ベビーモンスター頂点作用素超代数の二面体部分代数

東京女子大学 現代教養学部 数理科学科
山内 博

1 モンスターの二面体部分代数

本稿では以下の条件を満たす頂点作用素代数を考えます。

仮定 1. 頂点作用素代数 V は以下を満たしている。
(1) V は $\mathbb{R}$ 上で定義されている。
(2) V は $V=\bigoplus_{n\geq 0} V_n$, $V_0=\mathbb{R}\mathbb{1}$, $V_1=0$ なる次数分解を持つ。
(3) V 上の不変内積は $(\mathbb{1}|\mathbb{1})=1$ なる規格化のもとで正定値である。

このような V が与えられたとき，次数 2 の斉次空間 V_2 には積を $a_{(1)}b$ とすることで可換非結合的代数の構造が入ります。これを V の**グライス代数**と呼びます。

1.1 宮本の自己同型

ヴィラソロ元 $e\in V$ が与えられたとき，正定値性から e の生成する部分代数 $\langle e\rangle$ は $c=2(e|e)$ を中心電荷とする単純ヴィラソロ代数 $L(c,0)$ と同型になります。ここで e の中心電荷がユニタリー系列と呼ばれる次の値を取る場合を考えます。

$$c_m := 1-\frac{6}{(m+2)(m+3)} \quad (m=1,2,3,\dots) \tag{1.1}$$

このとき $L(c_m,0)$ は有理型であり，その既約加群は $L(c_m,h_{r,s})$ で与えられます (cf. [W93])。ここで

$$h_{r,s}=\frac{(r(m+3)-s(m+2))^2-1}{4(m+2)(m+3)},\quad 1\leq s\leq r\leq m+1 \tag{1.2}$$

です。$V_e[h]$ で $L(c_m,h)$ と同型な既約 $\langle e\rangle$-部分加群の和を表すとき，V は次のように等型成分に分解します。

$$V=\bigoplus_{1\leq s\leq r\leq m+1} V_e[h_{r,s}] \tag{1.3}$$

e のゼロモード $o(e) = e_{(1)}$ は V 上対角的に作用しており，その固有値は

$$\{h_{r,s} + n \mid 1 \le s \le r \le m+1,\ n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}\}$$

で与えられます。それゆえ，$4(m+2)(m+3)o(e)$ は V 上整数を固有値にもち，次の写像は well-defined になります。

$$\tau_e := (-1)^{4(m+2)(m+3)o(e)} \tag{1.4}$$

定理 1.1. ([Mi96]) $\tau_e \in \mathrm{Aut}(V)$

ここで

$$P_m := \begin{cases} \{h_{1,s} \mid 1 \le s \le m+2\} & (m \equiv 0 \mod 2) \\ \{h_{r,1} \mid 1 \le r \le m+1\} & (m \equiv 1 \mod 2) \end{cases} \tag{1.5}$$

おくとき，ヴィラソロ頂点作用素代数のフュージョン規則から分解 (1.3) において部分空間 $\bigoplus_{h\in P_m} V_e[h]$ を考えると，これは V の部分代数をなします。$\bigoplus_{h\in P_m} V_e[h]$ 上

$$\sigma_e := \begin{cases} (-1)^{s+1} & (m \equiv 0 \mod 2) \\ (-1)^{r+1} & (m \equiv 1 \mod 2) \end{cases} \tag{1.6}$$

と定めるとき，次が成り立ちます。

定理 1.2. ([Mi96]) $\sigma_e \in \mathrm{Aut}\left(\bigoplus_{h\in P_m} V_e[h]\right)$

定義から σ_e は部分代数 $\bigoplus_{h\in P_m} V_e[h]$ 上で定義されていますが，τ_e はここに自明に作用しています。$h \notin P_m$ ならば $V_e[h] = 0$ となるとき，e は V 上**σ-型**であるといいます。e が σ-型ならば τ_e は V 上自明となりますが，その代わりに $V = \bigoplus_{h\in P_m} V_e[h]$ となり，σ_e が V 全体で定義されます。

このようにユニタリー系列に属するヴィラソロ元があれば頂点作用素代数上の自己同型を構成することができます。上で定めた τ_e および σ_e を e に付随する**宮本の自己同型**と呼びます。

