} \chi_i(1).$$

Let $D(G) := \sum_{\chi_i \in Irr(G)} \chi_i(1)$. Then we know that

$$D(A_n) = 2^{-1}(D(S_n) + \sum_{\lambda=\lambda'} \deg[\lambda]),$$

the sum over all self-associated characters of S_n. For large n, this number becomes too unwieldy. However, $D(A_n) < D(S_n)$, and $D(S_n)$ can be computed easily. Using the Frobenius-Schur indicator function (see [Do, §33]), $D(S_n) = 1+$ the number of involutions in S_n. We then obtain essentially the same bound as that of Saxl in the symmetric group case.

The bounds given in the corollary are weaker, but are useful and easier to compute.

§ 3. Outline of the Proof

Due to the limited space, we present only a sketch of the proof and omit giving some explicit computations and decompositions. The details may be found in [Ba]. We divide the investigation into three cases.

Case I. H is primitive on Ω.

Proposition. *Let H be primitive on Ω. Then $(1_H)^{A_n}$ is not multiplicity-free.*

We use the bounds of C. Praeger and Saxl for a primitive group of degree n not containing A_n (see [PS]), as well as Property 2, to get:

$$(n+2)^{-1} min_a 2^a a!(n-2a)! <| H |< 4^n.$$

This forces $n \leq 55$.

On the other hand, Liebeck, Praeger, and Saxl in [LPS] showed that if H is a multiplicity-free subgroup of S_n or A_n which is primitive, then H is doubly transitive, provided $n \geq 6$.

It is enough to prove the proposition for the case that H is maximal in A_n, since if $(1_H)^{A_n}$ is not multiplicity-free, any subgroup of H is not multiplicity-free either. Hence we need to check which doubly transitive subgroups H of A_n, of degree less than 55, are multiplicity-free. For each doubly transitive subgroup H of A_n, $n \leq 55$, the inequality

$$[A_n : H] \leq \sum_{\chi_i \in Irr(A_n)} \chi_i(1)$$

is satisfied only if $n < 12$ (cf. [LPS]). Hence, for $n > 18$, no primitive subgroup is multiplicity-free.

Case II. H is transitive but not primitive on Ω.

Lemma. *Let $|\Omega| = n$. Then $n = 2k$, and one of the following holds:*

(1) H has 2 blocks of size k, or

(2) H has k blocks of size 2.

To prove this, we need to examine the orbits of H on $\Omega_{\{m\}}$, for different values of m, and exploit Property 1.

Case II.1. H has 2 blocks of size k.

For this case, we show that:

$$A_k \times A_k \subset H \subseteq (S_k \wr S_2) \cap A_{2k}.$$

The inclusion $H \subseteq (S_k \wr S_2) \cap A_{2k}$ is immediate. Let H_o be the setwise stabilizer of Δ (and Γ as well). So $[H : H_o] = 2$. Let H_Δ, H_Γ be the pointwise stabilizers of Δ and Γ respectively. The key step is to show that each of H_o/H_Δ and H_o/H_Γ contains S_k or A_k. These imply further that $H \supseteq A_k \times A_k$. This is done by examining different values of k. The cases $k = 10$ and $k \geq 13$ can be handled in a straightforward manner. For $k = 11$ and 12, we need to eliminate the possibility of the Mathieu groups M_{11} and M_{12} for H_o/H_Δ and H_o/H_Γ. Finally, to obtain the strict inclusion, we show that:

$$(1_{A_k \times A_k})^{A_{2k}} = 2[k, 1^k]_{A_{2k}} + \sum_{i=0}^{k} [2k - i, i]_{A_{2k}}.$$

Case II.2. H has k blocks of size 2.

This time we obtain that H is a subgroup of $(S_2 \wr S_k) \cap A_{2k}$ of index at most two.

The inclusion is trivial. Now suppose that $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ are the blocks of H with $|\Delta_i| = 2$ for each i. Let $K = \{k \in H \mid (\Delta_i)^k = \Delta_i$, for each $i\}$. The key steps are to show that for each $k \geq 10$, H/K is either S_k or A_k (again we need to eliminate the possibility that H/K is M_{11} or M_{12}) and then to show that K can be viewed as a non-trivial submodule of the natural permutation module of A_k over $GF(2)$, so that $|K| \geq 2^{k-1}$.

Case III. H is intransitive on Ω.

This last case is the longest and yields the remaining cases (i), (iv) - (vii), of the main theorem.

From Property 1, $\sharp\mathrm{orb}(H,\Omega_{\{1\}}) = \sharp\mathrm{orb}(H,\Omega) \leq 2$. Hence, if H is intransitive on Ω, this number is exactly two. Let Γ and Δ be the two orbits. Let Γ be the smaller orbit with $|\Gamma| = k$, where $k \leq n/2$. Let H_Γ be the pointwise stabilizer of H on Γ, and $H^\Gamma = H/H_\Gamma$, $H^\Delta = H/H_\Delta$.

We first show that H^Γ and H^Δ are t-homogeneous (transitive on t-element subsets) for each $t \leq k$. Then, since H^Γ is of degree k, H^Γ is one of S_k, A_k, $PGL(2,5)$, $P\Gamma L(2,8)$, or PGL(2,8) by Beaumont and Peterson [BP].

Next we show that $(1_{H^\Delta})^{S_{n-k}}$ is multiplicity-free and proceed to investigate the possibilities for H^Δ using Saxl's classification. We find that either $A_{n-k} \subseteq H^\Delta \subseteq S_{n-k}$ or H^Δ is contained in a wreath product $S_t \wr S_2$ or $S_2 \wr S_t$, where $|\Delta| = n-k$, with $n-k = 2t$, for some t. In the former case we get that $H_\Gamma \supseteq A_{n-k}$. Next we determine H_Δ by using the fact that $[H^\Gamma : H_\Delta] \leq 2$. Then,

$$H_\Delta \times H_\Gamma \subseteq H \subseteq (H^\Gamma \times H^\Delta) \cap A_n.$$

This yields cases (i), (v), (vi) , and (vii) of the main theorem. In the latter case, we obtain case (iv).

This completes the proof of the main result.

References

[Ba] J.M.P.Balmaceda, *Multiplicity-free permutation representations of the alternating groups*, Ph.D. Thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign, 1991.

[BP] R.A.Beaumont and R.P.Peterson, *Set transitive permutation groups*, Canad. J. Math. 7(1955), 35-42.

[CIK] C.W.Curtis, N.Iwahori, and R.Kilmoyer, *Hecke algebras and characters of parabolic type of finite groups with (B,N)-pairs*, I.H.E.S. Publ. Math. 40(1971), 81-116.

[Do] L.Dornhoff, *Group Representation Theory Part A*, New York: Marcel Dekker, Inc., 1971.

[ILS] N.F.J.Inglis, M.W.Liebeck, and J.Saxl, *Multiplicity-free permutation representations of finite linear groups*, Math. Z. 192(1986), 329-337.

[Iw] N.Iwahori, *On the structure of a Hecke ring of a Chevalley group over a finite field*, J. Fac. Sci., Univ. of Tokyo 10(1964), 215-236.

[JK] G.James and A.Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Group*, Encyclopedia of Math. and its Applications Vol. 16, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1981.

[LPS] M.Liebeck, C.Praeger, and J.Saxl, *Distance-transitive graphs with symmetric or alternating groups*, Bull. Austral, Math. Soc. 35(1987), 1-25.

[PS] C.Praeger and J.Saxl, *On the orders of primitive permutation groups*, Bull. London Math. Soc. 12(1980), 303-307.

[Sa] J.Saxl, *On multiplicity-free permutation representations*, in *Finite Geometries and Designs*, London Math. Soc. Lecture Notes 49, Cambridge, Cambridge Univ. Press (1981), 337-353.

[Wi] H.Wielandt, *Finite Permutation Groups*, New York and London: Academic Press, 1964.

30 June 1992

Kyushu University 33
Department of Mathematics
Faculty of Science
Fukuoka 812
JAPAN

Permanent Address:

Department of Mathematics
College of Science
University of the Philippines
Diliman, Quezon City
PHILIPPINES

有限群の共役類の元の数と
既約指標の次数とのある条件について

千葉大理学部　　花木章秀

最近、九州大の坂内英一氏によって、物理学における Fusion algebra を代数的に定義するという試みがなされている。ここでは、そのなかに現われるある群論的な条件についての考察を述べる。坂内氏の研究については [1] を参照されたい。

次の条件が、ここでの主題であり、[1, §5] にあらわれている。

G：有限群

$\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_k\}$：$G$の既約指標全体

$\mathrm{Cl}(G) = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$：$G$の共役類全体

とするとき、

(☆)　ある $\{1, 2, \cdots, k\}$ 上の置換 σ が存在して

$$\chi_i(1)^2 = |C_{\sigma(i)}| \qquad \text{for } \forall i = 1, 2, \cdots, k.$$

条件 (☆)を満たす群を、単に(☆) 群ということにする。すぐにわかる例として、G を abel 群 とすると、

$$\chi_i(1) = |C_j| = 1 \quad \forall i, j$$

となるので、これは(☆) 群である。 abel 群以外の (☆) 群はそれほど容易には見つからない。

千葉大の奥山浩伸氏は、修士論文 [5] でこの (☆)群をとりあげている。彼は、

位数 100 以下の群

位数 $2^7 = 128$ の群

位数 p^6 までの p 群

に対して、それが (☆) 群であるかどうかの判定を与えている。(上記の群はすべて、完全に分類されている。) この範囲にどれだけの (☆) 群が存在するかはあとで述べることにして、位数最小の non-abelian (☆) 群の構造を次に記す。

例1. 位数最小の non-abelian (☆) 群は、位数 64 にあらわれ、10 個の非同型なものが存在する。(これは坂内氏によって存在が確認されていた。) その構造は、

generator	$g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$
relations	$[g_1, g_2] = g_4$
	$[g_2, g_3] = g_5$

$$[g_3, g_1] = g_6$$
$$g_4{}^2 = g_5{}^2 = g_6{}^2 = 1$$
$$g_1{}^2,\ g_2{}^2,\ g_3{}^2 \in \langle g_4, g_5, g_6 \rangle$$
となっていて、$g_1{}^2$, $g_2{}^2$, $g_3{}^2$ のとり方で、10個の非同型なものが生じる。

この例から、構造がある程度似ている群では(※)という条件が保存されることが想像される。一般に、P. Hall [2] に次のような概念がある。

有限群 G_1, G_2 に対して

G_1 と G_2 が <u>isoclinic</u> （$G_1 \sim G_2$ とかく）

$$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad {}^{\exists}f : G_1/Z(G_1) \xrightarrow{\sim} G_2/Z(G_2)$$
$${}^{\exists}g : D(G_1) \xrightarrow{\sim} D(G_2)$$

s.t. $f(\overline{x_1}) = \overline{x_2}$, $f(\overline{y_1}) = \overline{y_2}$ なる $x_i, y_i \in G_i$ に対して

$$g[x_1, y_1] = [x_2, y_2]$$

（ただし $Z(G_i)$ は G_i の中心、$D(G_i)$ は G_i の交換子群、$\overline{x_i}$, $\overline{y_i}$ は $G_i \longrightarrow G_i/Z(G_i)$ による、x_i, y_i の image、$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ である。）

例えば、任意の２つの abel 群は isoclinic である。すぐにわかるように、これは同値関係であり、その同値類を isoclinism family という。

話を簡単にするために、すこしの間 p群だけを考える。（一般の群でも同様の議論は成り立つ。） １つの isoclinism family Φ の中で位数最小のものを Φ の stem 群という。（一意的には定まらない。例えば、例１の 10 個の非同型な群は、すべて同じ family の stem 群である。） Φ の stem 群の位数を $p^{m(0)}$ としたとき $m(0)$ を Φ の rank といい、$|G| = p^{m(0)+k}$ なる $G \in \Phi$ を Φ の k-th branch という。

$$g_i(G) = \#\{ C \in Cl(G) \mid |C| = p^i \}$$

$$r_i(G) = \#\{ \chi \in Irr(G) \mid \chi(1) = p^i \}$$

とおくと、$p^{-k} g_i(G)$, $p^{-k} r_i(G)$ は family invariant（すなわち、Φ に属するすべての群に対して一定）である。このことから、ただちに次の命題を得る。

命題 A. $G_1 \sim G_2$ のとき、G_1 が (☒) 群ならば、G_2 も (☒) 群である。（G_1, G_2 は p 群でなくてもよい。）

例２. 奥山浩伸氏の調べた範囲の (☒) 群から成る isoclinism

family は次のとおりである。

abel群からなる family

$p=2$, rank 6

$p\neq 2$, rank 5

$p\neq 2$, rank 6.

