Gray codes for maximal chains of graded posets

冨江　雅也

盛岡大学　(e-mail: tomie@morioka-u.ac.jp)

1　はじめに

計算機科学の分野において与えられた対象を、もれなく、重複なくさらに効率よく出力する手法の研究は列挙問題と呼ばれ大きな関心が払われている。列挙問題における分野の一つに Combinatorial Gray Code と呼ばれるものがある。これは、隣り合う元の違いがなるべく小さくなるように与えられた組合せ的対象の元を列挙するやり方を指す。つまりは直前の出力を用いて比較的容易に次の出力が構成できるようなものであり、高速列挙に非常に有用な方法とされている。

Combinatorial Gray Codes と呼ばれる分野において最も基本的な例は、与えられた長さの 0-1 列を隣接するものたちの差が 1 ビットとなるような列挙である [3]。他にも (1) 与えられたサイズの置換に対する列挙 (2) n 元集合における k 元部分集合の列挙 (3) 分割の列挙 (4) 有限コクセター群の列挙, などが挙げられ、膨大な先行研究が存在する。詳しくは Savage のサーベイ論文 [8] を参照の事。特に同じ組合せ的対象においても、隣接を許容数程度の違いをどのように定めるかによって全く異なる問題が現れる。特に n 元集合における k 元部分集合の列挙においては、集合の差集合とするか、格子路の問題と捉えて、路が一致しない箇所とみるかによって全く違う問題となる。特に後者は前者よりもより制約の強い条件となる。

一般的に Combinatorial Gray Code を構成する問題はハミルトン路問題と等価であることが知られている。なんとなれば組合せ的対象における元を頂点、隣接することを許容する違いを持つ元たちを辺で結ぶとグラフができる。この時 Combinatorial Gray Code はこのグラフにおけるハミルトン路となる。逆にグラフの頂点を対象、辺を隣接してもよい程度の違いと定めると、ハミルトン路が Combinatorial Gray Code として実現される。このようにして Combinatorial Gray Code を構成する問題は一般的に解決するのは非常に難しい問題となるため、個々の対象（もしくは族）に対して構成するというやり方が現実的である。

本稿においては特に階層づけられた半順序集合の極大鎖に対して Gray Code を構成する試みについて述べる。特にいくつかの基本的な半順序（ブール代数、集合分割）について考察する。また置換、0-1 列に関しては既存の Gray code を復元することを観察し、直積、Interval Operator といった半順序集合変換との関係も考察する。本稿の内容は現在準備中の論文 [11] に基づく。

他方半順序集合とのつながりにおいては線型拡大についていくつか先行研究がある [8]。本稿における定義は半順序集合の線型拡大を分配束の場合として含むが、現在得られた結果に分配束に関するものはなく、また線型拡大に対する貢献に関しては今のところ得られていない。

2 半順序集合の極大鎖に対するGray Code

P を最大元 $\hat{1}$ と最小元 $\hat{0}$ を持つ階層付き半順序集合とする。$\hat{1}$ と $\hat{0}$ を持つ半順序集合 P が階層付きであるとは以下の条件を満たす関数 $\mathrm{rk}: P \to \mathbb{Z}$（*rank function* という）が定義できるときと定める。

$$\mathrm{rk}(\hat{0}) = 0,\ \mathrm{rk}(y) = \mathrm{rk}(x) + 1,\ if\ x \prec y. \tag{1}$$

特に $\mathrm{rk}(\hat{1})$ を $\mathrm{rk}(P)$ と書く。$P(\mathrm{rk}(P) = n$ とする$)$ の極大鎖全体

$$M(P) := \{(\hat{0}, x_1, x_2 \cdots, x_{n-1}, \hat{1}) | \hat{0} \prec x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_{n-1} \prec \hat{1}\} \tag{2}$$