1.2 コンウェイ・宮本対応

$V^\natural$ をムーンシャイン頂点作用素代数 [FLM88] とするとき，そのグライス代数 $V_2^\natural$ はグライスが元々構成した 196884 次元の可換非結合代数と一致します (cf. [C85, G82])[1]。よく知られているように $V^\natural$ にはモンスター単純群 $\mathbb{M}$ が自己同型群として作用しています。

[1]正確には，グライスが最初に構成した 196884 次元の可換代数とコンウェイが与えた改良版は構造が少し異なり，後者は単位元を持ちます。$V_2^\natural$ は単位元を持つコンウェイ版のグライス代数に同型です。

2A 元 $t \in \mathbb{M}$ をひとつとります。このとき中心化群 $C_{\mathbb{M}}(t)$ はベビーモンスター単純群の二重被覆 $2.\mathbb{B}$ と同型です (cf. [ATLAS])。$C_{\mathbb{M}}(t)$ のグライス代数への作用を見てみましょう。

$$
\begin{aligned}
V_2^\natural &= \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{196883}} && (\mathbb{M}\text{-加群}) \\
&= \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{4371}} + \underline{\mathbf{96255}} + \underline{\mathbf{96256}} && (C_{\mathbb{M}}(t)\text{-加群})
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

$V_2^\natural$ の $\mathbb{M}$-不動点は 1 次元であり，これは $V^\natural$ の共形ベクトルで張られています[2]。一方，$C_{\mathbb{M}}(t)$ による不動点 $(V_2^\natural)^{C_{\mathbb{M}}(t)}$ を考えると，これは 2 次元の可換結合代数となり，$V_2^\natural$ の共形ベクトルは二つの互いに直交するヴィラソロ元に分解されます。この二つのヴィラソロ元は中心電荷で区別することができ，一方は $c = 47/2$，もう一方は $c = 1/2$ を持ちます。$c = 1/2$ は (1.1) において $m = 1$ とした場合に他ならず，ユニタリー系列に属します。以下，中心電荷 $c = 1/2$ のヴィラソロ元を**イジング元**と呼びます。$(V^\natural)^{C_{\mathbb{M}}(t)}$ に含まれるイジング元を a_t とするとき，a_t は $C_{\mathbb{M}}(t)$ により固定されるので，a_t のゼロモード $\mathrm{o}(a_t)$ の $V^\natural$ への作用は $C_{\mathbb{M}}(t)$ の作用と可換になります。それゆえ，シュアーの補題から $\mathrm{o}(a_t)$ は $V_2^\natural$ の $C_{\mathbb{M}}(t)$-既約成分上スカラー倍で作用します[3]。t および a_t のゼロモード $\mathrm{o}(a_t)$ の $V_2^\natural$ への作用は以下のようになります (cf. [C85])。

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
V_2^\natural & = & \underline{\mathbf{1}} & + & \underline{\mathbf{1}} & + & \underline{\mathbf{4731}} & + & \underline{\mathbf{96255}} & + & \underline{\mathbf{96256}} \\
t & : & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & -1 \\
\mathrm{o}(a_t) & : & 0 & & 1 & & 1/2 & & 0 & & 1/16 \\
(-1)^{48\mathrm{o}(a_t)} & : & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & -1
\end{array}
\tag{1.8}
$$

この表から分かるように，a_t の作用を肩に乗せた $(-1)^{48\mathrm{o}(a_t)}$ を考えれば，2A 元 t のグライス代数への作用をイジング元 a_t から復元することができます。また，定理 1.1から $\tau_{a_t} = (-1)^{48\mathrm{o}(a_t)}$ は部分構造であるグライス代数 $V_2^\natural$ だけでなく，頂点作用素代数 $V^\natural$ 全体に自己同型として作用します。このように，$V^\natural$ で考えた場合，2A 元 $t \in \mathbb{M}$ に対してイジング元 $a_t \in (V^\natural)^{C_{\mathbb{M}}(t)}$ を対応させるとき，$t = \tau_{a_t}$ が成り立ちます。この事実は (グライス代数のレベルで) コンウェイ [C85] によって発見され，コンウェイは 2A 元 t から一意に定まるイジング元 a_t を t に付随する**軸ベクトル** (axial vector) と呼びました[4]。