彼の調べた範囲では、これだけの family しかない。$p\neq 2$ のとき、rank が6以下の familyは43個ある（[4]）。そのうちの3つだけが(※)群から成る family であることから、(※)群の特殊性がわかる。6より大きな rank までの、すべての family に対する (※)群から成る family の割合は、さらに減少するのではないかと思われる。

また、奥山氏の調べた範囲では、すべての(※)群が巾零群であることにも注意しておく。

次に、(※)群から成る無限系列を得ることができたので、それを紹介する。例1でみた位数64の群のうちの一つは、鈴木2群とよばれる群の位数最小のものである。そこで一般の鈴木2群はどうだろうかという疑問が生じる。鈴木2群に関する結果[3, VIII §6, §7]から、そのすべてが(※)群になるわけではないが、$|G|=|Z(G)|^2$ となる場合には、G は(※)群になり得る。実際、これが(※)群になるのだが、より

一般に、2群に限らずすべての素数pに対して、(☆)群となるp群を得ることができた。

$$F = GF(p^n) \quad , \quad \theta \in Aut(F)$$

$$u(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & a\theta & 1 \end{pmatrix} \in GL(n, F)$$

$$A(p, n, \theta) = \{ u(a, b) \mid a, b \in F \}$$

とおくと、$A(p, n, \theta)$は通常の積に関して群をなし、次が成り立つ。

<u>命題 B.</u> θの位数が奇数であるとき、$A(p, n, \theta)$は(☆)群である。さらに、$\theta \neq id_F$とすると、$A(p, n, \theta)$は直既約であり、それを含む isoclinism family の中で stem 群になる。

特に、鈴木2群で$|G| = |Z(G)|^2$となるものは(☆)群である。

鈴木2群で$|G| = |Z(G)|^2$となれば、ある$A(2, n, \theta)$，θの位数は奇数，と同型になるので、最後の主張は明らかである。命題の証明は、既約指標の次数と共役類の元数を実際に計算することによって得られる。$\theta \neq id_F$のとき、$A(p, n, \theta)$

が直既約かつ、stem 群になるということは、それがより小さい位数の (☆) 群から自明な方法で得られないことを意味している。$\theta = id_F$ のときは、$A(p, n, \theta)$ は abel 群である。

最後に、(☆) 群に関する興味ある問題をあげておこう。

<u>問題</u> (i) (☆) 群は巾零群か。

(ii) $G = G_1 \times G_2$ が (☆) 群のとき、G_1, G_2 はどうか。

どちらも自然な問題と思われるが、今の所その解答は得られていない。(i) に関しては、清田正夫氏によって、「非可解単純群は (☆) 群ではない」ことが示されている。

References

[1] E. Bannai, Association schemes and fusion algebras (an introduction), preprint.

[2] P. Hall, The classification of prime-power groups, J. Reine Angew. Math., 182 (1940) 130-141.

[3] B. Huppert - N. Blackburn, Finite Groups II, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1982.

[4] R. James, The groups of order p^6 (p an odd

prime), Math. Comp., 34 (1980) 613-637.

[5] 奥山浩伸，有限群の複素既約表現の次数と共役類の元の個数，千葉大学修士論文，1992.

Sharp Characters of Finite Groups

滑田正夫
東京医科歯科大学教養部

G を有限群，χ を G の指標とし，$n=\chi(1)$ を χ の次数とする．次の結果は、今から９０年程前に Blichfeldt により証明された．

定理１．([B]) $L=\{\chi(g) \mid g\in G, g\neq 1\}$ とおくとき，
$|G|$ は $\prod_{l\in L}(n-l)$ を割り切る．
言いかえると，$\prod_{l\in L}(n-l)\,/\,|G|$ は有理整数である．

さて，本稿の考察対象である sharp character を次のように定義する．

定義． 定理１の仮定の下で，$|G|=\prod_{l\in L}(n-l)$ が成立するとき，(G,χ) を L-sharp（または単に sharp ）という．

(G,χ) が L-sharp ならば，χ は忠実な指標となる．次に sharp character の例をいくつかあげる．

例１． (G,Ω) を sharply t-transitive な置換群，π をその置換指標とするとき，(G,π) は $\{0,1,\cdots,t-1\}$-sharp となる． とくに、任意の有限群 G について (G,ρ_G) は $\{0\}$-sharp である，ここで ρ_G は G の正則指標を表す．

例２． G を位数 m の巡回群，λ を G の忠実な１次指標とするとき，
(1) (G,λ) は sharp であり，
(2) m が奇数ならば，$(G,\lambda+\overline{\lambda})$ も sharp である，ここで $\overline{\lambda}$ は λ の複素共役を表す．

Sharp character に関する問題はいろいろ考えられるが，本稿では次の問題をとりあつかう．

問題．　L を与えたとき，L-sharp pair (G,χ) をすべて求めよ．

χ が sharp のとき，$\chi+1_G$ も明らかに sharp なので，上の問題を考えるとき，$(\chi,1_G)=0$ としてよい．この条件を満たしている (G,χ) を normalized な pair と呼ぶ．以下，上の問題に関して得られている主な結果（や予想）を紹介する．例１に関連して次の結果（と予想）がある．

定理２．([C-K])　(G,χ) を normalized L-sharp pair, $L=\{-1,0,1,\cdots,t-2\}$ とする．$t\leqq 4$ ならば，G は sharply t-transitive な置換群となる．

予想１．　定理２は $t\geqq 5$ のときも正しい？

ある整数 m があって，$\chi+m1_G$ が置換指標となるときは，予想１が成立することが知られている．例２(1) に関しては，次の片岡氏による決定的な結果がある．

定理３．([K])　(G,χ) を normalized L-sharp pair, $L\not\subset\mathbb{R}$ とする．このとき，G は巡回群で χ は G の忠実な１次指標となる．

次に，"小さい" L を持つ sharp pair (G,χ) の分類問題を考える．Γ を $\mathbb{Q}(L)$ の $\mathbb{Q}$ 上のガロア群とするとき，L の Γ-orbits の個数を (G,χ) の rank と呼ぶ．rank は pair (G,χ) の複雑さを表す尺度のひとつと考えられる．rank が１となる sharp pair (G,χ) は次の定理により完全に分類されている．

定理４．([C-K])　(G,χ) を rank 1 の normalized L-sharp pair とする．
(1) $L\subset\mathbb{Z}$ ならば，$L=\{-1\}$, G は任意の有限群，$\chi=\rho_G-1_G$ となる．
(2) $L\cap\mathbb{Z}=\emptyset$ ならば，G は奇素数次の巡回群で，χ は忠実な１次指標か，または２つの

複素共役な忠実１次指標の和である．

定理４(2) の証明は大変複雑であったが，簡明な別証明が Alvis, 野澤両氏によって得られている． rank 2 の場合については最近次の結果が得られた．

定理５．([A], [A-K-N], [K-N]) (G,χ) を rank 2 の normalized L-sharp pair とする．

(1) $L\cap Z=\{z\}$ のとき，次のいずれかが起こる．

(i) $z=0$, G は位数 $2p$ （p は奇素数）の正２面体群で，χ は２次の既約指標である．

(ii) $z=-1$, G は位数４の巡回群で，χ は忠実な１次指標である．

(iii) $z=-1$, G は位数９の巡回群で，χ は２つの複素共役な忠実１次指標の和である．

(2) $L\cap Z=\varnothing$ ならば，G は位数 p^2 （p は奇素数）の巡回群で，χ は忠実な１次指標か，または２つの複素共役な忠実１次指標の和である．

rank 2 で $L\subset Z$ の場合は大変難しく，$L=\{0,l\}$, $\{-1,l\}$ の場合しか解かれていない．例２，定理４(2)，定理５(2) より自然に次のことが予想される．

予想２． (G,χ) を normalized L-sharp pair とする．$L\cap Z=\varnothing$ ならば，G は奇数位数の巡回群で，χ は忠実な１次指標か，または２つの複素共役な忠実１次指標の和である．

素数べきの位数を持つすべての群 G について予想２が成立すれば，すべての有限群 G について予想２が成立することがわかっている．また Alvis は p-群 G に対する予想２をある種の整数論の問題に帰着させて，$3\leqq p\leqq 67$ なる素数 p については計算機を用いて予想２を確かめている．

参考文献

[A] D. Alvis, On finite groups admitting certain sharp characters with irrational values, Comm. Algebra (to appear).

[A-K-N] D. Alvis, M. Kiyota and S. Nozawa, Sharp characters of rank two, (preprint).

[B] H. F. Blichfeldt, A theorem concerning the invariants of linear homogeneous groups with some applications to substitution-groups, Trans. Amer. Math. Soc. 5 (1904), 461-466.

[C-K] P. J. Cameron and M. Kiyota, Sharp characters of finite groups, J. Algebra 115 (1988), 125-143.

[K] T. Kataoka, On sharp characters of a finite group in the sense of Kiyota -Cameron, (preprint).

[K-N] M. Kiyota and S. Nozawa, Sharp characters whose values at non-identity elements are 0 and a family of algebraic conjugates, J. Algebra (to appear).

Distance-Regular Graphs with $\Gamma(x) \simeq 3 \cdot K_{a+1}$

北海道大学　山崎則男

1. Definitions

- Γ : connected undirected finite graph without loops or multiple edges.
- $\partial(\alpha, \beta)$: distance between α and β. $(\alpha, \beta \in \Gamma)$
  (the length of a shortest path)

※ $x \sim y \iff \partial(x, y) = 1$, $x \not\sim y \iff \partial(x, y) \geq 2$

- $d = \max\{\partial(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \Gamma\}$: diameter
- $\Gamma_i(\alpha) = \{\beta \in \Gamma \mid \partial(\alpha, \beta) = i\}$, $\Gamma_1(\alpha) = \Gamma(\alpha)$
- girth : the length of a shortest circuit

$\boxed{\text{Def.}}$ Γ : distance-regular graph (DRG)

$\iff |\Gamma_i(\alpha) \cap \Gamma_j(\beta)|$ depends only on $l = \partial(\alpha, \beta)$ $(\alpha, \beta \in \Gamma)$

- $p_{ij}^{l} = |\Gamma_i(\alpha) \cap \Gamma_j(\beta)|$ with $\partial(\alpha, \beta) = l$
- $k = p_{11}^{0}$: valency of Γ

• $c_i = p^i_{1\,i-1}$ • $a_i = p^i_{1\,i}$ • $b_i = p^i_{1\,i+1}$

$$(c_0 = a_0 = b_d = 0,\ b_0 = k,\ c_1 = 1)$$

• $\iota(\Gamma) = \begin{Bmatrix} * & 1 & \cdots\cdots & c_i & \cdots\cdots & c_d \\ 0 & a_1 & \cdots\cdots & a_i & \cdots\cdots & a_d \\ k & b_1 & \cdots\cdots & b_i & \cdots\cdots & * \end{Bmatrix}$; intersection array of Γ

DRGの研究のうえで，DRGのintersection arrayとなりうるarrayを決定する事が、最も重要な目標の1つと言えるであろう。

c_i, a_i, b_i たちの基本的性質については，[1]他に書かれているが、特に次の3つを明記しておく。

(1) $c_i + a_i + b_i = k \qquad (0 \leq i \leq d)$

(2) $1 = c_1 \leq c_2 \leq \cdots\cdots \leq c_d$

(3) $k = b_0 > b_1 \geq b_2 \geq \cdots\cdots \geq b_{d-1} > 0$

• $\ell(c, a, b) = \#\{i \mid (c_i, a_i, b_i) = (c, a, b)\}$

• $r = \ell(c_1, a_1, b_1)$

$$\iota(\Gamma) = \left\{ \begin{matrix} * & 1 & \cdots\cdots & 1 & c_{r+1} & \\ 0 & a_1 & \cdots\cdots & a_1 & a_{r+1} & \cdots\cdots \\ k & \underbrace{b_1 \quad \cdots\cdots \quad b_1}_{r} & & & b_{r+1} & \end{matrix} \right.$$

2. Distance-regular graphs with $\Gamma(x) \simeq m \cdot K_{a+1}$

我々は、もちろん、DRGの分類を大目標としているわけであるが、そのために、いろいろな方向からのapproachがありえると思います。今回の研究は、そのうちでgirthが3であるcaseでの、1つのapproachを試みています。

Girthが正のDRGにおいて、次のようなcaseが非常に重要だと思われます。

[Case (※)] For every x and y with $x \sim y$,

$$\Gamma(x) \cap \Gamma(y) \text{ is a clique.}$$

(clique : induce complete subgraph)

このcaseは、特殊なcase、というわけではないと思います。というのは、$r \geq 2$ならば必ずこれになるからです。又、$r=1$においても実例は実際あります。

Case(※)は、次のようにかくこともできます。

「For every $x \in \Gamma$,
$\Gamma(x) \simeq m \cdot K_{a+1}$」
(K_{a+1} : complete graph of size $(a+1)$)
※以後 $a = a_1$ とする。

$m=1$ ならば, Γ は complete graph で自明。

$m=2$ ならば, Mohar と Shawe-Taylor([5]) によって分類されています。ただし、これは, $m=2$ であることによる非常に特殊な性質にもとづいています。

この case(*) について, まだほとんど見えていない、というのが実際のところだと言えます。そこで, $m=3$ の case を考える事で何かつかもう、というのが今回の研究の意義だと思います。

$\boxed{\text{目標}}$ Case(*) で特に $m=3$ の case の DRG を分類しよう。

このとき, $k=3(a+1)$ となるのは明らかです。

$a=0$ のとき (girth は 3 でない)、$k=3$ で, 分類されています。
$a=1$ のとき, 実は最近, 大阪教育大学の鈴木寛先生と, 東京医科歯科大の野村先生と, 大阪大の平木氏により分類されました([3])。そこで特に $a \geq 2$ として考えています。

3. Main Result

$\boxed{\text{Theorem}}$ Let Γ be a distance-regular graph with $\Gamma(x) \simeq 3 \cdot K_{a+1}$ for every $x \in \Gamma$ and $a \geq 2$. Then $d \leq r+2$ except the following case;

$$\iota(\Gamma) = \begin{array}{c} \left\{\begin{array}{ccccccccc} * & 1 & \cdots & 1 & 1 & 4 & \cdots & 4 & c_{d-1} & c_d \\ 0 & a & \cdots & a & a+2 & 2a-1 & \cdots & 2a-1 & a_{d-1} & a_d \\ 3(a+1) & \underbrace{2(a+1)}_{} & \cdots & \underbrace{2(a+1)}_{r} & 2a & a & & a & b_{d-1} & * \end{array}\right\} \\ \begin{array}{ccccccccc} & & & & r+1 & r+2 & & d-2 & & \end{array} \end{array},$$

where $\begin{pmatrix} c_{d-1} & c_d \\ a_{d-1} & a_d \\ b_{d-1} & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2a-1 & 3a-3 \\ a & * \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 2a & 3a-6 \\ a-1 & * \end{pmatrix}$,

and Γ is a half of a distance-biregular graph.

