近傍的多面体の組合せ型の列挙とその周辺

宮田 洋行
東北大学大学院情報科学研究科
hmiyata@dais.is.tohoku.ac.jp

概 要

多面体は古くから研究されてきた対象であり、現在も可換代数をはじめ、多くの数学分野と関わりながら活発に研究されている。特に、多面体の面の数は、多面体の組合せ的複雑さを表す指標として多くの研究がなされてきた。(単体的) 近傍的多面体は、次元・頂点数が同じ多面体の中で各次元の面数を最大化する多面体であり、多面体の面の数の研究で大きな役割を果たしている。一見、近傍的多面体は非常に特殊な対象であるように思われるが、実は近傍的多面体の組合せ型の数が多面体全体の組合せ型の数と漸近的にそれほど差がないなど、豊富なクラスであることを示す結果や予想が多く知られ、大変興味深い多面体クラスである。本稿では、近傍的多面体に関する研究背景・諸結果について紹介し、さらに近年の著者の結果の紹介を行う。

1 背景

1.1 多面体と近傍的多面体

ユークリッド空間の有限個の点の凸包として表現されるような集合を (凸) 多面体という。多面体は非常に古くから研究されてきたが、計算機科学 (線形計画問題等との関連) や Stanley によって始められた可換代数的手法の発展などにより、近年も非常に活発に研究が行われている。本稿では、特に面の数に関し顕著な性質を持ち、さまざまな豊かな結果が知られる近傍的多面体について、近年の著者の結果も含め、周辺を紹介する。

$A \subset \mathbb{R}^d$ に対し、$\mathrm{conv}(A)$ を A の凸包とする。多面体を以下のように定義する。

定義 1.1 ある $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$ が存在し、

$$P = \mathrm{conv}(\{v_1, \dots, v_n\})(= \{a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \mid a_1 + \cdots + a_n = 1, a_1, \dots, a_n \geq 0\})$$

と表せる集合 $P \subset \mathbb{R}^d$ を (凸) 多面体と呼ぶ。

多面体を有限個の半空間の共通部分として定義することも可能である。超平面 $H := \{x \in \mathbb{R}^d \mid a \cdot x = b\}$ によって定義される開半空間 H^+, H^- を $H^+ := \{x \in \mathbb{R}^d \mid a \cdot x > b\}$、$H^- := \{x \in \mathbb{R}^d \mid a \cdot x < b\}$ で定める (どちらが H^+, H^- になるかは超平面の表現 $a \cdot x = b$ に依存することに注意する)。また、$\overline{H^+} := \{x \in \mathbb{R}^d \mid a \cdot x \geq b\}$、$\overline{H^-} := \{x \in \mathbb{R}^d \mid a \cdot x \leq b\}$ とする。

定義 1.2 $\mathbb{R}^d$ の超平面 $H_1, \dots, H_m$ を用いて、$P = \bigcap_{i=1}^m \overline{H_i^+}$ と書けるような有界集合 P を多面体と呼ぶ。

上記 2 つの定義の同値性は Minkowski-Weyl の定理として知られる。多面体 P の次元を P のアフィン包の次元で定義する。さて、以下のように多面体の面を定義する。

定義 1.3 $P \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元多面体とする。
　このとき、$\overline{H^+} \supset P$ なる超平面 H を用いて、$F = H \cap P$ と表せる集合 F を P の面と呼ぶ。

面 F の次元を F のアフィン包の次元で定義する。0 次元面を特に頂点と呼び、$d-1$ 次元面をファセットと呼ぶ。P 自身は d 次元面である。また、空集合を -1 次元面と考えることにする。以後、P の i 次元面の数を $f_i(P)$ で表す。$f(P) := (f_0(P), \ldots, f_{d-1}(P))$ を P の f-vector と呼ぶ。以下で定義される面束は、f-vector や多面体グラフ等を含め、面同士の接続関係の情報を全て保持する構造として広く研究されている。

定義 1.4 多面体 P の全ての面からなる集合に関し、包含関係で順序を定義して得られる半順序集合は束になる。それを面束とよび、$F(P)$ で表す。$F(P)$ の同型類を P の組合せ型と呼ぶ。

多面体 P, Q が同じ組合せ型を持つとき、P と Q は組合せ同値であるという。P の頂点の集合を $\mathrm{vert}(P)$ で表すことにする。本稿では、以後、同じ頂点の数・次元を持つ多面体の中で i 次元面の数を最大にする多面体を考えていく。任意の多面体に対し、頂点に摂動を加えることにより、面の数を減らさずに全てのファセットを単体と組合せ同値にできるため、そのような多面体のみを考える。

定義 1.5 d 次元多面体 P の任意のファセットが $(d-1)$ 次元単体に組合せ同値であるとき、P を単体的多面体と呼ぶ。

　巡回多面体と呼ばれる多面体が頂点数・次元が同じ多面体の中で最も多くの面を持つ多面体の一つとして知られる。

定義 1.6 d 次モーメント曲線 $m_d(t) = (t, t^2, \ldots, t^d) \subset \mathbb{R}^d$ 上の有限個の点の凸包として定義される多面体を巡回多面体と呼ぶ。巡回多面体の組合せ型は頂点数と次元ごとに一意であることが知られ、頂点数 n の d 次元巡回多面体の組合せ型を $C_{d,n}$ で表す。