を考え、与えられた半順序集合 P に対して極大鎖の集合 $M(P)$ に Gray Code を構成することを考える。そのために $M(P)$ に自然な距離を導入する。極大鎖 $\mathbf{x} = \hat{0} \prec x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_{n-1} \prec \hat{1}$ 及び $\mathbf{y} = \hat{0} \prec y_1 \prec y_2 \prec \cdots \prec y_{n-1} \prec \hat{1} \in M(P)$ に対して $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の距離を $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := |\{i|\ x_i \neq y_i\ \}|$ と定める。つまりお互い共有しない高さの個数を数えたものである。

Remark 2.1. 階層付きであれば最大元 $\hat{1}$ および最小元 $\hat{0}$ に関する条件は別になくとも良い。本稿においては半順序集合変換に関する議論を行う都合上 $\hat{1}, \hat{0}$ を入れている。

$M(P)$ における列挙 $\mathbf{M_1}, \mathbf{M_2}, \cdots \mathbf{M_N}$ に対して $\max\{d(M_i, M_{i+1})|\ 1 \leq i \leq N-1\}$ をその列挙における距離という。

Definition 2.1. $M(P)$ における列挙 $\mathbf{M_1}, \mathbf{M_2}, \cdots \mathbf{M_N}$ が *Gray code* であるとは、距離が $\mathrm{rk}(P)$ に依存しないときをいう。言い換えれば与えられた定数で距離が抑えられるような列挙を $M(P)$ の *Gray Code* という。

Problem 2.1. 階層付き半順序集合 P における極大鎖の集合 $M(P)$ に対してなるべく距離が小さくなるような *Gray Code* を構成せよ。

この問題に対して以下２通りの方法でアプローチする。

- 非自明な Gray Codes が構成できるような半順序集合の例をたくさん見つけよ

- Gray Codes の存在性を保つような（自然な）半順序集合変換をたくさん見つけよ

半順序集合における Gray Code の先行研究として、半順序集合における線型拡大における Gray Codes の構成が挙げられる。勝手な（階層付きであることは要求しない）半順序集合 X に対して order ideals 全体に inclusion order をいれた半順序集合 $J(X)$ は分配束と呼ばれる階層付き半順序集合となりその極大鎖 $M(J(X))$ は、X の線型拡大と自然に 1 対 1 対応を持つ。この対応は線型拡大における Hamming 距離と極大鎖にいれた距離を保つ。逆に分配束は上の方法で構成されることが知られているので、分配束における上記の問題は半順序集合における線型拡大の問題と等価となる。本稿ではより一般の半順序を考えているために、線型拡大が持つ難しさに踏み込んで議論しているわけではない。

3 簡単な具体例

3.1 $\mathbf{1} \oplus \mathbf{2} \times \mathbf{1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{2} \times \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}$

非常に簡単な例として Ordinal sum の一例、

$$\mathbf{1} \oplus \mathbf{2} \times \mathbf{1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{2} \times \mathbf{1} \oplus \mathbf{1} := \{x_i, y_i | 1 \le i \le n, x_i \prec x_{i+1}, x_i \prec y_{i+1}, y_i \prec y_{i+1}, y_i \prec x_{i+1}\} \cup \{\hat{0}, \hat{1}\} \quad (3)$$

を考える。Hasse 図は Figure 1 を参照の事。

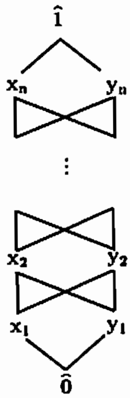

Figure 1: A Hasse diagram of the $M(\mathbf{1} \oplus \mathbf{2} \times \mathbf{1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{2} \times \mathbf{1} \oplus \mathbf{1})$

この時 $M(\mathbf{1} \oplus \mathbf{2} \times \mathbf{1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{2} \times \mathbf{1} \oplus \mathbf{1})$ と長さ n の 0-1 列の対応を次で定める。

$$(\hat{0} \prec z_1 \prec z_2 \prec \cdots \prec z_n \prec \hat{1}) \leftrightarrow a_1 a_2 \cdots a_n \quad (4)$$