[注意] 今回のシンポジウム中の時点では、少し未解決の部分があったのですが、その部分もどうやら解決し、上のような結果となりました。

証明過程として、次のように、6つのcaseに場合分けをして、それぞれで話を進めました。

	case	result
(a)	$c_{r+1} \geq 3$	$d = r+1$
(b)	$c_{r+1} = 2$ and $a_{r+1} = 2a$	$d \leq r+2$
(c)	$c_{r+1} = 2$ and $a_{r+1} > 2a$	〃
(d)	$c_{r+1} = 1$ and $a_{r+1} = a+1$	〃
(e)	$c_{r+1} = 1$ and $a_{r+1} \geq a+3$	〃
(f)	$c_{r+1} = 1$ and $a_{r+1} = a+2$	exception

(注意) 特に(a), (b), (c)については，$a \geq 1$のときも成立する証明です。(d), (e), (f)については，$a \geq 2$、という仮定が効いています。

証明のための手法としては，rank 1 の intersection diagram というものを主に使います。これについては，鈴木先生，野村先生，平木氏がよく使っていますし，[2]で鈴木先生による非常にわかりやすい説明があります。又，特にgirthが3の場合については，[4]を見るのもよいと思います。

(a)〜(e)について，$d \leq r+2$と，非常に簡単なarray typeであることにより，eigenvalue technique を使って，diameterの aの値によらないboundができるの

ではないか、と鈴木先生に教えてもらいました。これができれば、分類に大きく近づきます。

(f)について、まずarrayが、Theoremの主張のように決まりました。そして、次のようなbipartite graph $\tilde{\Gamma}$を考えます。

$$\tilde{\Gamma}=\Gamma\cup\Delta \qquad \Delta=\{\text{maxmal cliques}\}$$

$$\alpha\sim x \Longleftrightarrow \alpha\in x \qquad \alpha\in\Gamma,\ x\in\Delta$$

intersection arrayの決定により、rank 1のintersection diagram上でのcliqueのpatternが決まります。これにより、$\tilde{\Gamma}$がdistance-biregular graph (DBRG)というgraphであることがわかります。

DBRGの定義他についてはここでは省略させてもらいますが([5]他に書かれています)、DRGのようなintersection arrayを2つ持つgraphです。特に、今回のcaseについては、$b_{d-1}=a$と$b_{d-1}=a-1$のcaseでそれぞれ、次のような2つのarray $\tau(\Gamma)$と$\tau(\Delta)$が求まります。

$$\tau(\Gamma)=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} &&&&&& \text{(2r)} &&&&&&& \text{(2d)} \end{array} \\ \left\{\begin{array}{cccccccccccccc} * & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & a+1 & 2 & a+1 & & a+1 & 2 & a & 1 & & a & 1 & a & * \end{array}\right\} \end{array}$$

$$\text{or} \qquad \left.\begin{array}{ccccc} \cdots & 2 & 2 & 3 & 3 \\ & a & 1 & a-1 & * \end{array}\right\}$$

$$\tau(\Delta)=\left\{\begin{array}{cccccccccccccc} * & 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 & \overset{2r}{1} & 2 & 2 & \cdots\cdots & 2 & 2 & 2 & \overset{2d}{a+2} \\ a+2 & 2 & a+1 & & 2 & a+1 & 1 & a & & 1 & a & 1 & * \end{array}\right\}$$

$$\text{or} \qquad \left.\begin{array}{ccc} \cdots\cdots 3 & 2 & a+2 \\ a-1 & 1 & * \end{array}\right\}$$

このDBRGは、3と$a+2$と、2つのvalencyを持っています。そして、片方のvalencyが3であるDBRGを研究をすることによって、この部分のcaseにおける分類ができるのでは、と思われます。

[参考文献]

[1] Brouwer, Cohen, Neumaier "Distance-Regular Graphs"

[2] 代数的組合せ論報告集 1990年 弘前大学

[3] 鈴木寛, 野村和正, 平木彰
"Distance-Regular Graphs of $k=6$ and $a_1=1$"

[4] 平木彰 "Distance-Regular Graphs with triangles"

[5] Mohar & Shawe-Taylor
"Distance-Biregular Graph with 2-valent Vertices and Distance-Regular Line Graph"

A Constant Bound for the Number of Columns $(1, k-2, 1)$ in the Intersection Array of Distance-regular Graph

平木彰　(大阪大学 数学)

1. Definition.

Γ :connected undirected simple finite graph.

$\partial(x,y)$: distance (the length of a shortest path from x to y)

$d = \max\{\partial(x,y) | x, y \in \Gamma\}$: diameter

$\Gamma_i(x) = \{v \in \Gamma | \partial(x,v) = i\}$

$D^i_j(u,v) = \Gamma_i(u) \cap \Gamma_j(v)$

Γ:distance-regular $\Longleftrightarrow$

$p^m_{ij} = |D^i_j(u,v)|$ depends only on m $= \partial(u,v)$ rather than individual vertices.

以下 Γ を Distance-regular graph とする。

$$\begin{aligned} c_i &= p^i_{1i-1} && \text{for } 1 \le i \le d \\ a_i &= p^i_{1i} && \text{for } 0 \le i \le d \\ b_i &= p^i_{1i+1} && \text{for } 0 \le i \le d-1 \end{aligned}$$

を Γ の intersection number と呼ぶ。

$k = b_0 = |\Gamma_1(x)|$: valency of Γ

下記のように intersection number をならべたものを Γ の intersection array という。

$$\iota(\Gamma) = \left\{ \begin{matrix} * & c_1 & c_2 & \cdots & c_i & \cdots & c_{d-1} & c_d \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_i & \cdots & a_{d-1} & a_d \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_i & \cdots & b_{d-1} & * \end{matrix} \right\}$$

また、下記の記号によって intersection array 上に現れる column (c, a, b) の数を表す。

$$\ell(c,a,b) = \sharp\{ i \,|\, (c_i, a_i, b_i) = (c,a,b) \}$$

2. Introduction.

有名な坂内-伊藤の conjecture として次のようなものがある。

「 Distance-regular graph の diameter d は valency k の 関数で bound できる。」

この conjecture は今のところ $5 \leq k$ に関しては未解決であるが、その解決のためには次のことを示す必要がある。

「Distance-regular graph の intersection array には同じ column は高々有限回しか重複して現れない。」

すなわち、我々の目的は各 c, a, b に対して $\ell(c, a, b)$ を k による関数、さらに k に関係のない定数によって bound することである。 これに関して以下のことがすでに示されている。

Propostion 1 [1, 2]

If $\ell(1, 0, k-1) \geq 1$, *then* $\ell(1, 1, k-2) \leq 3$.

Propostion 2 [3]

If $k \neq 2$, *then* $\ell(c, a, c) \leq 10k \cdot 2^k$.

Propostion 3 [4]

If $k \geq 5$, *then* $\ell(1, k-2, 1) \leq 46\sqrt{k-3}$

ここでは Proposition 3 の証明の大筋を述べる。

$$r = \ell(1, 0, k-1)$$

$$t = \ell(1, k-2, 1)$$

$$s = \max\{j | b_j > c_j = 1\}$$

とする。 $r \geq t$ であることはよく知られている。A を Γ の adjacency matrix、θ を A の固有値、$m(\theta)$ を θ の A における重複度とする。Terwilliger [5] によって次のことが示されている。

$$m(\theta) \leq (k-1)^{r/2}$$

一方、$m(\theta)$ は k と s によって上から bound することができ、さらに $s \leq r(k-3)$ であることが示されている。 このことから次の不等式を得る。

$$(k-1)^{r/2} \le m(\theta) \le f(r,k)$$

$t \le r$ であることより、上の不等式を満たす最大の r を t の上限として得るわけである。 この証明では s の上限として $r(k-3)$ を用いているが、ここでは この bound を改良し、それによって t の bound を改良することを目的とする。

3. Upper Bound of s .

Propostion 4 *Under the above notation, one of the following holds.*

(1) $s \le (r+2) \cdot \log_2(k-1) + 1$.

(2) $t \le 3$.

下の表は、この bound が十分大きな k に関してはかなり改良されていることを示している。

k	9	65	2049	$2^{100}+1$
$r(k-3)$	$6r$	$62r$	$2046r$	$(2^{100}-2)r$
$(r+2)\cdot\log_2(k-1)$	$3(r+2)$	$6(r+2)$	$11(r+2)$	$100(r+2)$

証明は [6] を参照していただくことにして、ここでは argument のみを簡単に紹介する。 そのためにまずいくつかの言葉の定義をしよう。

For x and y with $\partial(x,y) = j, c_j = 1$.

$$p[x,y] = \{\text{ unique path from } x \text{ to } y\ \}$$

$$z \in \Gamma_j(x) \cap \Gamma_1(y): \ \text{hook} \iff p[x,y] \cap p[x,z] = \{x\}$$

今、長さ s の path に対して、上で定義された hook が長さ r 毎に発生し、これが a_i を増やす働きをもつことは、以前から知られていた。つまり、intersection array 上において、 a_i は r-column 毎に増加し $a_s \le (k-3)$ であることから、$s \le r(k-3)$ を得たわけである。

ところが今回示されたことは、最初に発生した a_{r+1} 個の hook は 次にはそれぞれが a_{r+1} 個の hook を生み、かつこれらが重複しないことである。 このことをくりかえし用いることにより、 a_i は r-column 毎に等比数列的に増加することが確かめられる。この結果を評価した不等式

が (1) である。この場合、公比が 1 の時のみ例外として扱わなければならないが、この場合も、もし (1) を満たさなければ、(2) を満たすことが確かめられる。

よって s の新しい bound を得た。これを Propostion 3 の証明で用いた argument に代入すると、新しい t の bound を得ることができる。

Theorem 5 *Let* Γ *be a distance-regular graph with* $k \geq 3$. *Then*

$$\ell(1, k-2, 1) \leq 20$$

Remark. (1) 存在が知られている Distance-regular graph において $\ell(1, k-2, 1)$ の最大値は 3 である。[The Biggs-Smith graph]

$$\iota(\Gamma) = \left\{ \begin{array}{cccccccc} * & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & * \end{array} \right\}$$

(2) $k \geq 4$ において $\ell(1, k-2, 1) \geq 2$ である Distance-regular-graph の存在は知られていない。

参考文献

[1] A. Boshier and K. Nomura, A remark on the intersection arrays of distance-regular graphs, J. Combin. Th. (b) 44 (1988), 149-157.

[2] A. Hiraki, An improvement of the Boshier-Nomura bound, to appear in J. Combin. Th. (b).

[3] E. Bannai and T. Ito, On distance-regular graphs with fixed valency, Graphs Combin. 3 (1987) 95-109.

[4] N. Higashitani and H. Suzuki, Bounding the number of columns (1,k-2,1) in the intersection array of a distance-regular graph, Math. Japonica 37, No 3 (1992), 487-494.

[5] P. Terwilliger, Eigenvalue multiplicities of highly symmetric graphs, Discrete Math. 41 (1982) 295-302

[6] A. Hiraki, A constant Bound for the number of columns (1,k-2,1) in the intersection array of a distance-regular graph, preprint.

Congruence in Distance-Regular Graphs

東京医科歯科大学　野 村 和 正

Let Γ be a (undirected) connected graph with the usual metric ∂. For vertices u, v in Γ and for integers i, j, let $p_{i,j}(u,v)$ denote the number of vertices x in Γ with $\partial(u,x) = i$, $\partial(v,x) = j$. Γ is said to be *distance-regular* if the parameters $p^m_{i,j} = p_{i,j}(u,v)$ depends only on $m = \partial(u,v)$, rather than the individual vertices. In this case, the parameters $p^m_{i,j}$ are called the *intersection numbers* of Γ. The intersection array of Γ is the following array, where $d = d(G)$ is the diameter and $c_i = p^i_{i-1,1}$, $a_i = p^i_{i,1}$ and $b_i = p^i_{i+1,1}$.

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{d-1} & c_d \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{d-1} & a_d \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{d-1} & 0 \end{array} \right\}$$

In this note we describe outline of proof of the following result which restricts form of the intersection array.