定理 1.7 （上限定理）P を頂点数 n の d 次元多面体とする。このとき、任意の $i = 1, \ldots, d-1$ について、

$$f_i(P) \leq f_i(C_{d,n})$$

が成立する。ただし、$i \leq \lfloor d/2 \rfloor$ で不等式を等号で満たすのは、P が i-近傍的な場合かつそのときに限る。

多面体 P が i-近傍的とは、任意の i 組の P の頂点が P の $i-1$ 次元面をなすことである。i-近傍性は単調な性質である。すなわち、$(i+1)$-近傍的ならば、i-近傍的である。$j > \lfloor d/2 \rfloor$ については、j-近傍的な d 次元多面体は単体と同じ組合せ型を持つものに限られるため、意味をなさない概念となる。$\lfloor d/2 \rfloor$-近傍性は最も強力な非自明な近傍性であり、$\lfloor d/2 \rfloor$-近傍的な多面体は単に**近傍的多面体**と呼ばれる。近傍的な単体的多面体は上限定理の不等号を全ての $1 \leq i \leq d-1$ で等号として達成する多面体として実は特徴づけられる。
　上限定理は Motzkin [24] により予想され、McMullen [21] により証明された。Motzkin は、さらに、偶数次元近傍的多面体は常に巡回多面体と同じ組合せ型を持つと予想した。頂点数が $d+3$ の場合にはこの予想が正しいことが Gale [15] により示された。しかし、Grünbaum, Sreedharan [17] は 1967 年に頂点数 8 の 4 次元単体的多面体の組合せ型の分類を行い、37 個中 3 個が近傍的多面体であり、そのうち 2 個は巡回多面体とは異なる組合せ型をもつことを明らかにした。さらに、1981 年に Barnette [5]、1982 年に Shemer [28]、2013 年に Padrol [26] によって、多くの近傍的多面体を構成する手法が提案され、現在では以下が知られる。

定理 1.8 ([26]) $nb(n,d)$ を頂点数 n の d 次元近傍的多面体の面束の数とする。そのとき、

$$nb(n,d) > \left(\frac{n-1}{e^{3/2}}\right)^{\frac{1}{2}d(n-d-1)}$$

頂点数 n の d 次元多面体の面束の数を $c(n,d)$ とすると、$\frac{n}{d} \to \infty$ のとき、$c(n,d) \leq \left(\frac{n}{d}\right)^{d^2 n(1+o(1))}$ であることが知られており [2, 16]、それと比較して $nb(n,d)$ は決して小さくないことがわかる。その他、ユークリッド空間の点をランダムにいくつか (次元に対して線形個程度) 選び、その凸包をとると、その多面体は高い確率で近傍的になることも知られる [11]。また、多面体についてよく知られる普遍性定理が近傍的多面体についても同様に成立する。

定理 1.9 (近傍的多面体の普遍性定理 [1])
任意の原始的な基本半代数的集合に対し、それと安定同値 (特に、ホモトピー同値) な実現空間を持つ近傍的多面体が存在する。また、近傍的多面体の面束の認識問題は、原始的な基本半代数的集合の非空判定問題と多項式時間等価である。

普遍性定理は近傍的多面体の面束のよい特徴づけがほとんど期待できないことを示している。多面体の普遍性定理は、1988 年に Mnëv [23] によって示されたが、上記定理は近傍的多面体に限定しても面束が複雑な振る舞いをすること示すものである。詳細については、[1] を参照していただきたい。

1.2 近傍的多面体と有向マトロイド

多面体の組合せ的性質の多くははは有向マトロイドの枠組みで論ずることが可能であり、またそれが適切である場合も多い。ここでは、多面体の有向マトロイド的抽象化である有向マトロイド多面体を導入し、近傍的多面体について論ずる。有向マトロイドについての詳細は、[6] 等を参照していただきたい。

$P := \{p_1, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{R}^d$ とする。そのとき、

$$\mathcal{V}_P^* := \{(\mathrm{sign}(a \cdot p_1 - b), \ldots, \mathrm{sign}(a \cdot p_n - b)) \mid a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}\}$$

と定める。$\mathcal{V}_P^*$ の要素は、超平面 $a \cdot x = b$ に対し、「上側」にある点には +、「下側」にある点には −、超平面上にある点には 0 を割り当てたベクトルであり、$\mathcal{V}_P^*$ は点集合 P の超平面による可能な分割を集めた集合とみなせる。一般に $\{+,-,0\}^E$ の要素を E 上の符号ベクトルと呼び、$X \in \{+,-,0\}^E$ に対し、$X^+ := \{e \in E \mid X_e = +\}$ と定める。X^-, X^0 についても同様である。$\mathcal{M}_P = ([n], \mathcal{V}^*)$ を P に付随する有向マトロイドと呼び、$\mathcal{V}_P^*$ の要素をコベクトルと呼ぶ (ただし、$[n]$ は集合 $\{1, \ldots, n\}$ を表す)。$\mathcal{V}_P^*$ の性質を以下のように抽象化して有向マトロイドが定義される。ただし、以下では、$X, Y \in \{+,-,0\}^E$ に対し、$X \circ Y \in \{+,-,0\}^E$ を

$$(X \circ Y)_e := \begin{cases} X_e & X_e \neq 0 \text{ のとき} \\ Y_e & \text{それ以外の時} \end{cases}$$