ここで $z_i = x_i$ or y_i かつ

$$a_i = \begin{cases} 0 & (z_i = x_i) \\ 1 & (z_i = y_i) \end{cases} \quad (5)$$

この対応は極大鎖の距離と 0-1 列の Hamming 距離を保つ。Frank Gray により長さ n の 0-1 列に関して以下の結果が得られている。

Theorem 3.1. *[3]*
長さ n の 0-1 列において $00\cdots0$ を始点、$10\cdots0$ を終点とする隣り合う元の *Hamming* 距離が 1 となる列挙が存在する。

故に $M(\mathbf{1} \oplus \mathbf{2} \times \mathbf{1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{2} \times \mathbf{1} \oplus \mathbf{1})$ に距離 1 の Gray Code が構成できることが従う。

3.2 Boolean algebras

B_n を $[n]$ の部分集合全体に包含関係で順序を入れたものとする。この時 B_n は階層付き半順序集合となり、最小元は ϕ, 最大元は $\{1,2,\cdots,n\}$ となり $\mathrm{rk}(X)=|X|$ である。B_n の極大鎖と n 次対称群 S_n には以下の示す通り自然な 1 対 1 対応がある。

$$M(B_n)\ni(\phi=X_0,X_1,X_2,\cdots,X_n=\{1,2,\cdots,n\})\to x_1x_2\cdots x_n\in S_n, x_i:=X_i\setminus X_{i-1} \tag{6}$$

この対応は $M(B_n)$ における距離と、S_n において以下に定める距離を保つ。$n=3$ の場合は Figure 2 を参照の事。

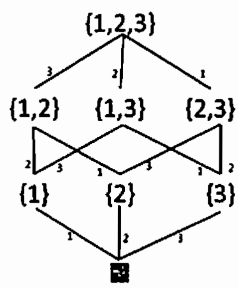

Figure 2: A Hasse diagram of the Boolean algebra of rank 3

$$d(\pi,\tau):=\min\{k|\tau=\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_k}\pi\}, where\ \sigma_{i_1},\sigma_{i_2},\cdots,\sigma_{i_k}\in\{(1,2),(2,3),\cdots(n-1,n)\} \tag{7}$$

これは Weak Bruhat order の Hasse 図をグラフと見たときの距離ともいえる。一方で S_n（長さ n の置換全体）の Gray Code に関して以下の結果が知られている

Theorem 3.2. *[4] [10]*
S_n は $12\cdots n$ を始点、$213\cdots n$ を終点として、隣り合う置換がある隣接互換で移りあうような列挙が存在する。

この結果より $M(B_n)$ は距離が 1 となる Gray Code を持つことが従う。後の章において半順序集合変換を用いた別証明について言及する。

4 集合分割から定まる束の場合

$[n]$ の集合分割とは集合 $[n]$ における交わりを持たない空集合ではない部分集合の集まりで、それらの合併集合が $[n]$ となるようなものを言う。たとえば 156/247/3 は [7] の集合分割となる。（これは $\{1,5,6\},\{2,4,7\},\{3\}$ の集まりと見る）特に $[n]$ の集合分割全体を集めてきた集合を考える。例えば $n=3$ の時は $\{1/2/3,12/3,13/2,1/23,123\}$ で合計 5 つある。$[n]$ の集合分割 σ,τ に対して、$\sigma\le\tau$ を

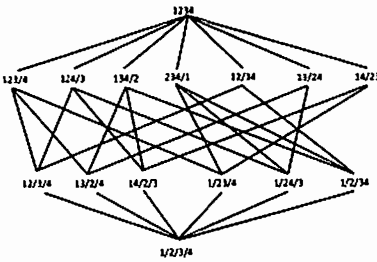

Figure 3: A Hasse diagram of the Boolean algebra of rank 3

τ は σ の細分である時と定めることにより、$[n]$ の分割全体を半順序集合と見ることが出来る。これを Π_n と書く。集合分割に関する基本的な事柄については [9] を参照の事。Figure 3 は Π_4 の Hasse 図である。

$M(\Pi_n)$ の列挙について次の結果を得る。

Theorem 4.1. $M(\Pi_n)$ は距離 1 の *Gray code* を持つ

Example 4.1.