Theorem 1 *Let Γ be a distance-regular graph of valency k and let p be a prime divisor of k. Assume the following conditions hold for some integers r, s, t with $0 < r < s$ and $t > 1$.*

$$(c_i, a_i, b_i) \equiv \begin{cases} (1,0,-1) & \textit{if } 0 < i \le r \\ (-1,0,1) & \textit{if } s \le i < s+t \end{cases} \qquad \pmod p$$

$$c_{r+1} \equiv b_{s-1} \equiv c_{s+t} \equiv 0 \pmod p$$

Then

$$r + 1 \equiv 0 \pmod{t+1}.$$

The proof of Theorem 1 requires a large amount of computations in modulo p. To simplify notation, we assume:

> *"All computation of the intersection numbers will be done in $GF(p)$, finite field of order p".*

Theorem 1 will be obtained by computing the following intersection numbers.

$$P_{\ell,i} = p^s_{2\ell+i,s+i}.$$

Step 1 $P_{0,i} = 1 \ (0 \leq i \leq t), \quad t \leq r.$

Proof. Clearly $P_{0,0} = p^s_{0,s} = 1$. By [2] Lemma 4.1.7,

$$c_1 c_2 \cdots c_i p^s_{i,s+i} = b_s b_{s+1} \cdots b_{s+i-1} \ (i > 0).$$

So the assumption $b_s = b_{s+1} = \cdots = b_{s+t-1} = 1$ implies $c_j \neq 0 \ (0 < j \leq t)$. This means $t \leq r$ since $c_{r+1} = 0$. So, $c_j = 1 \ (0 < j \leq t)$ and hence $p^s_{i,s+i} = 1 \ (0 < i \leq t)$. □

Step 2

$$c_{2\ell+i} P_{\ell,i} = b_{s+i-1} P_{\ell,i-1} + c_{s+i+1} P_{\ell-1,i+1} - b_{2\ell+i-2} P_{\ell-1,i} + (a_{s+i} - a_{2\ell+i-1}) p^s_{2\ell+i-1,s+i}.$$

Proof. Put $j = 2\ell + i - 1$, $h = s + i$ in the following well-known formula (see [2] Lemma 4.1.7).

$$c_{j+1} p^s_{j+1,h} = p^s_{j,h-1} b_{h-1} + p^s_{j,h}(a_h - a_j) + p^s_{j,h+1} c_{h+1} - p^s_{j-1,h} b_{j-1}.$$

□

Step 3 $P_{1,0} = -1, \ \ P_{\ell,0} = -P_{\ell-1,1} + P_{\ell-1,0} \ \ (1 < \ell \leq (r/2)).$

Proof. From Step 2 with $i = 0$,

$$c_{2\ell} P_{\ell,0} = b_{s-1} P_{\ell,-1} + c_{s+1} P_{\ell-1,1} - b_{2\ell-2} P_{\ell-1,0} + (a_s - a_{2\ell-1}) p^s_{2\ell-1,s}.$$

Since $2\ell \leq r$, we have $c_{2\ell} = 1$. We have also $c_{s+1} = -1$, $b_{s-1} = 0$, $a_s = a_{2\ell} = 0$. So

$$P_{\ell,0} = -P_{\ell-1,1} - b_{2\ell-2} P_{\ell-1,0}.$$

When $\ell = 1$, $b_{2\ell-2} = b_0 = 0$. Hence $P_{1,0} = -P_{0,1} = -1$ by Step 1. If $\ell > 1$, we have $b_{2\ell-2} = -1$. □

Step 4 *Let* $\ell > 0,\ 0 < i \leq t-1$ *and* $2\ell + i \leq r$. *Then*

$$P_{\ell,i} = \begin{cases} P_{\ell,i-1} - P_{\ell-1,i+1} + P_{\ell-1,i} & \text{if } i \leq t-2 \\ P_{\ell,i-1} + P_{\ell-1,i} & \text{if } i = t-1 \end{cases}$$

Proof. We have $c_{2\ell+i} = b_{s+i-1} = 1$, $b_{2\ell+i-2} = -1$, $a_{s+i} = a_{2\ell+i-1} = 0$. Then Step 2 implies

$$P_{\ell,i} = P_{\ell,i-1} + c_{s+i+1}P_{\ell-1,i+1} + P_{\ell-1,i}.$$

Here, when $i \leq t-2$, we have $c_{s+i+1} = -1$. When $i = t-1$, $c_{s+i+1} = c_{s+t} = 0$.

□

Now we define $Q_{\ell,i} \in GF(p)$ $(0 \leq \ell,\ -1 \leq i \leq t)$ as follows.

$$Q_{\ell,-1} = Q_{\ell,t} = 0 \quad (\ell \geq 0),$$

$$Q_{0,0} = 0, \quad Q_{0,i} = 1 \quad (0 < i < t),$$

$$Q_{\ell,i} = Q_{\ell,i-1} - Q_{\ell-1,i+1} + Q_{\ell-1,i} \quad (0 < \ell,\ 0 \leq i < t).$$

Step 5 *Let* $0 \leq \ell,\ 0 \leq i < t$ *and* $(\ell, i) \neq (0,0)$. *Then*

$$Q_{\ell,i} = \begin{cases} P_{\ell,i} & \text{if } 2\ell + i \leq r \\ c_{2\ell+i}P_{\ell,i} & \text{if } 2\ell + i = r+1 \end{cases}$$

Proof. It can be shown by induction on ℓ, i by using Step 1–4. □

Step 6

$$Q_{0,i} = \begin{cases} 1 & \text{if } 1 \leq i \leq t-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Q_{1,i} = \begin{cases} -1 & \text{if } 0 \leq i \leq t-2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

For $2 \leq \ell \leq t$,

$$Q_{\ell,i} = \begin{cases} (-1)^{\ell-1} & \text{if } t-\ell \leq i \leq t-\ell+1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

For $\ell \geq t+1$,

$$Q_{\ell,i} = (-1)^{t+1} Q_{\ell-(t+1),i}.$$

Proof. Immediately implied by definition of $Q_{\ell,i}$, using induction on ℓ, i. □

Step 7 *For any given* m (> 0) *with* $m \not\equiv 0 \pmod{t+1}$, $Q_{\ell,m-2\ell} \neq 0$ *holds for some* ℓ.

Proof. Take e, f which satisfy $m = 2(t+1)e + f$ and $0 \leq f < 2(t+1)$. Then, by Step 6, we can easily show that $Q_{\ell,m-2\ell} \neq 0$ holds for the following value of ℓ.

$$\ell = \begin{cases} e(t+1) & \text{if } 1 \leq f \leq t-1 \\ e(t+1)+1 & \text{if } f = t \\ e(t+1)+f-t & \text{if } t+2 \leq f \leq 2t \\ e(t+1)+t & \text{if } f = 2t+1 \end{cases}$$

□

Proof of Theorem 1. Put $m = r+1$ and assume $m \not\equiv 0 \pmod{t+1}$. Then, by Step 7, we get $Q_{\ell,m-2\ell} \neq 0$. We have also $Q_{\ell,m-2\ell} = c_m P_{\ell,m-2\ell}$ by Step 5. Therefore $c_m P_{m-2\ell} \neq 0$, contradicting the assumption $c_m = c_{r+1} = 0$. □

参考文献

[1] E. Bannai and T. Ito, "Algebraic Combinatorics I," Benjamin, California, 1984.

[2] A. E. Brouwer, A. M. Cohen and A. Neumaier, "Distance-Regular Graphs," Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.

amsppt

Non Hall type の Hadamard 行列について

木村 浩

愛媛大学理学部

Abstract. Hall set を持つ 28 次の Hadamard 行列の分類は [9] で完成されている．それらは 486 個の等価でない行列に分類できた．ここでは Hall set を持たない 28 次の Hadamard 行列の等価類はただ 1 つである事を示す．これによって 28 次の Hadamard 行列は 487 個の等価類に分類される．又 6 個を除いて K−行列に依って完全に分類されることをも示している ([7],[9]).

1. Introduction

位数 n の Hadamard 行列 H は成分が 1 又は −1 の n 次正方行列であって，$HH^T = nI$ を満たすものである．このとき n は 1,2 又は 4 の倍数である事は良く知られている．2 つの行列が任意の行の置換，列の置換，行に −1 を掛ける作用，列に−1 を掛ける作用で生成された群の元で移れるとき等価であると定義する．Hadamard 行列に等価な行列は明かに Hadamard 行列である．現在のところ，Hadamard 行列の研究目的は存在を示すことと等価類に分類することである．位数 ≤ 24 の Hadamard 行列の分類は Hall, Ito-Leon-Longyear と 著者等によって完成されている ([3], [4],[5] and [8]). Hall set を持つ 28 次の Hadamard 行列の分類は [9] で完成されている．それらは 486 個の等価類に分類できた．ここでは Hall set を持たない 28 次の Hadamard 行列の等価類はただ 1 つである事を示す．このためには計算機の使用が不可欠の様に思われる．又，十分な reduction を行う必要がある．最初に計算が可能になる様に H の性質を調べる．ここでは次の仮定をしておく

$$H\text{の 1 行目と 1 列目はすべて 1 とする} \tag{1.1}$$

定義より Hadamard 行列の全ての等価類は (1.1) を満たすものを含んでいる．

2. H の性質 ($n = 28 = 8k + 4$) のとき)

H を位数 $n = 8k + 4(k = 3)$ の Hadamard 行列 とする. ($n \neq 28$ のとき成り立つ性質も多く含まれている.) 次の性質 (2.1) を満たすとき, H は Hall set を持つ, 又は Hall 型であるという.

Hは次の行列に等価な 4 行から成る小行列を持つ.

$$\begin{bmatrix} ++++ & J_{2k} & J_{2k} & J_{2k} & J_{2k} \\ ++-- & J_{2k} & J_{2k} & -J_{2k} & -J_{2k} \\ +-+- & J_{2k} & -J_{2k} & J_{2k} & -J_{2k} \\ +--+ & -J_{2k} & J_{2k} & J_{2k} & -J_{2k} \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

ここで J_{2k} はすべての成分が 1 である $2k$–次元行ベクトルとする. [10] より H が Hall type なら H^T も Hall type である. 以下 H は Hall type でないと仮定する. H の 4 行から成る小行列は次の行列の 1 つに等価である.

$$\begin{bmatrix} J_a & J_a & J_a & J_a \\ J_a & J_a & -J_a & -J_a \\ J_a & -J_a & J_a & -J_a \\ J_a & -J_a & -J_a & J_a \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

ここで $a = 2k + 1$, 又は

$$\begin{bmatrix} J_a & J_a & J_a & J_a & J_b & J_b & J_b & +J_b \\ J_a & J_a & -J_a & -J_a & J_b & J_b & -J_b & -J_b \\ J_a & -J_a & J_a & -J_a & J_b & -J_b & J_b & -J_b \\ J_a & -J_a & -J_a & J_a & -J_b & J_b & J_b & -J_b \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

ここで $1 \leq a \leq 2k$, $a + b = 2k + 1$. (2.3) に等価な行列を a 型と呼ぶことにする. 明かに a 型の行列は $2k + 1 - a$ 型でもある.

Proposition 2.1. H は (2.2) 型の小行列を持たない.

Proof: H が (2.2) の小行列を持っているとする.

$$\begin{bmatrix} J_a & J_a & J_a & J_a \\ J_a & J_a & -J_a & -J_a \\ J_a & -J_a & J_a & -J_a \\ J_a & -J_a & -J_a & J_a \\ <r> & <s> & <t> & <u> \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

ここで $<i>$ は 1 の成分が i 個, その他の成分が -1 の a–次元行ベクトルとする. もし (2.4) が Hの小行列ならば次を満たさなければならない.

$$r + s = r + t = r + u = 2k + 1$$
$$r + s + t + u = 4k + 2$$

これより $s=t=u, 2s=2k+1$, 従って矛盾.

次の行列を H の最初の 4 行を含む 5 行から成る小行列とする.

$$\begin{bmatrix} J_a & J_a & J_a & J_a & J_b & J_b & J_b & +J_b \\ J_a & J_a & -J_a & -J_a & J_b & J_b & -J_b & -J_b \\ J_a & -J_a & J_a & -J_a & J_b & -J_b & J_b & -J_b \\ J_a & -J_a & -J_a & J_a & -J_b & J_b & J_b & -J_b \\ <r> & <s> & <t> & <u> & <v> & <w> & <x> & <y> \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

ここで $<i>$ は Proposition 2.1 の証明と同じで $a=2$ or 3 とする. この時

$$\begin{aligned} r+s+v+w &= 2k+1, \\ r+t+v+x &= 2k+1, \\ r+u+w+x &= 2k+1, \\ r+s+t+u+v+w+x+y &= 4k+2, \\ Hallset\ &\text{を持たない}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

を満たす.

Proposition 2.2. H 又は H^T は 2 型の小行列を持つ.

Proof: Proposition を否定せよ. すなわち, すべての H の 4 列から成る小行列が type 3 であるとする. (2.5) の全ての 4 行からなる小行列が type 3 であるから,

$$\begin{aligned} r+v &= 3 \quad or \quad 4, \\ r+w &= 3 \quad or \quad 4, \\ r+x &= 3 \quad or \quad 4, \\ r+4-y &= 3 \quad or \quad 4. \end{aligned} \tag{2.7}$$

$v=0$ ならば H^T は type 1 又は type 4 の小行列を持つ. 同様に $w, x, y \neq 0$. $r=3$ とすば, $v, w, x=1$, $s, t, u=2$, $y=3$. これは (2.6) の最後の等式を満たさない. しかし H は $r=3$ の行を 3 個持たなければ成らない.

この Propositon 2.2 より H の最初の 4 行の小行列は type 2 としてよい. 以下 Hadamard 行列 はこの型をしているものとする. 但し最後に H と H^T が等価である事を云う必要がある.