で定め、

$$S(X,Y) := \{e \in E \mid X_e = -Y_e (\neq 0)\}$$

とする。

定義 1.10 E を有限集合とする。$\mathcal{V}^* \subset \{+,-,0\}^E$ が以下の公理を満たすとき、$(E, \mathcal{V}^*)$ を有向マトロイドと呼ぶ。$\mathcal{V}^*$ の要素をコベクトルと呼ぶ。

(V1) $0 \in \mathcal{V}^*$

(V2) $X \in \mathcal{V}^*$ ならば、$-X \in \mathcal{V}^*$

(V3) $X, Y \in \mathcal{V}^*$ ならば、$X \circ Y \in \mathcal{V}^*$

(V4) $X, Y \in \mathcal{V}^*, e \in S(X, Y)$ ならば、$Z_e = 0$ かつ全ての $f \in E \setminus S(X, Y)$ で $Z_f = (X \circ Y)_f$ を満たす $Z \in \mathcal{V}^*$ が存在する。

特に点配置に付随する有向マトロイドには、全ての要素が $+$ であるようなコベクトルが存在する。全ての要素が $+$ のコベクトルが存在する有向マトロイドを非巡回な有向マトロイドという。非巡回な有向マトロイド $\mathcal{M} = (E, \mathcal{V}^*)$ に対し、$\mathcal{M} = \mathcal{M}_P$ なる点集合 $P = \{p_e \mid e \in E\}$ が存在するとき、$\mathcal{M}$ を**実現可能**であるといい、存在しないとき、**実現不可能**であるという。

点集合 $P = \{p_1, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{R}^d$ が凸な配置であるかどうかは、付随する有向マトロイド $\mathcal{M}_P = (E, \mathcal{V}_P^*)$ から読み取ることができる。

$$
\begin{aligned}
&\text{全ての } i = 1, \ldots, n \text{ で、} p_i \text{ が } P \text{ の端点} \\
\Leftrightarrow\ &\text{全ての } i = 1, \ldots, n \text{ で、} \overline{H^+} \supset P \text{ かつ } H \cap P = \{p_i\} \text{ なる超平面 } H \text{ が存在} \\
\Leftrightarrow\ &\text{全ての } i = 1, \ldots, n \text{ で、} X^0 = \{i\}, X^+ = [n] \setminus \{i\} \text{ なるコベクトル } X \in \mathcal{V}_P^* \text{ が存在}
\end{aligned}
$$

これを抽象化して、有向マトロイド多面体が定義される。

定義 1.11 非巡回な有向マトロイド $\mathcal{M} = (E, \mathcal{V}^*)$ が、全ての $e \in E$ について、$X_e^0 = \{e\}, X_e^+ = E \setminus \{e\}$ なるコベクトル $X_e \in \mathcal{V}^*$ を持つとき、$\mathcal{M}$ を**有向マトロイド多面体**と呼ぶ。

P が凸な位置にあるとき、$\mathrm{conv}(P)$ の面の情報も以下のように付随する有向マトロイド $([n], \mathcal{V}_P^*)$ から読み取ることができる。$F \subset P$ に対して、

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{conv}(F) \text{ が } \mathrm{conv}(P) \text{ の面} \\
\Leftrightarrow\ &\overline{H^+} \supset \mathrm{conv}(P) \text{ かつ } H \cap \mathrm{conv}(P) = \mathrm{conv}(F) \text{ なる超平面 } H \text{ が存在} \\
\Leftrightarrow\ &X_F^0 = F, X_F^+ = E \setminus F \text{ なるコベクトル } X_F \in \mathcal{V}_P^* \text{ が存在}
\end{aligned}
$$

これを抽象化して、有向マトロイド多面体に対して、以下のように面が定義される。

定義 1.12 $\mathcal{M} = (E, \mathcal{V}^*)$ を有向マトロイド多面体とする。$F \subset E$ に対し、$\mathcal{M}$ が $X_F^0 = F, X_F^+ = E \setminus F$ なるコベクトル X_F を持つとき、F を $\mathcal{M}$ の**面**と呼ぶ。$\mathcal{M}$ の面全体に包含関係を入れてできる半順序集合を $\mathcal{M}$ の**面束 (Las Vergnas 束)** と呼び、$F(\mathcal{M})$ と書く。$\mathcal{M}$ の面束の同型類を $\mathcal{M}$ の**組合せ型**と呼ぶ。