(1)	$1/2/3/4 \prec 12/3/4 \prec 12/34 \prec 1234$	*(10)*	$1/2/3/4 \prec 1/24/3 \prec 124/3 \prec 1234$
(2)	$1/2/3/4 \prec 12/3/4 \prec 124/3 \prec 1234$	*(11)*	$1/2/3/4 \prec 1/24/3 \prec 1/234 \prec 1234$
(3)	$1/2/3/4 \prec 12/3/4 \prec 123/4 \prec 1234$	*(12)*	$1/2/3/4 \prec 1/24/3 \prec 13/24 \prec 1234$
(4)	$1/2/3/4 \prec 1/23/4 \prec 123/4 \prec 1234$	*(13)*	$1/2/3/4 \prec 13/2/4 \prec 13/24 \prec 1234$
(5)	$1/2/3/4 \prec 1/23/4 \prec 1/234 \prec 1234$	*(14)*	$1/2/3/4 \prec 13/2/4 \prec 123/4 \prec 1234$
(6)	$1/2/3/4 \prec 1/23/4 \prec 14/23 \prec 1234$	*(15)*	$1/2/3/4 \prec 13/2/4 \prec 134/2 \prec 1234$
(7)	$1/2/3/4 \prec 14/2/3 \prec 14/23 \prec 1234$	*(16)*	$1/2/3/4 \prec 1/2/34 \prec 134/2 \prec 1234$
(8)	$1/2/3/4 \prec 14/2/3 \prec 134/2 \prec 1234$	*(17)*	$1/2/3/4 \prec 1/2/34 \prec 12/34 \prec 1234$
(9)	$1/2/3/4 \prec 14/2/3 \prec 124/3 \prec 1234$	*(18)*	$1/2/3/4 \prec 1/2/34 \prec 1/234 \prec 1234$

5 半順序変換と Gray code

半順序集合の極大鎖に Gray Code が構成されたとき、その半順序を変形した対象についても、元の半順序における Gray Code の情報を用いて列挙の構成を考えるのは自然な問題である。本章においてはいくつかの半順序集合変換が Gray Code の存在を保つこと、（実際は Gray Code の帰納的構成まで）を解説する。

5.1 半順序集合の直積

半順序集合変換として最も基本的なものとして直積が挙げられる。これは半順序 P, Q に対して, 直積集合 $P \times Q := \{(x, y) | x \in P, y \in Q\}$ に順序関係

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Longleftrightarrow_{\mathrm{def}} x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2 \tag{8}$$

を定めたものである。$M(P)$ 及び $M(Q)$ に Gray Code が与えられた時 $M(P \times Q)$ の Gray Code について次の事実が言える。

Theorem 5.1. $M(P)$ 及び $M(Q)$ において距離が p,q の *Gray code* があるならば $M(P \times Q)$ においては距離が $\max\{4, p, q\}$ となる *Gray Code* が存在する。

この定理は本質的に Frank Ruskey による次の結果に依存している。

Theorem 5.2. *[7]*
$(0,0)$ を始点として (m,n) を終点とする、$(1,0)$-*step* (*h* と表示する)、$(0,1)$-*step* (*u* と表示する) からなる格子路全体を考える（これは $\binom{m+n}{n}$ 個ある）この時隣り合う路の違いが *uuh* と *huu*、*hhu* と *uhh* もしくは *uh* と *hu* であるような列挙が存在する。つまりは、隣り合う路が囲む面積が 2 以下であるような列挙が存在する。

格子路全体において、路同士の距離をそれらが囲む面積と定めると、隣接する路の距離が 2 以下であるような列挙を得る。定理 5.1 に距離として出てくる 4 は、格子路の列挙に現れる距離 2 のちょうど 2 倍になっている。このことは次の簡単な補題による。