Proposition 2.3. $a=2$ の時,(2.5) の解は次の 27 個である.

$$(r,s,t,u,v,w,x,y)=$$

$$(0,0,0,0,3,3,3,4),\quad (0,0,0,2,4,2,2,3),\quad (0,0,1,1,3,3,2,3), \tag{1- 3}$$

$$(0,0,2,0,2,4,2,3),\quad (0,0,2,2,3,3,1,2),\quad (0,1,0,1,3,2,3,3), \tag{4- 6}$$

$$(0,1,1,0,2,3,3,3),\quad (0,1,1,2,3,2,2,2),\quad (0,1,2,1,2,3,2,2), \tag{7- 9}$$

$$(0,2,0,0,2,2,4,3),\quad (0,2,0,2,3,1,3,2),\quad (0,2,1,1,2,2,3,2), \tag{10-12}$$

$$(0,2,2,0,1,3,3,2),\quad (0,2,2,2,2,2,2,1),\quad (1,0,0,1,3,2,2,4), \tag{13-15}$$

$$(1,0,1,0,2,3,2,4),\quad (1,0,1,2,3,2,1,3),\quad (1,0,2,1,2,3,1,3), \tag{16-18}$$

$$(1,1,0,0,2,2,3,4),\quad (1,1,0,2,3,1,2,3),\quad (1,1,1,1,2,2,2,3), \tag{19-21}$$

$$(1,1,2,0,1,3,2,3),\quad (1,1,2,2,2,2,1,2),\quad (1,2,0,1,2,1,3,3), \tag{22-24}$$

$$(1,2,1,0,1,2,3,3),\quad (1,2,1,2,2,1,2,2),\quad (1,2,2,1,1,2,2,2). \tag{25-27}$$

i 番目の解を満たす H の行を type i の行と呼ぶ. Ω を 行の type の集合とする, 即ち, $\Omega=\{1,\cdots,27\}$.

$\{H\}$ を最初の 4 行の小行列の type が 2 である H に等価な Hadamard 行列の集合とする. $\{H\}$ 上の置換群で自然に Ω に働くものを考える.

次の 2 つの Prososition は自明.

Proposition 2.4. S_4 を $\{H\}$ の元の最初の 4 行上の置換から引き起こされる $\{H\}$ 上の置換群とする. この群は Ω 上に自然に働き, その *orbit* は次のものである.

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{1,5,11,13\},\\
\Omega_2 &= \{2,4,10,14\},\\
\Omega_3 &= \{3,6,7,8,9,12\},\\
\Omega_4 &= \{15,16,17,18,19,20,22,23,24,25,26,27\},\\
\Omega_5 &= \{21\}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Proposition 2.5. S_0 を $\{H\}$ の元の第 1 列と第 2 列の置換から引き起こされる $\{H\}$ 上の置換群とする. この群は Ω 上に自然に働き, その *orbit* は次のものである.

$$\{i,\ j\},\ \textit{where}\ i=1,\cdots,7 \text{ and } i+j=15$$

また，第１列と第３列の交換から得られる位数 2 の $\{H\}$ 上の置換がある．

Proposition 2.6. 上の置換から得られる Ω 上の作用は次のものである．

$$
\begin{array}{lllll}
1 \longrightarrow 23, & 4 \longrightarrow 22, & 11 \longrightarrow 22, & 14 \longrightarrow 23, & \\
2 \longrightarrow 20, & 5 \longrightarrow 19, & 12 \longrightarrow 21, & 15 \longleftrightarrow 17, & 24 \longleftrightarrow 25, \\
3 \longrightarrow 21, & 10 \longrightarrow 19, & 13 \longrightarrow 20, & 16 \longleftrightarrow 18, & 26 \longleftrightarrow 27,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
6 \longrightarrow 7 \ \text{or} \ 8, & 9 \longrightarrow 7 \ \text{or} \ 8, & 21 \longrightarrow 3 \ \text{or} \ 12, \\
7 \longrightarrow 6 \ \text{or} \ 9, & 19 \longrightarrow 10 \ \text{or} \ 5, & 22 \longrightarrow 4 \ \text{or} \ 11, \\
8 \longrightarrow 6 \ \text{or} \ 9, & 20 \longrightarrow 2 \ \text{or} \ 13, & 23 \longrightarrow 1 \ \text{or} \ 14.
\end{array} \tag{2.6}
$$

R,S,T,U,V,W,X,Y を H の小行列で，次を満たすものとする

$$
H = \begin{bmatrix}
J_2 & J_2 & J_2 & J_2 & J_5 & J_5 & J_5 & +J_5 \\
J_2 & J_2 & -J_2 & -J_2 & J_5 & J_5 & -J_5 & -J_5 \\
J_2 & -J_2 & J_2 & -J_2 & J_5 & -J_5 & J_5 & -J_5 \\
J_2 & -J_2 & -J_2 & J_2 & -J_5 & J_5 & J_5 & -J_5 \\
R & S & T & U & V & W & X & Y
\end{bmatrix}.
$$

$$
R^T = \begin{bmatrix} J_{12} & J_{12} \\ J_{12} & -J_{12} \end{bmatrix}^T. \tag{2.7}
$$

x_i を V の行 $<i>$ の数とする．Proposition 2.3 より $x_0 = x_5 = 0$.

Proposition 2.7. $x_1 + x_4 = 2$.

Proof: V は H の小行列であるから，次の関係を満たさなければならない．

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 24, \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 55, \\
x_2 + 3x_3 + 6x_4 &= 40.
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

これより得られる．

W, X, Y についても同様なことが成り立つ．

Corollary 2.8. t_i を H の type i の行の数とする．この時，次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
t_2 + t_{13} + t_{22} + t_{25} + t_{27} &= 2, \\
t_4 + t_{11} + t_{20} + t_{24} + t_{26} &= 2, \\
t_5 + t_{10} + t_{17} + t_{18} + t_{23} &= 2, \\
t_1 + t_{14} + t_{15} + t_{16} + t_{19} &= 2.
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

S,T,U を考えることによって次の proposition を得る．

Proposition 2.9.

$$
\begin{aligned}
t_3 &= 5 - t_1 - t_2 - t_4 - t_5 - t_{15} - t_{16} - t_{17} - t_{18},\\
t_6 &= 5 - t_1 - t_2 - t_{10} - t_{11} - t_{15} - t_{19} - t_{20} - t_{24},\\
t_7 &= 5 - t_1 - t_4 - t_{10} - t_{13} - t_{16} - t_{19} - t_{22} - t_{25},\\
t_{12} &= 5 - t_{10} - t_{11} - t_{13} - t_{14} - t_{24} - t_{25} - t_{26} - t_{27},\\
t_9 &= 5 - t_4 - t_5 - t_{13} - t_{14} - t_{18} - t_{22} - t_{23} - t_{27},\\
t_8 &= 5 - t_2 - t_5 - t_{11} - t_{14} - t_{17} - t_{20} - t_{23} - t_{26}.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Proposition 2.6 より 次を仮定してよい.

$$t_{21} \leq \min\{t_3 + t_{12},\ t_6 + t_9,\ t_7 + t_8\}$$

$r(i)$ を H の type i の行の R−part の 1 の数とする. 同様に, $s(i)$, $t(i)$, $u(i)$, $v(i)$, $w(i)$, $x(i)$, $y(i)$ を定義する.

5 行目から 28 行目の type をきめる. 次の条件を満たさなければ成らない.

$$
\begin{gathered}
t_{21} \leq \min\{t_3 + t_{12},\ t_6 + t_9,\ t_7 + t_8\},\\
\textstyle\sum_{i=1}^{27} t_i = 24, \quad \sum_{i=1}^{14} t_i = 14, \quad \sum_{i=1}^{27} t_i v(i) = 55,\\
\textstyle\sum_{i=1}^{27} t_i w(i) = 55, \quad \sum_{i=1}^{27} t_i x(i) = 55, \quad \sum_{i=1}^{27} t_i y(i) = 65,\\
\textstyle\sum_{i=15}^{27} t_i r(i)s(i) = 10, \quad \sum_{i=15}^{27} t_i r(i)t(i) = 10, \quad \sum_{i=15}^{27} t_i r(i)u(i) = 10,\\
\textstyle\sum_{i=15}^{27} t_i r(i)v(i) = 20, \quad \sum_{i=15}^{27} t_i r(i)w(i) = 20, \quad \sum_{i=15}^{27} t_i r(i)x(i) = 20,\\
\textstyle\sum_{i=15}^{27} t_i r(i)y(i) = 30, \quad \sum_{i=1}^{27} t_i s(i)t(i) = 24, \quad \sum_{i=15}^{27} t_i s(i)u(i) = 24,\\
\textstyle\sum_{i=1}^{27} t_i t(i)u(i) = 24, \quad \sum_{i=1}^{27} t_i s(i)v(i) = 50, \quad \sum_{i=15}^{27} t_i s(i)w(i) = 50,\\
\textstyle\sum_{i=1}^{27} t_i s(i)x(i) = 60, \quad \sum_{i=15}^{27} t_i s(i)y(i) = 60, \quad \sum_{i=1}^{27} t_i t(i)v(i) = 50,\\
\textstyle\sum_{i=15}^{27} t_i t(i)w(i) = 60, \quad \sum_{i=1}^{27} t_i t(i)x(i) = 50, \quad \sum_{i=15}^{27} t_i t(i)y(i) = 60,\\
\textstyle\sum_{i=1}^{27} t_i u(i)v(i) = 60, \quad \sum_{i=15}^{27} t_i u(i)w(i) = 50, \quad \sum_{i=1}^{27} t_i u(i)x(i) = 50,\\
\textstyle\sum_{i=15}^{27} t_i u(i)y(i) = 60, \quad \sum_{i=1}^{27} t_i v(i)w(i) = 125, \quad \sum_{i=15}^{27} t_i v(i)x(i) = 125,\\
\textstyle\sum_{i=1}^{27} t_i v(i)y(i) = 150, \quad \sum_{i=15}^{27} t_i w(i)x(i) = 125, \quad \sum_{i=1}^{27} t_i w(i)y(i) = 150,\\
\textstyle\sum_{i=15}^{27} t_i x(i)y(i) = 150.
\end{gathered}
\tag{2.11}
$$

$C=\{t_1,\cdots,t_{27}\}$ を今までの条件を満たすものとする. 又, Γ を全ての C から成る集合とする. 位数 48 の群 $<S_4,S_0>$ は Γ 上に働く. これらの条件の下で計算機すると $<S_4,S_0>$ の orbit は 13 個でその代表元は次の通りでまる.

PROPOSITION 3.1. H の 24 行の type の集合は次の 13 通りの 1 つである.

$$(t_1,\cdots,t_{27})=$$

$$\begin{array}{llllllll}
(20100 & 11330 & 03000 & 02000 & 42020 & 00) & 1 \\
(20100 & 11330 & 03000 & 01101 & 41011 & 00) & 2 \\
(10200 & 22220 & 02010 & 02000 & 42020 & 00) & 3 \\
(10200 & 22220 & 02010 & 01101 & 41011 & 00) & 4 \\
(11100 & 12230 & 03000 & 11000 & 41120 & 00) & 5 \\
(11100 & 12230 & 03000 & 10101 & 40111 & 00) & 6 \\
(10200 & 21320 & 02100 & 11000 & 41120 & 00) & 7 \\
(10200 & 21320 & 02100 & 10101 & 40111 & 00) & 8 \\
(10200 & 12320 & 03001 & 01000 & 32120 & 00) & 9 \\
(10200 & 12220 & 03001 & 00101 & 31111 & 00) & 10 \\
(10100 & 13420 & 02001 & 01100 & 31020 & 01) & 11 \\
(00200 & 23320 & 02002 & 00100 & 21111 & 10) & 12 \\
\quad \text{or} & & & & & & \\
(00200 & 32230 & 02001 & 11000 & 21111 & 10) & 13
\end{array} \tag{2.12}$$

各場合について今までの条件を満たす様に計算する. R,S,T,U,V,W,X,Y の関係を見ながら, H の 3 列から順に 28 列まで構成していく. case 1 で 1 個 Hadamard 行列 が得られる. Pallery 型の行列はその転置と等価であるから, 次の定理を得る.

定理 1. *Hall set* を持たない 28 次 の *Hadamard* 行列 の等価類はただ 1 個である.

定理 2. 28 次 の *Hadamard* 行列 の等価類は 487 個で, 5 個を除いて, $K-$ 行列 で分類出来る.

REFERENCES

1. F. C. Bussemaker and V. D. Tonchev, *New extremal doubly-even codes of length 56 derived from Hadamard matrices of order 28*, Discrete Math. 76 (1989), 45–49.
2. M. Hall,Jr., "Combinatorial Theory," Ginn(Blaisdell), Boston, 1967.
3. M. Hall,Jr., *Hadamard matrices of order 16*, J. P. L. Research Summary 36–10, 1 (1961), 21–26.
4. M. Hall,Jr., *Hadamard matrices of order 20*, J. P. L. Technical Report 32–761 (1965).
5. N. Ito, J. S. Leon and J. Q. Longyear, *Classification of 3-(24,12,5) designs and 24-dimensional Hadamard matrices*, J. Combin. Theory(A) 27 (1979), 289–306.
6. H. Kimura, *Hadamard matrices of order 28 with automorphism groups of order two*, J. Combin. Theory(A) 24 (1986), 98–102.
7. H. Kimura, *On equivalence of Hadamard matrices*, Hokkaido Math. J. 17 (1988), 139–146.
8. H. Kimura, *New Hadamard matrix of order 24*, Graphs and Combin. 5 (1989), 236–242.
9. H. Kimura, *Characterization of Hadamard matrices of order 28 with no Hall sets*, Discrete Math.(to appear).
10. H. Kimura and H. Ohmori, *Construction of Hadamard matrices of order 28*, Graphs and Combin. 2 (1986), 247–257.
11. H. Kimura and H. Ohmori, *Hadamard matrices of order 28*, Mem. Fac. Educ. Ehime Univ., Nat. Sci. 7 (1987), 7–57.
12. V. D. Tonchev, *Hadamard matrices of order 28 with automorphisms of order 13*, J. Combin. Theory(A) 35 (1983), 43–57.
13. V. D. Tonchev, *Hadamard matrices of order 28 with automorphisms of order 7*, J. Combin. Theory(A) 40 (1985), 62–81.