$\mathcal{M}$ が実現可能である時、$F(\mathcal{M})$ は多面体の面束になっていることに注意する。有向マトロイド多面体 $\mathcal{M}$ の最大長の面鎖 $\emptyset \subsetneq F_0 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{d-1} \subsetneq E$ に対し、d を $\mathcal{M}$ の次元という。なお、d 次元近傍的有向マトロイド多面体の面束は、常に $(d-1)$ 次元 PL 球面の面束となることが知られる。多面体の時と同様、$\mathcal{M}$ が i-近傍的であることは、任意の i 個の頂点が $(i-1)$ 次元面を成していることで定義され、$\lfloor d/2 \rfloor$-近傍なことを単に**近傍的**という。有向マトロイド多面体についても同様に上限定理が成り立ち (球面の上限定理を使わない証明が知られる [20])、等号成立条件も同様に近傍性で特徴づけられる。

近傍性は有向マトロイドの双対の概念を用いることで次のように特徴づけることもできる。

定理 1.13 ([15, 29])
有向マトロイド $\mathcal{M} = (E, \mathcal{V}^*)$ が k-近傍的
$\Leftrightarrow$ 双対有向マトロイド $\mathcal{M}^* = (E, \mathcal{V})$ の任意のコベクトル $X \in \mathcal{V}$ に対し、$|X^+|, |X^-| \geq k+1$

($(k+1)$-均衡性)

実は、双対有向マトロイド $\mathcal{M}^*$ のコベクトルの 1-均衡性は $\mathcal{M}$ の非巡回性、2-均衡性は凸性に対応している。

ここで、近傍的多面体の振舞いは偶数次元の場合と奇数次元の場合で大きく異なることを注意しておく。偶数次元近傍的多面体は必ず単体的であるが、奇数次元の場合は単体的でない近傍的多面体が存在する。また、偶数次元近傍的多面体は、剛性と呼ばれる顕著な性質を持つ。

定義 1.14 有向マトロイド多面体 $\mathcal{M}$ が $F(\mathcal{M}) = F(\mathcal{N}) \Rightarrow \mathcal{M} = \mathcal{N}$ なる面束 $F(\mathcal{M})$ を持つとき、$\mathcal{M}$ を剛的という。

なお、多面体が剛的であることは、付随する有向マトロイド多面体の剛性で定義される。

定理 1.15 ([28]) 偶数次元近傍的有向マトロイド多面体は剛的である。

近傍的多面体の構成においても、実は、有向マトロイド理論における構成法が有用である。Padrol [26] は、Shemer [28] の sewing と呼ばれる近傍的多面体の構成法が、実は、有向マトロイドの lexicographic extension と呼ばれる構成法として比較的単純にとらえられることを示している。さらに、Padrol [26] は Gale sewing と呼ばれる双対有向マトロイドの lexicographic extension に基づいた新たな構成法を提案し、近傍的多面体の組合せ型の数の下界を更新している。

2 近傍的多面体の組合せ型の列挙

本節では、近傍的多面体の組合せ型の列挙について、近年著者が Arnau Padrol 氏と行った研究 [22] で得た結果を含め、周辺の研究進展状況について紹介する。以降扱う問題を正確に記述すると以下のようになる。

問題 2.1 与えられた $d, n \in \mathbb{N}$ について、頂点数 n の d 次元単体的近傍的多面体の組合せ型を列挙せよ。

より大きな d, n について列挙を行うことで、近傍的多面体に関してさまざまな計算機実験 (予想の検証・特徴的な例の発見等) を行うことが可能になる。以降、より大きな d, n についての組合せ型列挙の試みの歴史・進展について紹介する。

2.1 近傍的多面体の組合せ型の列挙へのアプローチ

ある対象を列挙しようとするとき、その対象のよい特徴づけが必要である。しかし、(近傍的) 多面体の普遍性定理より、(近傍的) 多面体の組合せ型のよい特徴づけはほとんど期待できない。そのため、(近傍的) 多面体の組合せ型の列挙は、2 段階に分けて行うことが多い。

1. (近傍的) 有向マトロイド多面体を列挙する。

2. (近傍的) 有向マトロイド多面体を実現可能なものと実現不可能なものに分類する (**実現可能性問題**)。

有向マトロイドは単純な公理系で特徴づけられ、効率の良い列挙アルゴリズム [7, 13] も知られる。実現可能性問題は、原始的な基本半代数的集合の非空判定と同程度に難しい問題であるが、それほど大きくない問題サイズについては、十分条件から実現可能・実現不可能を決定していくアプローチが非常に大きな成功を収めている。詳細は、[14] およびその参考文献を参照していただきたい。

2.2 近傍的多面体の組合せ型の列挙の歴史と進展

近傍的多面体の組合せ型の列挙の研究は Grünbaum, Sreedharan による頂点数 8 の 4 次元単体的多面体の分類 [17] から始まった。その後、頂点数 9 の 4 次元近傍的多面体の分類 [3]、頂点数 10 の 6 次元近傍的多面体の分類 [9]、頂点数 10 の 4 次元近傍的多面体の分類 [10]、頂点数 9 の 5 次元近傍的単体的多面体の分類 [12, 14] と徐々により大きな列挙が達成された。また、頂点数 11 の 4 次元近傍的有向マトロイド多面体が [27] において達成されている。そして、近年、頂点数 12 の 8 次元近傍的多面体、$(n, d) = (12, 4), (10, 5), (11, 6), (11, 7), (12, 8)$ の場合の頂点数 n の d 次元近傍的単体的有向マトロイド多面体の列挙がなされた [22]。以下の表 1・2 は、現在の列挙の進展状況をまとめたものである。列挙アルゴリズムの詳細については、[22] を参照していただきたい。