Lemma 5.1. 距離の定義された組合せ的対象 C が距離 r の *Gray Code* を持つと仮定する。この時任意の 2 元を始点および終点とする距離 $2r$ の *Gray Code* が存在する。

定理 5.1 に関連して次の結果が成り立つ。

Theorem 5.3. $M(P)$ *(resp.* $M(Q)$*)* が距離 p *(resp.* q*)* の *Gray code* を持ち $\mathrm{rk}(P), \mathrm{rk}(Q) \in 2\mathbb{Z}+1$ ならば $G(P \times Q)$ は距離が $\{2, p, q\}$ となる *Gray code* を持つ

Proposition 5.1. $M(P)$ が距離 p の *Gray code* を持つとき $M(P \times B_k)$ は距離 p の *Gray code* を持つ。ここで B_k はランク k の *Boolean algebra*。

Corollary 5.1. $M(B_n)$ は距離 1 の *Gray Code* を持つ。これは *Johnson* と *Torotter* により得られた S_n の *Gray Code [4] [10]* と本質的に同じものとなる。

5.2 Interval Operator

階層付き半順序集合 P に対して $I(P)$ を P の Interval 全体（空集合も含む）に包含関係で順序を入れたものと定める。このとき $I(P)$ は ϕ を最小元,P を最大元とする階層付き半順序集合となる。特に $\mathrm{rk}([x,y]) := \mathrm{rk}(y) - \mathrm{rk}(x) + 1,\ \mathrm{rk}(\phi) = 0$ となる。
この時次の定理が成り立つ

Theorem 5.4. $M(P)$ が距離 p となる *Gray Code* を持つとき $M(I(P))$ は距離 $\max\{2, p\}$ となる *Gray code* を持つ。

定理の証明には次の結果が本質的である。（これは P が長さ $(n-1)$ の chain である時に相当する）Pattern avoiding permutations に対する Gray Codes の構成については [6] を参照の事。特に 132-231 avoiding permutations（もしくはそれと同等なもの）については知られていないようである。

Theorem 5.5. 長さ n の 132-231 *avoiding permutations* の集合に対して次の距離を入れる。

$$d(\pi, \tau) := \min\{k | \pi = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_k}\tau\ \},\ \textit{where}\ \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_k} \in \{(1,2),(2,3),\cdots(n-1,n)\} \qquad (9)$$

この時 132-231 *avoiding permutations* は距離 2 の *Gray code* を持つ。

References

[1] A. Bjorner, F. Brenti, Combinatorics of Coxeter groups, Graduate Texts in Mathematics, 231, Springer. New York. 2005.

[2] P. J. Chase, Combination generation and Graylex ordering. Congressus Numeratium. 69,215-242, 1989.

[3] F. Gray, Pulse code communications, U.S.Patent 2632058, March 1953.

[4] S. M. Johnson, Generation of permutations by adjacent transpositions, Mathematics of Computation, 17,282-285. 1963.

[5] F. Ruskey, Adjacent interchange generation of combinations, Journal of Algorithms, 9, 162-180, 1988.

[6] S. Kitaev, Patterns in permutations and words, Springer Verlag (EATCS monographs in Theoretical Computer Science book series) 2011.

[7] F. Ruskey. Simple combinatorial Gray codes constructed by reversing sublists. In Proceedings. 4th ISAAC, Hong Kong, Lecture Notes in Computer Science, 762, 201-208. Springer-Verlag, 1993.

[8] Carla Savage, A Survey of Combinatorial Gray Codes, SIAM Review, v.39 n.4, p.605-629, Dec, 1997.

[9] R. P. Stanley, Enumerative Combinatorics, vol.1, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[10] H. F. Trotter, PERM(Algorithm 115), Communications of the ACM, 5(8), 434-435, 1962.

[11] M. Tomie, Gray codes for maximal chains of graded posets, in preparation.