山本幸一先生の整数論における業績

九大・理・白谷　克巳

山本幸一先生は、1953年九州大学理学部へ金沢大学から転出されて来られ、丁度小生は教養部から学部3年次へ進学したばかりでその頃から小生は類体論のゼミを指導して頂いた。当時級友の幾人かも一緒に勉強していたのであるが、いつの間にか小生一人が残ってしまって、以来亡くなられるまで、御指導を頂き、いろいろと面倒をおかけしてしまった。指導する方も指導される方もその研究が出会いによって決定され互いに深く影響されるのであるから人生における縁とは真に不思議なものである。

山本幸一先生は、東大卒業後組合せ論、特にラテン方陣の研究を続けておられたが、九州大学へ来られた頃から、これらの研究に加えて解析数論、代数的整数論を精力的に研究され始められた。

数度のアメリカ滞在中及び帰国後の東京女子大学では、組合せ論を主として研究され、特にガウス和の数論を利用されてアダマール行列の構成を山田美枝子氏と研究された。

山本幸一先生の整数論に関する業績は、大別して3種類に分かれると思う。　末綱先生の影響と思われる解析数論、九大で始められた類体論及び詳しい相互法則、及びアメリカ滞在中に開始されたガウス和の整数論である。

組合せ論特に組合せ解析の手法を自由に駆使されて、整数論を取り扱われるところが独特で、極めて具体的で厳密な議論を随所に展開されている。

整数論で取り扱われる各対象も極めて本質的な問題を含むもので、どの論文も大変面白く暗示に富み、深く読み解けば新しい研究の糧を得ることができる。

1）体 k を有限次代数体とする。　k の整イデアル $\mathfrak{a}$ 全体で定義された複素数値関数 α と、実数の区間 $(0,\infty)$ 上で定義され、$(0,1)$ 上で 0 をとる複素数値関数 f に対し

$$(S_\alpha f)(x) = \sum_{\mathfrak{a}} \alpha(\mathfrak{a}) f\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right)$$

で、k での算術的1次変換 (arithmetic linear transformation) を定義する。この算術的1次変換を使用して、類体論の第2不等式　$h \leq n$ の証明及びディリクレの算術級数中の素数定理の初等的証明が与えられた。([8],[9],[11])

2) 局所類体論の同型定理を、コホモロジーや多元環を使用することなく、作用素　$\wp(\alpha) = \alpha^p - \alpha$ の拡張を導入されて、分岐群と剰余類の対応を詳細に考察されて証明に成功された論文 [12] も独創的である。

その後素円体での詳しい相互法則 [14] 及び Artin − Hasse − Šafarevič 関数と Witt vectors との関係を論じられた [15]。

素円体での Kummer-Hilbert の相互法則の原稿を、わざわざ教養部の私の研究室まで持参下さり、それを契機として小生も詳しい相互法則をつつくこととなった次第である。

Artin − Hasse − Šafarevič 関数に関する論文 [15] は、当時 Hasse も詳しく読まれて、プリントミスなどを訂正されていたのを記憶している。

3) さて、Kummer-Hilbert の相互法則に関しては、東京女子大の報告集で補充法則も含めた形で再度取り扱われている [31]。

p は奇素数とする。　有理 p 進数体 $\mathbf{Q}_p$ 上の素円体 $\mathbf{Q}_p(\zeta_p) = \mathbf{Q}_p(\sqrt[p-1]{-p})$ を考える。

Artin-Hasse の指数級数 $E(x) = \exp\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p^i} x^{p^i}\right) \in \mathbf{Z}_p[[x]]$ 及び $E(x) - 1$ の逆級数　$L(1+x)$　の打ち切り多項式

$$\operatorname{Exp} x = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{n!} x^n, \qquad \operatorname{Log}(1+x) = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i$$

を使って、$\mathbf{Q}_p(\zeta_p)$　の主単数　ν　に対し

$$\operatorname{Log} \nu \equiv \sum_{i=1}^{p-1} \frac{l_\pi^{(i)}(\nu)}{i!} \pi^i \qquad (\mathrm{mod} \quad \mathfrak{p}^{p+1})$$

で　Kummer　の対数微分商　$l_\pi^{(i)}(\nu) \in \mathbf{Z}$ を定義する。π は $\mathbf{Q}_p(\zeta_p)$ の素元、$\mathfrak{p}$ は素イデアルを示す。

このとき、$z \in \mathbf{Z}$ の　Fermat 商を $q(z) = \frac{1}{p}(z^p - z)$ とおく。

$\alpha, \beta \in \mathbf{Q}_p(\zeta_p)^\times$ を分解して　$\alpha = \pi^a \xi_1 \mu$,　$\beta = \pi^b \xi_2 \nu$,　(ξ_1, ξ_2 は 1 の $p-1$ 乗根、μ, ν は主単数）と書くとき

$$G = aRes(\frac{L(\nu)}{\pi}d\pi) - bRes(\frac{L(\mu)}{\pi}d\pi) + Res(L(\nu)dL(\mu))$$

とおく。これは p を法として素元 π に依存しない。

p 次ノムル剰余記号 (α,β) が $(\alpha,\beta)=\xi_p^G$ で与えられていて、$G = aq(l_\pi^{(1)}(\nu)) - bq(l_\pi^{(1)}(\mu)) + \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{i-1}l_\pi^{(i)}(\mu)l_\pi^{(p-i)}(\nu)$ となることが示されている。

4) 4 次剰余指標に付随するガウス和の偏角について論じられた論文 [23] も良く知られている。

素数 p が $p \equiv 1 \pmod 4$ を満たすと、$p = a^2 + b^2$, $a, b > 0$, a は奇数と有理整数の平方和で書ける。

$\tilde{\omega} = a + bi$ はガウス数体 $\mathbf{Q}(i)$ の素元であるが、$\chi(m)$ を 4 次指標 $(\frac{m}{\tilde{\omega}})_4$ とし、ガウス和$\tau(\chi) = \sum_{m=0}^{p-1}\chi(m)e^{\frac{2\pi i m}{p}}$ に対し、1 の 4 乗根η_p を

$$\tau(\chi) = \eta_p\sqrt{\tilde{\omega}}p^{\frac{1}{4}}, \qquad 0 < arg\sqrt{\tilde{\omega}} < \frac{\pi}{4}$$

で定義する。

$A_p = -\frac{1}{p}\sum_{m=1}^{p-1}\chi(m)m,$
$B_p = -\frac{1}{p}\sum_{m=1}^{\frac{p-1}{2}}\chi(m)m,$
$C_p = \sum_{m=1}^{\frac{p-1}{2}}\chi(m),$

とおくとき、計算機を使って $p < 4000$ で次を確かめられた。

(I) $p \equiv 5 \pmod 8$ で $-\frac{\pi}{4} < arg(\eta_p\bar{A}_p) \le \frac{3}{4}\pi,$
(II) $p \equiv 5 \pmod 8$ で $-\pi \le arg(\eta_p\bar{B}_p) < 0,$
(III) $p \equiv 5 \pmod 8$ で $I_m(\eta_p\bar{B}_p) > 0,$
(IV) $p \equiv 1 \pmod 8$ で $Re(\eta_p\bar{B}_p) > 0.$

これらが、$p > 4000$ の所では成立するかという問題は、伊藤博氏により解決され、(I),(II),(III) の反例及び (IV) の正しいことが示された (1986)。

5) ガウス和の乗法的関係に関する Hasse の予想の解決 [24],[29] も大変面白い。現今では distributions の理論として議論されているが、山本幸一先生の研究を契機とし単円数に関する Milnor 予想についての Bass,Ennola

などの研究とあい補って distributions の概念がその後生まれたのであろう。

e を自然数とし、 $T_e = \frac{1}{e}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$ の元 ξ に対し $F(\xi)$ をとり e 個の $F(\xi)$ で生成される $\mathbf{Z}$ 自由加群を $\mathfrak{A}$ とする。

$$
\begin{aligned}
U_\xi &= F(\xi) + F(-\xi) \quad , \\
V_{l,\xi} &= F(l\xi) - \sum_{j=0}^{l-1} F(\xi + \frac{j}{l}) \qquad (l \text{ は } e \text{ の約数})
\end{aligned}
$$

で生成される $\mathfrak{A}$ 部分加群を $\mathfrak{B}$ とするとき、商加群 $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ を level e の universal odd distribution いう。

さて、$e \geq 3$ ならば $\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \cong \mathbf{Z}^{\frac{1}{2}\varphi(e)} \oplus (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{2^{r-1}}$ （$\varphi(e)$ はオイラーの関数、 r は円体 $\mathbf{Q}(\zeta_e)$ で分岐する素数の個数）であることを得られている [29] 。

ガウス和の Davenport-Hasse 関数式を変形して、この関係式が Γ 関数の乗法公式と類似なものであること、即ち distribution 関係式であることを初めて気付かれたのも山本先生であろう。

このようなことで、Hasse の予想はガウス和をイデアルとして取り扱うときは正しく、数として取り扱うときは、gap group として $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{2^{r-1}-1}$ が生ずることを示されたのである。

なお、C.G.Schmidt(1980) は Sinnott のコホモロジーの計算を利用して、この gap group を厳密に決定した。

6) その他、整数論における業績はイデアルの標準底に関する論文 [25], Kronecker-Weber の定理の分岐理論による証明 [30], 不定方程式に関するもの [20], 及び相対ガウス和から生ずる合同式 [34] などが挙げられるが最後の合同式に関するものは、むしろ組合せ論の領域に属すると思われる。

いずれにせよ、整数論研究においては、その豊富な組合せ論の手法を自由に駆使され、又組合せ論の対象を研究される際には深い整数論の知識を不断に活用されて、国際的な業績を残されたことは畏敬すべきことである。

山本幸一先生の差集合、Hadamard行列に関する業績

九大・理　山田美枝子

山本幸一先生の差集合、Hadamard行列に関する業績を論文の概要を述べながら論じたい。

差集合について

1 (v, k, λ) 差集合が存在すれば $k(k-1)=\lambda(v-1)$ が成りたつことは明らかであるが、$k(k-1)=\lambda(v-1)$ が成りたつという仮定のもとで、与えられたパラメータ v, k, λ に対し差集合が存在するかという問題を考える。SBIBDに関する Bruck-Ryser-Chowla の定理は、この問題に対し必要条件を与えていることはよく知られている。

山本先生の論文[18]では、この問題について5つの定理を証明している。これらは本、survey等では別個に取扱われていることが多いが、円周等分体の Hilbert 理論を用いた一貫した理論のもとで論じられている。

<u>定理 1 [18]</u> 巡回群 G 上に (v, k, λ) 差集合が存在するとする。p を $n=k-\lambda$ をわる素数、d を v の約数で $d\neq 1$, $(p, d)=1$ とする。

さらに

$$p^f \equiv -1 \pmod{d}$$

となる整数 f が存在すれば、$p^e \| n$ とするとき e は偶数である。

これから Bruck-Ryser-Chowla の定理を改良した結果が得られる。論文[18]の出版1年後の1964年に Mann[Ma] は、乗法子を使って定理1をアーベル群上に拡張したものを証明した。さらに1983年に Lander[La] は、一般の有限群においても定理1が成りたつことを示した。

2 (v, k, λ) 巡回差集合について次の予想がある。

<u>予想(Ryser)</u>　もし非自明な (v, k, λ) 差集合が存在すれば、$(v, n)=1$ である。

現在知られている非自明な巡回差集合はすべて $(v, n)=1$ である。$(v, n)>1$ のときに非存在が言えれば予想は正しいが、$(v, n)>1$ の場合について論じたのが次の定理である。

<u>定理2 [18]</u> (1) (v, k, λ) 巡回差集合が存在するとする。p を n をわる素数、$d \neq 1$ を v の約数で $(p, d)=1$ とする。$p^l \| v$, $p^e \| n$. もし

$$p^f \equiv -1 \pmod{d}$$

となる整数 f が存在すれば

$$p^{\frac{e}{2}} \leq \frac{v}{dp^l}$$

である。

(2) (v,k,λ) 巡回差集合が存在するとする。p を n をわる素数で $p^{\ell}\| v$, $p^{e}\| n$ とする。もし e が偶数ならば

$$p^{\frac{e}{2}} \leq \frac{v}{p^{\ell}}$$

である。

この定理や定理1など論文[18]の定理を証明するために「差集合の分解体」の概念を導入している。

<u>定義</u>　D を (v,k,λ) 差集合とする。n をわる素数 p の分解群を Z_p とする。$\bigcap_{p\mid n} Z_p$ を差集合 D の分解群とよび、それに対応する $Q(\zeta_v)/Q$ の中間体を D の分解体と呼ぶことにする。ただし、$Q(\zeta_v)$ は円周 v 等分体、ζ_v は 1 の原始 v 乗根(以後 ζ_m で 1 の原始 m 乗根を表すことにする)、Q を有理数体とする。

定理1, 2 における条件

$$p^{f} \equiv -1 \pmod{d} \text{ となる整数 } f \text{ が存在する}$$

は

$$\text{円周 } d \text{ 等分体で } p \text{ の分解体が実の代数体である}$$

ことに同値である。

このことと、山本の定理といわれる次の定理が証明の重要なポイントになっている。

<u>定理3 [18]</u>　$N = p_1^{\ell_1}\cdots p_s^{\ell_s}$ を N の素因数分解、m を N と互いに素な整数とする。$C(i)$ を $Z[\zeta_m]$, Z：有理整数環，に値をとる