	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8	n = 9	n = 10	n = 11	n = 12
d = 4	1 (1)	1 (1)	1 (1)	3 (3)	23 (23)	432 (432)	13 937 (13 937)	556 144 (556 144)
d = 5		1 (1)	1 (1)	2 (2)	10 825 (126)	不明 (159 750)	不明 (不明)	不明 (不明)
d = 6			1 (1)	1 (1)	1 (1)	37 (37)	42 910 (42 910)	不明 (不明)
d = 7				1 (1)	1 (1)	4 (4)	不明 (35 993)	不明 (不明)
d = 8					1 (1)	1 (1)	1 (1)	2 592 (2 592)

表 1: 要素数 n・次元 d の一様な近傍的有向マトロイド多面体の同型類の数 (括弧の中の数字は組合せ型の数)

	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8	n = 9	n = 10	n = 11	n = 12
d = 4	1	1	1	3	23	431	$\geq$ 3 614 $\leq$ 13 935	$\leq$ 556 144
d = 5		1	1	2	126	$\geq$ 8 231 $\leq$ 159 750	不明	不明
d = 6			1	1	1	37	$\geq$ 11 165 $\leq$ 42 099	不明
d = 7				1	1	4	$\geq$ 35 930 $\leq$ 35 993	不明
d = 8					1	1	1	2 586

表 2: 頂点数 n の d 次元単体的近傍的多面体の組合せ型の数

なお、上記表の範囲のデータは全て以下の Web ページで公開されている。

`https://sites.google.com/site/hmiyata1984/neighborly_polytopes`

3　計算機実験

前節で紹介した近傍的 (有向マトロイド) 多面体の列挙結果を用いることで、多数の近傍的多面体に関する計算機実験を行うことができる。ここでは、[22] で行った計算機実験をいくつか紹介する。頂点推移性に関する結果は本稿で初めて紹介する結果である。

3.1　Perles 予想の周辺

近傍的多面体に関する予想で最もよく知られる予想の一つが Perles 予想である。これは、大雑把にいうと、任意の単体的多面体に対し、それを部分構造として持つような偶数次元近傍的多面体が存在するという予想である。予想を正確に述べるためにいくつか定義を行う。

定義 3.1 多面体 P とその頂点 v に対し、$H^+ \cap \mathrm{vert}(P) = \{v\}$、$H^- \cap \mathrm{vert}(P) = \mathrm{vert}(P) \setminus \{v\}$ なる超平面 H を考える。このとき、$P \cap H$ を P の v における頂点図形と呼ぶ。

P の v における頂点図形の面束は、面束 $F(P)$ の $\{F \in F(P) \mid v \subset F\}$ への制限として記述できる。P の頂点図形の繰り返しとして得られる多面体を P の商と呼ぶ。なお、有向マトロイド多面体についても同様に頂点図形が定義され、有向マトロイド多面体 $\mathcal{M}$ の頂点 v における頂点図形は $\mathcal{M}$ の v による縮約 $\mathcal{M}/v$ に対応している。以下の予想は Perles 予想と呼ばれ、[29] で初めて言及されたものである。

予想 3.2 (Perles 予想)
任意の単体的 (有向マトロイド) 多面体 P について、P を商としてもつような偶数次元近傍的 (有向マトロイド) 多面体が存在する。

この予想は P の頂点数が $d+4$ (d は P の次元) 以下である場合にはすでに証明されている [19] が、P の頂点数が $d+5$ 以上の場合については全くの未解決である。また、いくつか予想の変種が見られる [3, 9] が、いずれも未解決である。

3.1.1　Kortenkamp の定理

Kortenkamp [19] は Perles 予想が P の頂点数が $d+4$ (d: 次元) の場合には正しいことを示した。

定理 3.3 P を頂点数 $d+4$ の d 次元単体的 (有向マトロイド) 多面体とする。このとき、頂点数 $2d+8$ の $2d+4$ 次元近傍的 (有向マトロイド) 多面体 Q で、P を商として持つものが存在する。

自然な疑問として、Q の頂点数・次元をもっと小さく取れないかという疑問が生じる。そこで、多面体・近傍的多面体の列挙結果を用いて、ある頂点数・次元の近傍的多面体の商として現れうる多面体の組合せ型とある頂点・次元の可能な単体的多面体の組合せ型の比較を行ったところ、以下が観察された [22]。

- 頂点数 7 の 3 次元単体的多面体の組合せ型 7 個全てが、頂点数 9・5 次元近傍的多面体の商として現れる。
- 頂点数 8 の 4 次元単体的多面体の組合せ型 37 個中 36 個が、頂点数 9・5 次元または頂点数 10・6 次元近傍的多面体の商として表現でき、37 個全てが頂点数 11・7 次元近傍的有向マトロイド多面体の商として現れる。

- 頂点数 9 の 5 次元単体的多面体の組合せ型 322 個中 321 個が、頂点数 10・6 次元、頂点数 11・7 次元または頂点数 12・8 次元近傍的有向マトロイド多面体の商として表現できるが、1 個表現できないものが存在する。

したがって、Q を頂点数 $2d+2$・$(2d-2)$ 次元の近傍的多面体として、Kortenkamp の定理を改善することはできないことがわかる。

問題 3.4 次のような最小の e を決定せよ。頂点数 $d+4$ の d 次元単体的 (有向マトロイド) 多面体で、どの頂点数 e の $e+4$ 次元近傍的 (有向マトロイド) 多面体の商としても表現できないものが存在する。

本節の結果より、$2d-1 \le e \le 2d+4$ である。

3.1.2 Altshuler, Steinberg 予想 [3]

d 次元多面体 P が $(d-2-r)$ 次元以下の面を追加せずに単体分割できるとき、P を r-**スタック多面体**という。1-スタック多面体を単に**スタック多面体**と呼ぶ。Altshuler, Steinberg [3] は、4 次元近傍的多面体の頂点図形は常に 3 次元スタック多面体であることを示し、逆に任意の 3 次元スタック多面体は 4 次元近傍的多面体の頂点図形として表現できることを予想した。

予想 3.5 ([3]) 任意の 3 次元スタック多面体に対し、それを頂点図形として持つ 4 次元近傍的多面体が存在する。

次のように、この予想の有向マトロイド版を考えるのも自然であろう。

予想 3.6 頂点数 $n+1$ の任意の 3 次元スタック有向マトロイド多面体に対し、それを頂点図形として持つ頂点数 n の 4 次元近傍的有向マトロイド多面体が存在する。

3 次元有向マトロイド多面体の面束は 3 次元多面体の面束であることが知られるため、予想 3.6 は予想 3.5 を少し弱めたものとなっている。

頂点数 12 までの 4 次元近傍的有向マトロイド多面体の頂点図形を列挙結果より計算し、頂点数 11 までの 3 次元スタック多面体の組合せ型を列挙したものと比較したのが、表 3 である。

n	頂点数 $n+1$ の 4 次元近傍的有向マトロイド多面体の頂点図形の組合せ型の数	頂点数 n の 3 次元スタック多面体の組合せ型の数
5	1	1
6	1	1
7	3	3
9	24	24
10	93	93
11	434	434

表 3: 4 次元近傍的多面体の頂点図形と 3 次元スタック多面体の組合せ型の数 ([22])

表より、予想は $n=11$ まで正しいことがわかる。同じ頂点数の単体的多面体の中でスタック多面体が最小の面数を持つ (下限定理 [4]) 点などからもこの予想は自然に思われ、今後さらなる研究が望まれる。

3.1.3 Bokowski, Shemer の問題 [9]

Bokowski, Shemer [9] は、$2m$ 次元近傍的多面体の頂点図形が $(2m-1)$ 次元 $(m-1)$-スタック $(m-1)$-近傍的多面体になることに注目し、以下の問題を提案した。

問題 3.7 ([9]) 任意の頂点数 $n+1$ の $(2m-1)$ 次元 $(m-1)$-スタック $(m-1)$-近傍的多面体に対し、それを頂点図形として持つ頂点数 n の $2m$ 次元近傍的多面体が存在するであろうか。

$m=2$ の場合が予想 3.5 に対応することに注意する。$n \leq 2m+2$ の場合はこの予想は正しいことがわかる [9] ので、最初の非自明な場合は $m=3, n=9$ の場合である。この場合を計算機実験により調べたところ、126 個の頂点数 9 の 5 次元単体的近傍的多面体のうち、55 個が 2-スタック性を持ち、いずれも頂点数 10 の 6 次元近傍的多面体の頂点図形として表現できることが確かめられた [22]。それ以上のサイズの多面体については、スタック性計算の困難さにより、まだ計算機実験ができていない。この問題も一般化下限定理 [25] を踏まえると自然な定式化であるように思われ、今後の研究が待たれる。

3.1.4 頂点数 9 の 4 次元単体的多面体と頂点数 10 の 5 次元単体的近傍的多面体の頂点図形

1142 個頂点数 9 の 4 次元単体的多面体の組合せ型のうち、1137 個が頂点数 10 の 5 次元単体的近傍的多面体の頂点図形として現れることが [22] の計算機実験で明らかになった。そして最近、頂点図形として現れない 5 個の組合せ型は以下のような性質を持つことが観察された。多面体 P の頂点 v のファセット次数を v が含まれる P のファセットの数で定める。頂点数 10 の 5 次元単体的近傍的多面体の頂点図形となりえない 5 個はいずれも最小のファセット次数が 10 である。その他の頂点数 9 の 4 次元単体的多面体の組合せ型については、1 個を除き（最小ファセット次数 10)、全て最小のファセット次数が 11 以上であった。奇数次元近傍的多面体の頂点図形の特徴づけを与えるのも重要な問題である。