周期 N の関数で、多項式 $f(x)$ を

$$f(x)=\sum_{i=0}^{N-1} C(i)x^i$$

で定義する。n' を N の約数、$\alpha\in Z[\zeta_n]$ とする。この仮定のもとで

$f(\zeta_N^r)\equiv 0 \pmod{\alpha}$ が n' のすべての約数 r について成立つ

$\Leftrightarrow$ $p_1^{t_1}\cdots p_s^{t_s}\Delta(Np_1^{-t_1-1})\cdots\Delta(Np_s^{-t_s-1})C(i)\equiv 0 \pmod{\alpha}$

　がすべての i と $p_1^{t_1}\cdots p_s^{t_s}\mid n'$ となるすべての $t_1,\cdots t_s$ について成立つ。

ただし $\Delta(p)$ は p を有理数とする差分演算子 $\Delta(p)=C(i+p)-C(i)$ である。

3 ところで、Turynは、アーベル群上の差集合について同じような定理を証明している。

<u>定理A</u> [Tu1]　アーベル群 G 上に (v,k,λ) 差集合が存在するとする。$m>1$ なる整数 m が $m^2\mid n$ であるとする。$\omega>1$ は v の約数で ω 次の巡回群を G が含むとする。m のすべての素因数 p について、$\omega=p^l\omega_1$, $(p,\omega_1)=1$ とするとき

$$p^f\equiv -1 \pmod{\omega_1}$$

となる整数 f が存在するとする。

(1)　$(m,\omega)=1$ ならば　　　$m\leqq \dfrac{v}{\omega}$

(2)　$(m,\omega)>1$ ならば　　　$m\leqq 2^{r-1}\dfrac{v}{\omega}$

ただし r は (m,ω) の相異なる素因数の数である。

定理Aで与えられているboundはTuryn boundと呼ばれているが本質的な部分は巡回群に関する定理2の結果であり、むしろYamamoto boundと呼ばれるべきである。このことについて少し詳しく述べたい。

定理2は巡回群上の差集合についての結果であるが
定理2の(1)では
「p^l d 次巡回群を v 次アーベル群 G が部分群としてもつ」
定理2の(2)では
「p^l 次巡回群を v 次アーベル群 G が部分群としてもつ」
という条件をつけてアーベル群 G 上の差集合に拡張される。

また、n をわる1素数 p についての bound であるが、n をわる相異なる素数 $p_1, \cdots, p_s$ についての bound に拡張できることを、山本先生は論文の中で定理としてではなく、本文に記述されている。すなわち、

(v, k, λ) 差集合が存在するとする。$d \neq 1$ を v の約数、$p_1, \cdots, p_s$ を $p_i \nmid d$ である相異なる素数で $p_i^{e_i} \| n$ とする $(i = 1, \cdots, s)$。p_i $(i = 1, \cdots, s)$ の $Q(\zeta_d)/Q$ における分解体が実であるとすれば(すなわち、$p_i^{f_i} \equiv -1 \pmod{d}$ となる整数 f_i が存在すれば)、

$$p_1^{\frac{e_1}{2}} \cdots p_s^{\frac{e_s}{2}} \leq \frac{v}{d}$$

をみたす。

この結果に上記の条件をつけてアーベル群に拡張し、Turyn

の定理Aの(1)を得る。

4 定理2の結果から定理Aの(2)が求まることを証明する。

(証明) $p_1,\cdots,p_s$ を n をわる相異なる素数、$d\neq 1$ を v の約数、$(p_i, d)=1$, $i=1,\cdots,s$, とする。さらに $p_i^{f_i}\equiv -1 \pmod{d}$ となる整数 f_i が存在するとする($i=1,\cdots,s$). $\omega = d p_1^{l_1}\cdots p_s^{l_s}$, $p_i^{l_i}\| v$, $p_i^{e_i}\| n$ とおく。円周 $p_1^{l_1}\cdots p_s^{l_s}$ 等分体では $p_1,\cdots,p_s$ は完全に分岐する。従って差集合Dの分解群は $Q(\zeta_{p_1^{l_1}\cdots p_s^{l_s}})/Q$ のガロア群 $\mathfrak{G}$ に等しい。円周 d 等分体での差集合Dの分解群 Z_D は、仮定から complex conjugation を含む。$Q(\zeta_\omega)/Q$ での分解群は $\mathfrak{G}$ と Z_D の直積で complex conjugation τ を含む。以上から $g(x)$ を差集合Dの生成多項式、$\mathfrak{P}_i$ を p_i をわる $Q(\zeta_\omega)$ の素イデアルとするとき、$g(\zeta_\omega)$ と $g(\zeta_\omega^\tau)$ の $\mathfrak{P}_i$- component は等しい。これより $\eta_\omega\neq 1$ なるすべての1の ω 乗根に対し

$$g(\eta_\omega)\equiv 0 \qquad \left(\mathrm{mod}\ p_1^{\frac{e_1}{2}}\cdots p_s^{\frac{e_s}{2}}\right)$$

が成りたつ。$k(v-k)\equiv 0 \ \left(\mathrm{mod}\ p_1^{\frac{e_1}{2}}\cdots p_s^{\frac{e_s}{2}}\right)$ であることから $\eta_\omega=1$ についても上が成りたつことがいえる。$d=q_1^{t_1}\cdots q_r^{t_r}$ を d の素因数分解とし、$dp_1\cdots p_s$ について定理3を使うと

$$q_1^{t_1}\cdots q_r^{t_r}\Delta(\omega q_1^{-t_1-1})\cdots\Delta(\omega q_r^{-t_r-1})\Delta(\omega p_1^{-1})\cdots\Delta(\omega p_s^{-1})C(i)\equiv 0 \quad \left(\mathrm{mod}\ p_1^{\frac{e_1}{2}}\cdots p_s^{\frac{e_s}{2}}\right)$$

を得る。$\Delta(\omega q_i^{-t_i-1})$, $i=1,\cdots,s$, は identity operator であるので、上の合同式は、

$$\Delta(\omega p_1^{-1})\cdots\Delta(\omega p_s^{-1})C(i)\equiv 0 \qquad \left(\mathrm{mod}\ p_1^{\frac{e_1}{2}}\cdots p_s^{\frac{e_s}{2}}\right)$$

になる．$\Delta(\omega p_1^{-1})\cdots\Delta(\omega p_s^{-1})\neq 0$ であることから

$$
\begin{aligned}
p_1^{\frac{e_1}{2}}\cdots p_s^{\frac{e_s}{2}} &\leqslant \Delta(\omega p_1^{-1})\cdots\Delta(\omega p_s^{-1})C(i)\\
&= C(i+\omega p_1^{-1}+\omega p_2^{-1}+\cdots+\omega p_s^{-1})-C(i+\omega p_1^{-1}+\cdots+\omega p_{s-1}^{-1})-\cdots\\
&\quad -C(i+\omega p_2^{-1}+\cdots+\omega p_s^{-1})-\cdots \qquad +(-1)^s C(i)\\
&\leqslant 2^{s-1}\frac{v}{\omega}=2^{s-1}\frac{v}{dp_1^{l_1}\cdots p_s^{l_s}}
\end{aligned}
$$

を得る．

「$\omega=dp_1^{l_1}\cdots p_s^{l_s}$ 次の巡回群を v 次アーベル群が部分群としてもつ」という条件を加えて，Turyn の定理 A の (2) が求まる．

5 以上の結果から次が言える．

<u>Remark</u> 非自明な差集合が存在すれば，差集合の分解体は実の代数体でない．

言い換えれば差集合の分解体は虚の代数体である．そこで分解体が虚二次体になる場合について論じ，差集合が存在する必要条件を，不定方程式の整数解の存在で与えた．論文[18]の定理 4, 5, 6 で $v=q^l$, $v=q^l r^m$, q, r は相異なる素数，であれば差集合は完全に分類される．これらは巡回群上の差集合についての結果であるがアーベル群上の差集合の結果に拡張できる．現在でも，これ以上の結果は得られていない．

こうして差集合の存在条件は，円周等分体の Hilbert 理論を用いて，円周等分体の構造に関係することが明瞭になり，わかり易い bound，あるいは不定方程式の整数解として記述さ

れるのである。見通しのよい理論であり、拡大次数がより大きい度の代数体における存在条件の可能性も暗示している。

6 $q=ef+1$ を素数とし、$F=GF(q)$ を q 個の元からなる有限体、g を $F^{\times}$ の生成元とする。e 乗剰余の cyclotomic class C_i は

$$C_i=\{g^{es+i},\ s=0,\cdots,f-1\}\quad(i=0,\cdots,e-1)$$

で定義される。C_0 は e 乗剰余の集合、C_i は互いに disjoint で $\bigcup_{i=0}^{e-1} C_i=F-\{0\}$ である。

e を与えたとき、C_0 が差集合になる必要十分条件は E. Lehmer [Le] によって証明された。E. Lehmer はこの証明に円分数を用いている。そこで、次はいくつかの cyclotomic class の合併集合 $S=\bigcup C_i$、または $S\cup\{0\}$ が差集合となる必要十分条件を求める問題を考えることになる。この問題については Hall [Hal]、Hayashi [Hay]、Baumert-Fredricksen [BaFr] 等の結果がある。いずれも e を与えて円分数を計算して求める方法を用いている。e を与えたとき円分数はいくつかのパラメータによって表示されるが、具体的にパラメータ表示されているのは $e\leq 20$, p 素数の場合である。従って e が大きくなればこの手法は使えない。山本先生[26]は、円分数をとり扱うことは Jacobi の和をとり扱うことと同じであることに注目し、Jacobi の和を使って $v=p$ 素数のときに上の問題を解決したのである。

差集合の生成多項式を $D(x)=\sum_{a\in D}x^{a}$ とする。1 の原始 p 乗根

ζ_p に対し

$$D(\zeta_p)D(\bar{\zeta}_p)=n$$

が成りたつことと、$\wp$ を円周 p 等分体 $Q(\zeta_p)$ の p をわる素イデアルとするとき

$$D(\zeta_p)D(\bar{\zeta}_p)\equiv n \qquad (\mathrm{mod}\ \wp^p)$$

が成りたつことは同値である。ζ_p^a を p 進円分体の素元 ϖ の級数展開の $p-1$ までの和の合同式

$$\zeta_p^a \equiv Exp(a\varpi) \equiv \sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{a^\nu}{\nu!}\varpi^\nu \qquad (\mathrm{mod}\ \wp^p)$$

で与える。ただし a は整数、ϖ は $\varpi^{p-1}=-p$、$\zeta_p\equiv 1+\varpi$ $(\mathrm{mod}\ \wp^2)$ となる $Q_p(\zeta_p)$ の元である。これを $D(\zeta_p)$ に代入して必要十分条件が求まる。

<u>定理4 [26]</u> $D(\zeta_p)D(\bar{\zeta}_p)\equiv n$ $(\mathrm{mod}\ \wp^p)$ となるための必要十分条件は

(1) $s(sf+2d-1)\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ e)$

(2) $\displaystyle\sum_{\mu=0}^{\nu}(-1)^\nu\binom{\nu f}{\mu f}K_\mu K_{\nu-\mu}\equiv 2deK_\nu \qquad (\mathrm{mod}\ p) \qquad (\nu=2,4,\cdots,e-2)$

である。ただし $\#B=s$, $K_\mu=\sum_{\beta\in B}\beta^\mu$, B は $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times=\mathbb{F}_p^\times$ の部分集合で、$\varepsilon: x\to x^f$ で $\varepsilon(\mathbb{F}_p^\times\cap D)=B$ となるもの。

一方、$Q(\zeta_e)$ の p をわる素イデアルを $\mathfrak{P}$ とすると Jacobi の和 $\pi(\chi^a,\chi^b)$, χ は既約 e 乗剰余指標、について

$$\pi(\chi^a,\chi^b)\equiv\binom{(a+b)f}{af} \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{P})$$

が成りたつことが知られているので、定理4の(2)式は

(3) $\displaystyle 2(s-de)K_\nu+\sum_{\mu=1}^{\nu-1}(-1)^\mu\pi(\chi^\mu,\chi^{\nu-\mu})K_\mu K_{\nu-\mu}\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{P})$

と変形される．

また $(\tau(\chi^a))$ が生成するイデアル群と $Y=\sum_{\substack{(t,e)=1 \\ 0 \bmod e}} \frac{1}{e}Z\sigma_{-t}^{-1}$，

$\sigma_t:\zeta_e\to\zeta_e^t$ は $Q(\zeta_e)$ の自己同型写像．の submodule との間に同型対応があり．Y の submodule の基底を求めることにより $(\pi(\chi^a,\chi^\beta))$ の生成するイデアル群の中に $\frac{\varphi(e)}{2}+1$（φ はオイラー関数）個の乗法的に独立なものを決定することができる．こうして (3) 式は $\frac{\varphi(e)}{2}+1$ 個の乗法的に独立な Jacobi の和について計算すればよいことがわかる．

定理 4 の (2), (3) 式は、p 進円分体の理論を使って合同式で必要十分条件が与えられているが、円周等分体から最大実部分体へのノルム、すなわち Hasse の half norm を使うと

<u>定理 5 [27]</u>　D または $D\cup\{0\}$ が差集合となる必要十分条件は．

$$\sum_{t=0}^{e-1}\bar{\pi}(\chi^s,\chi^t)K_t K_{s-t} = 2deK_s \qquad (s=2,4,\cdots,e-2)$$