問題 3.8 頂点数 n の $(2m-1)$ 次元単体的近傍的多面体の頂点図形を特徴づけよ。

3.2 頂点推移的な自己同型群を持つ近傍的多面体について

多面体 P に対し、その自己同型群 $\Gamma(P)$ をアフィン変換 f で $f(P)=P$ なるもの全体が成す群とする。また、有向マトロイド多面体 $\mathcal{M}=(E,\mathcal{V}^*)$ に対し、その自己同型群 $\Gamma(\mathcal{M})$ を E 上の置換 σ で $\sigma(\mathcal{V}^*)=\mathcal{V}^*$ なるものの全体が成す群とする。P に付随する有向マトロイド多面体 $\mathcal{M}_P$ に対し、$\Gamma(P)$ は $\Gamma(\mathcal{M}_P)$ の部分群となっていることに注意する。d が偶数のとき、d 次元巡回多面体に付随する有向マトロイド多面体 (交代有向マトロイドという) は頂点推移的な自己同型群を持ち、またそれを自己同型群としてもつ多面体としても実現することができる [18]。では、巡回多面体と組合せ同値でない近傍的多面体で頂点推移的な自己同型群を持つものが存在するであろうか。これを調べるためにもう少し条件を緩めて、近傍的有向マトロイド多面体で、頂点推移的な自己同型群を持つものが存在するかを計算機で調べた。その結果、表 1 の範囲の有向マトロイド多面体では、頂点数 10・次元 4 の場合に一つのみ存在することが確認された。

命題 3.9 頂点推移的な自己同型群を持つ近傍的有向マトロイド多面体で巡回多面体と組合せ同値でないものが存在する。

実は、この近傍的有向マトロイド多面体は、頂点数 10・次元 4 で唯一実現不可能な近傍的有向マトロイド多面体 [8] であることが明らかになった (面束など詳細な記述は [8] を参照していただきたい)。巡回多面体と組合せ同値でない近傍的多面体で頂点推移的な自己同型群を持つものが存在するかどうかは未解決である。

3.3 近傍的多面体の edge-valence 行列について

$v_1, \dots, v_n$ を頂点とする近傍的多面体 P に対し、$n \times n$ 行列 $A_P = (a_{ij}^{(P)})$ を

$$a_{ij}^{(P)} = \text{頂点 } v_i \text{ と頂点数 } v_j \text{ を同時に含む } P \text{ のファセットの数}$$

で定義する。これを P の **edge-valence 行列**と呼ぶ [3]。edge-valence 行列の行列式 $\det(A_P)$ は面束の同型に関する不変量である。Bokowski, Shemer [9] は、次のような edge-valence 行列の変種を提案した。$M \subset \{v_1, \dots, v_n\}$ に対し、$\mathrm{conv}(M)$ は P の面でないが、任意の $M' \subsetneq M$ に対して $\mathrm{conv}(M')$ が P の面であるとき、$\mathrm{conv}(M)$ を P の**欠損面**という。行列 $B_P = (b_{ij}^{(P)})$ を

$$b_{ij}^{(P)} = \text{頂点 } v_i \text{ と頂点数 } v_j \text{ を同時に含む } P \text{ の欠損面の数}$$

と定義すると、この行列の行列式 $\det(B_P)$ も面束の同型に関する不変量である。Altshuler, Steinberg [3] は当初、$\det(A_P) = \det(A_Q)$ ならば、P と Q は組合せ同値と予想した。また、Bokowski, Shemer [9] は、5 次元球面の頂点数 10 の三角形分割で多面体的なもの P、多面体的でないもの Q について $\det(B_P) < \det(B_Q)$ が成立していることを観察した。edge-valence 行列の性質をより理解するために有向マトロイド多面体の列挙結果に対し、edge-valence 行列式の値を計算したところ、以下のような結果が得られた [22]。

(次元, 要素数)	$\det A_P$ の数	$\det B_P$ の数
(4,8)	3	3
(4,9)	23	23
(4,10)	429	432
(5,10)	159 364	32 329
(6,10)	37	37

(次元, 要素数)	$\det A_P$ の数	$\det B_P$ の数
(4,11)	13 936	13 937
(6,11)	42 903	42 897
(7,11)	35 993	523
(4,12)	556 055	556 141
(8,12)	2 592	2 588

表 4: edge-valence 行列の行列式の値の数

この計算機実験から、$\det(A_P)$、$\det(B_P)$ は完全に多面体 P の組合せ型を決定しないものの、同型に関する非常に精密な情報を持つことがわかる。上記の Altshuler, Steinberg の予想、Bokowski, Shemer の観察は両方とも一般には成立しないことも観察される (ただし、それらの著者はすでにそのことに気づいていると推察される)。さらなる研究として、A_P, B_P の固有値の性質を調べることは興味深いように思われる。

4 まとめ

本稿では、近傍的多面体の研究についての背景と近年の著者の結果 [22] の一部を紹介した。近傍的多面体に関しては、多くの研究により、次々と新しいことが明らかとなってきているが、Perles 予想をはじめ、まだまだ研究されるべきことが多く残っている。例えば、[22] では、多くの未解決問題を収集・提案しているので、興味のある読者は参照していただきたい。

参考文献

[1] Karim A. Adiprasito and Arnau Padrol. The universality theorem for neighborly polytopes. http://arxiv.org/abs/1402.7207. 2014.

[2] Noga Alon. The number of polytopes, configurations and real matroids. *Mathematika*, Vol. 33, pp. 62–71, 6 1986.

[3] Amos Altshuler and Leon Steinberg. Neighborly 4-polytopes with 9 vertices. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, Vol. 15, pp. 270–287, 1973.

[4] David Barnette. A proof of the lower bound conjecture for convex polytopes. *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. 46, No. 2, pp. 349–354, 1973.

[5] David Barnette. A family of neighborly polytopes. *Israel Journal of Mathematics*, Vol. 39, No. 1-2, pp. 127–140, 1981.

[6] Anders Björner, Michel Las Vergnas, Bernd Sturmfels, Neil White, and Günter M. Ziegler. *Oriented matroids*, Vol. 46 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1999.

[7] Jürgen Bokowski and António Guedes de Oliveira. On The Generation Of Oriented Matroids. *Discrete Comput. Geom*, Vol. 24, pp. 555–602, 2000.

[8] Jürgen Bokowski and Klaus Garms. Altshuler's sphere M^{10}_{425} is not polytopal. *European J. Combin.*, Vol. 8, No. 3, pp. 227–229, 1987.

[9] Jürgen Bokowski and Ido Shemer. Neighborly 6-polytopes with 10 vertices. *Israel J. Math.*, Vol. 58, No. 1, pp. 103–124, 1987.

[10] Jürgen Bokowski and Bernd Sturmfels. Polytopal and nonpolytopal spheres: an algorithmic approach. *Israel J. Math.*, Vol. 57, No. 3, pp. 257–271, 1987.

[11] David L. Donoho and Jared Tanner. Neighborliness of randomly projected simplices in high dimensions. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Vol. 102, No. 27, pp. 9452–9457, 2005.

[12] W Finbow. Simplicial neighbourly 5-polytopes with nine vertices. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, pp. 1–13, 2014.

[13] Lukas Finschi and Komei Fukuda. Generation of oriented matroids—a graph theoretical approach. *Discrete Comput. Geom.*, Vol. 27, No. 1, pp. 117–136, 2002. Geometric combinatorics (San Francisco, CA/Davis, CA, 2000).

[14] Komei Fukuda, Hiroyuki Miyata, and Sonoko Moriyama. Complete enumeration of small realizable oriented matroids. *Discrete Comput. Geom.*, Vol. 49, No. 2, pp. 359–381, 2013.

[15] David Gale. Neighborly and cyclic polytopes. *in: "Convexity" (V. Klee ed.) Proc. Symposia in Pure Mathematics*, Vol. 7, pp. 225–233, 1963.

[16] Jacob E. Goodman and Richard Pollack. There are asymptotically far fewer polytopes than we thought. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, Vol. 14, No. 1, pp. 127–129, 01 1986.

[17] Branko Grünbaum and V. P. Sreedharan. An enumeration of simplicial 4-polytopes with 8 vertices. *J. Combinatorial Theory*, Vol. 2, pp. 437–465, 1967.

[18] Volker Kaibel and Arnold Wassmer. Automorphism groups of cyclic polytopes, 2003.

[19] Ulrich H. Kortenkamp. Every simplicial polytope with at most $d + 4$ vertices is a quotient of a neighborly polytope. *Discrete Comput. Geom.*, Vol. 18, No. 4, pp. 455–462, 1997.

[20] Arnaldo Mandel. *Topology of oriented matroids*. PhD thesis, University of Waterloo, 1982.

[21] Peter McMullen. The maximum numbers of faces of a convex polytope. *Mathematika, Lond.*, Vol. 17, pp. 179–184, 1970.

[22] Hiroyuki Miyata and Arnau Padrol. Enumeration of neighborly polytopes and oriented matroids. http://arxiv.org/abs/1408.0688, 2014.

[23] Nikolai E. Mnëv. The universality theorems on the classification problem of configuration varieties and convex polytopes varieties. In *Topology and geometry—Rohlin Seminar*, Vol. 1346 of *Lecture Notes in Math.*, pp. 527–543. Springer, Berlin, 1988.

[24] Theodore S. Motzkin. Comonotone curves and polyhedra. *Bulletin Amer. Math. Soc.*, Vol. 63, p. 35, 1957.

[25] Satoshi Murai and Eran Nevo. On the generalized lower bound conjecture for polytopes and spheres. *Acta Math.*, Vol. 210, No. 1, pp. 185–202, 2013.

[26] Arnau Padrol. Many Neighborly Polytopes and Oriented Matroids. *Discrete Comput. Geom.*, Vol. 50, No. 4, pp. 865–902, 2013.

[27] Peter Schuchert. *Matroid-Polytope und Einbettungen kombinatorischer Mannigfaltigkeiten*. PhD thesis, TU Darmstadt, 1995.

[28] Ido Shemer. Neighborly polytopes. *Israel J. Math.*, Vol. 43, No. 4, pp. 291–314, 1982.

[29] Bernd Sturmfels. Neighborly Polytopes and Oriented Matroids. *Eur. J. Comb.*, Vol. 9, No. 6, pp. 537–546, November 1988.