で与えられる．

この式を $Q(\zeta_e)$ の素イデアル $\mathbf{P}$ についての合同式と考えれば乗法的に独立な Jacobi の和について計算すればよい．

Hadamard 行列について

1　q（素数巾）個の元からなる有限体 F の 2 次拡大体 K を 2 次ベクトル空間とみなし skew-symmetric なスカラー次形式 f と $q+1$ 個の一次独立なベクトル $\{x_0,\cdots,x_q\}$ から Paley 行列を

$$M=(\psi(f(x_i,x_j)))_{i,j=0,\cdots,q}$$

で定義する。ただしψはFの平方剰余指標とする。Mは$q\equiv 3 \pmod 4$のときPaley type 1 行列，$q\equiv 1 \pmod 4$のときPaley type 2 行列と呼ばれる。Paley type 1 行列から$q+1$次Hadamard行列，Paley type 2 行列から$2(q+1)$次Hadamard行列が構成されることはよく知られている。

$x_\infty=(1,0)$，$x_\alpha=(\alpha,1)$，$\alpha\in F$，$f(x,y)=\det(x,y)$とおけばMは

$$M=\begin{pmatrix} 0 & e \\ \psi(-1)e^t & M_0 \end{pmatrix}$$

の形としている。ただし$e=(1,1,\cdots,1)$。また$M_0=(\psi(\alpha-\beta))_{\alpha,\beta\in F}$は

(1) $$M_0M_0^t=qI-J$$

をみたす。ξを群環F^+Zの元とし，$\xi\to\xi+\alpha$の右正則表現行列をT_αとすると，M_0はF^+Zの元$\sum_{\alpha\in F}\psi(\alpha)\alpha$の正則表現行列

$$M_0=\sum_{\alpha\in F}\psi(\alpha)T_\alpha$$

となる。θをFの加法的指標とし，$\tau(\psi,\theta)=\sum_{\alpha\in F}\psi(\alpha)\theta(\alpha)$とおくと$\tau(\psi,\theta)$は$F$のGaussの和で(1)式が成りたつことと

$$\tau(\psi,\theta)\overline{\tau(\psi,\theta)}=\begin{cases} q & \theta\text{が単位指標のとき} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

は同値である。

Paley行列と有限体のGaussの和の関係が明白になったのは，この論文[32]が最初である。

双一次形式 f を K/F の相対スプールを使って与え、K の一次独立なベクトルとして $K^\times/F^\times$ の coset の代表元をとると M はいくつかの小行列に分割された形をもつことがわかる。

<u>例1</u> $q \equiv 1 \pmod 4$ Paley type 2 行列のとき

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}, \quad A, B \text{ は対称巡回行列}$$

<u>例2</u> $q \equiv 3 \pmod 4$ のとき

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C & C^t \\ -B & A & C^t & -C \\ -C^t & -C & -A & B \\ -C & C^t & -B & -A \end{pmatrix}$$

A, B, C, D は巡回行列、A は交代行列、B は対称行列。さらにこれから得られる Hadamard 行列は Goethals-Seidel 型にも変形できることも示した。

2 Williamson 型 Hadamard 行列の無限系列は長く発見されなかったが、1972年に Turyn [Tu2] は初めて無限系列を発見した。それは Paley type 2 行列を変形して Williamson 型 Hadamard 行列に結びつけたものである。Whiteman [Wh] は有限体の2次拡大に関連することに注目し Turyn とは独立に Williamson 型 Hadamard 行列になることを証明した。

論文[33]では Turyn の発見した Williamson 型 Hadamard 行列を与える Williamson 等式は 有限体 $GF(q^2)$ の指標（$\chi = \chi_4 \cdot \chi_n$, $\chi_4(g) = \zeta_4$

$\chi_n(g)=\zeta_n$, $n=\frac{1}{2}(q+1)$, g は $GF(q^2)^\times$ の生成元、ζ_4 は 1 の原始4乗根、ζ_n は任意の 1 の n 乗根）に付随する相対的 Gauss の和のノルム関係式に他ならないことを示した。Davenport-Hasse の定理から、この相対的 Gauss の和 ϑ_χ は $\vartheta_\chi^2=\pi(\chi,\chi^q)$ をみたすことも示された。

相対的 Gauss の和の概念は、この論文[33]で初めて導入されたが次で定義される。

<u>定義</u>　q：素数巾、$F=GF(q)$、$K=GF(q^t)$：F の t 次拡大、$t\geqq 2$、χ を単位指標でない K の指標とする。K 上の Gauss の和 $\tau_K(\chi)$ と χ を F に制限して得られる F 上の Gauss の和 $\tau_F(\chi)$ の比

$$\vartheta_\chi=\frac{\tau_K(\chi)}{\tau_F(\chi)}$$

を χ に付随する相対的 Gauss の和という。

q の値によって Paley 行列の形が具体的に求まったことと、有限体の指標に付随する相対的 Gauss の和の概念が、一般四元数型 Hadamard 行列の導入に結びつく。一般四元数型 Hadamard 行列からみると、Paley type 1 行列は特別な一般四元数型に Seidel 同値であり、Turyn の示した Williamson 型も一般四元数型 Hadamard 行列の無限系列の一つとして位置づけられる。

3 論文[35]では $Z/4Z$ の拡大環上に、ある条件のもとで差集合の存在する必要十分条件を求めている。Liebler - Mena[LiMe]は $Z/4Z$ の拡大環に内周 4 の distance-regular digraph が存在するこ

とを示したが、その後、この環には amorphous association scheme [IrMuYa] や partially balanced incomplete block design (PBIBD)[Ya] が存在することも証明され、論文[35]はこの一連の結果の一つとして位置づけられる。

論文[35]でははっきり記述されていないが $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ の拡大環上の Gauss の和が重要な役割を果している。distance-regular digraph、差集合、amorphous association scheme, PBIBD が互いに関連していることは、環上の Gauss の和、Jacobi の和を定義することにより初めて明瞭になる。

山本先生の差集合、Hadamard 行列の研究は、整数論特に Gauss の和、Jacobi の和を用いて問題を解決するところに特徴がある。Journal of Combinatorial Theory の発刊された 1966年頃は日本では組合せ数学の研究者は非常に少なかった。差集合の論文[18][26][27]が出版されたのはその頃である。論文[18], [26], [27]の定理の中には、30年近く経った今日でもそれより進んだ結果が得られていないものがある。離散的対象である差集合に整数論は重要な手法であることを非常に早い時期から指摘していたわけで、その鋭い直観と洞察力、見通しの良さに驚かされる。しかし、そのことが逆に、なかなか理解されず今日でもそれ以上の結果が得られていないものがあることの

理由の一つであると思われる。

論文を熟読すると、今後なすべき問題が明らかになってくる。そのいくつかを挙げてみたい。

一つは、差集合の分解体が虚の代数体で拡大次数が2より大きい場合の差集合の存在する必要条件を求めることである。論文[18]の中で、$2 \leqq n \leqq 50$, $k(v-k)=n(v-1)$をみたす373個のv, nのうち42個は分解体の拡大次数は2より大きいことが示されている。

次は有限体の相対的Gaussの和の研究とその応用を考えることである。相対的Gaussの和はあまり注目されていないが、Gaussの和、Jacobiの和が差集合、Hadamard行列、association schemeの研究の中で様々な形で論じられていることを考えれば、さらに研究することが必要と思われる。

最後に、Gaussの和、Jacobiの和の概念の拡張とその応用を探ることである。論文[35]では$Z/4Z$の拡大環へのGaussの和、Jacobiの和の概念の拡張が問題解決に大きな役割を果している。組合せ数学の対象をとり扱うことを目的として、いろいろな代数構造でGaussの和、Jacobiの和の概念の拡張を試みることが必要であろう。こうした研究はまだほとんどなされていない。

山本先生は差集合、Hadamard行列の他にラテン方陣に関しても非常に優れた業績を残されている。本来ならば、ラテン

方陣の業績について先に述べることが順当であるが、これについては別の機会にしたい。

参考文献

[BaFr] L. D. Baumert and H. Fredricksen, The cyclotomic numbers of order 18 with applications to difference sets, Math. Comp. 21 (1967), 204-219.

[Hall] M. Hall Jr., A survey of difference sets, Pro. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 975-986.

[Hay] H. S. Hayashi, Computer investigation of difference sets, Math. Comp. 19 (1965), 73-78.

[ItMuYa] T. Ito, A. Munemasa and M. Yamada, Amorphous association schemes over the Galois rings of characteristic 4, European J. Combin. 12 (1991), 513-526.

[La] E. S. Lander, Symmetric designs: An algebraic approach, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1983.

[Le] E. Lehmer, On residue difference sets, Canad. J. Math. 5 (1953), 425-432.

[LiMe] R. A. Liebler and R. A. Mena, Certain distance-regular digraphs and related rings of characteristic 4, J. Combin. Th. A 47 (1988), 111-123.

[Ma] H. B. Mann, Balanced incomplete block designs and

Abelian difference sets, Illinois Jour. Math. 8 (1964), 252-261.

[Tu1] R. J. Turyn, Character sums and difference sets, Pacific Jour. Math. 15 (1965), 319-346.

[Tu2] R. J. Turyn, An infinite class of Williamson matrices, J. Combin. Th. A 14 (1972), 319-321.

[Wh] A. L. Whiteman, An infinite family of Hadamard matrices of Williamson type, J. Combin. Th. A 14 (1973), 334-340

[Ya] M. Yamada, Generalized relative difference sets and PBIBDs associated with amorphous association schemes over an extension ring of Z/4Z, Australasian J. Combin. 5 (1992), 21-42.

山本幸一先生論文リスト

1. An asymptotic series for the number of three-line Latin rectangles. J. Math. Soc. Japan 1(1950), 226-241.

2. Note on enumeration of 7 x 7 Latin squares, Bull. Math. Statist. 5 (1952), 1-8.

3. On the asymptotic number of Latin rectangles, Jap. J. Math. 21 (1951), (1952), 113-119.

4. Symbolic methods in the problem of three-line Latin rectangles, J. Math. Soc. Japan 5 (1953), 13-23.

5. Note on the order of free distributive lattices, Sci. Rep. Kanazawa Univ. 2(1953), 5-6.

6. Logarithmic order of free distributive lattice, J. Math. Soc. Japan 6(1954), 343-353.

7. Euler squares and incomplete Euler squares of even degrees, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 8(1954), 161-180.

8. Theory of arithmetic linear transformations and its application to an elementary proof of Dirichlet's theorem, J. Math. Soc. Japan 7 (1955), 424-434.

9. Theory of arithmetic linear transformations and its application to an elementary proof of Dirichlet's theorem about the primes in an arithmetic progression, Proceedings of the international symposium on algebraic number theory, Tokyo & Nikko, 1955, pp. 266-267. Science Council of Japan, Tokyo, 1956. 18-719.

10. Structure polynomial of Latin rectangles and its application to a combinatorial problem, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 10(1956), 1-13.

11. Arithmetic linear transformations in an algebraic number field, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 10(1956), 41-66.

12. Isomorphism theorem in the local class field theory, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 12(1958), 67-103.

13. Some properties of characters of the symmetric group, (with T. Kodama), Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 12(1958), 104-112.

14. On the Kummer-Hilbert reciprocity law, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 13(1959), 85-95.

15. The Artin-Hasse-Šafarevič function, Japan. J. Math. 29(1960), 165-172.

16. Generation principles of Latin squares, Proc. 32ndsec. ISI, (1960), 73-76.

17. ラテン方陣について，数学，12(1960), 61-79.

18. Decompositon field of difference sets, Pacif. J. Math. 13(1963), 337-372.

19. On a conjecture of Erdös, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 19(1965), 37-47.

20. On the Diophantine equation $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 14(1965), 37-47.

21. A necessary condition for the existence of partially balanced incomplete block designs with an m-subset association scheme, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 14(1965), 76-98.

22. On an orthogonal basis of the eigenspaces associated with partially balanced incomplete block designs of a Latin square type association scheme, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 14(1965), 99-104.

23. On Gaussian sums with biquadratic residue characters, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 219(1965). 200-213.

24. On a conjecture of Hasse concerning multiplicative relations of Gaussian sums, Journal of combinatorial theory 1(1966), 476-489.

25. On canonical bases of ideals, (with Henry B. Mann) Journal of combinatorial theory 2(1967), 71-76.

26. On Jacobi sums and difference sets, Journal of combinatorial theory 3(1967), 146-181.

27. On the application of half-norms to cyclic difference sets, Proc. Conf. held at Univ. N. C., (1969), 247-255.

28. On the number of Latin rectangles, SC. Rep. Tokyo Woman's Chr. Coll. 8(1968), 86-97

29. The gap group of multiplicative relationships of Gaussian sums, ISTITUTO NAZIONALE DI ALTA MATEMATICA, SYMPOSIA MATHEMATICA 15(1975), 427-440.

30. On Kronecker's theorem about abelian extensions, (with Mieko ONUKI) Sci. Reports of Tokyo Woman's Christian College, Nos. 35-38, Mar. (1976), 415-418.

31. An explicit formula of the norm residue symbol in a local number field, Sci. Reports of Tokyo Woman's Christian College, (1973), 302-334.

32. On a generalized Williamson equation, COLLOQUIA MATHEMATICA SOCIETATIS JANOS BOLYAI. 37. FINITE AND INFINITE SETS, EGER (HUNGARY), 1981.

33. Williamson Hadamard matrices and Gauss sums, (with Mieko YAMADA) J. Math. Soc. Japan 37(1985), 839-850.

34. On congruences arising from relative Gauss sums, NUMBER THEORY AND COMBINATORICS (1985), 423-446.

35. Difference sets over an extension of Z/4Z, (with Mieko YAMADA) Utilitas Math. 34(1988), 169-178.

著 書

1. 順列・組合せと確率, 岩波書店, 1983.

2. 組合せ数学, 朝倉書店, 1989.