逆に，宮本の自己同型を考えることで $V^\natural$ のイジング元から $\mathbb{M}$ の 2A 元を構成することができます。e をイジング元とするとき，e の中心電荷 $c_1 = 1/2$ はユニタリー系列 (1.1) に属しており，それゆえ (1.4) により定まる宮本の自己同型 τ_e が定義できます。$V^\natural$ の場合，イジング元から定まる τ_e は常に $\mathbb{M} = \mathrm{Aut}(V^\natural)$ の 2A 元となることが分かっています。(cf. [Mi96, Ma01])。さらに，分解 (1.7) より $e \in (V^\natural)^{C_{\mathbb{M}}(\tau_e)}$ となること，すなわち τ_e に付随する軸ベクトルであることが従います。

定理 1.3. ([C85, Mi96, Ma01]) 宮本の自己同型 $e \mapsto \tau_e$ により $V^\natural$ に含まれるイジング元と $\mathbb{M} = \mathrm{Aut}(V^\natural)$ の 2A 元の間には一対一対応が成立する。

[2] 頂点作用素代数の自己同型の定義から共形ベクトルは自己同型でかならず固定されます。

[3] 厳密にはシュアーの補題を使うには $\mathbb{C}$ 上で考える必要がありますが，今の場合 $\mathbb{R}$ 上でも成立します。

[4] グライス代数において $a_t/2$ は冪等元になります。コンウェイは $a_t/2$ を軸ベクトルと呼びましたが，ここではヴィラソロ元である a_t をそう呼ぶことにします。

この一対一対応は $V^\natural$ の特殊性のひとつであり，一般の頂点作用素代数においては成立しません。このような対応関係を満たす頂点作用素代数を調べるため，以下のように定式化しておきます。

定義 1.4. V を頂点作用素代数，G を $\mathrm{Aut}(V)$ の部分群，I を G の対合のなす共役類とする。各 $t \in I$ に対して不動点部分代数 $V^{C_G(t)}$ においてユニタリー系列に属する中心電荷 c_m のヴィラソロ元 a_t が一意に存在し，$\tau_{a_t} = t$ (a_t が σ-型の場合には $\sigma_{a_t} = t$) が成り立つとき，V において G と中心電荷 c_m の (σ-型) ヴィラソロ元の間には**コンウェイ・宮本対応**が成り立つという。

1.3 佐久間の定理

定理1.3で見たように，$\mathbb{M}$ の 2A 元は $V^\natural$ のイジング元と一対一に対応します。そのため，$V^\natural$ のイジング元を調べることによって $\mathbb{M}$ の 2A 元の性質を調べることが可能になります。もっとも基本的な場合として，二つの 2A 元が生成する二面体群に対応する，$V^\natural$ において二つのイジング元が生成する部分代数を分類する問題が考えられます。s, t を $\mathbb{M}$ の 2A 元とするとき，積 st は $\mathbb{M}$ における共役類 1A, 2A, 3A, 4A, 5A, 6A, 4B, 2B, 3C のいずれかに属します (cf. [ATLAS])[5]。コンウェイ・宮本対応により $V^\natural$ で考えた場合，$V^\natural$ において二つの相異なるイジング元が生成する部分代数の同型類は上の 1A 以外の 8 つの共役類に対応して全部で 8 通りあることになります。驚くべきことに，この事実は $V^\natural$ のみならず，仮定1を満たす一般の頂点作用素代数に対して成り立つことが佐久間氏により示されました。

定理 1.5. ([S]) V を仮定1を満たす頂点作用素代数，e, f を V の相異なるイジング元とする。このとき e, f で生成される部分代数 $\langle e, f\rangle$ のグライス代数構造は全部で 8 通りある。また，$\tau_e\tau_f$ の位数は 6 以下である。

論文 [S] では部分代数 $\langle e, f\rangle$ のグライス代数が完全に決定され，その頂点作用素代数構造も [SY, LYY05] などにより大体分かっています[6]。佐久間の定理から $\langle e, f\rangle$ の (グライス代数の) 構造はすべて $V^\natural$ の部分代数として内包されていることが分かります。そのため $V^\natural$ において対応する $\tau_e\tau_f$ の定める共役類が nX であるとき，$\langle e, f\rangle$ を n**X 型二面体部分代数**と呼びます。以下に簡単な諸元を載せておきます。

nX	1A	2A	3A	4A	5A	6A	4B	2B	3C
$2^{10}(e\|f)$	2^8	2^5	13	8	6	5	4	0	4
$\dim\langle e, f\rangle_2$	1	3	4	5	6	8	5	2	3

[5] ここに現れる数字はちょうど拡大 E_8 図形のラベリングに一致していることをマッカイが指摘しました。

[6] $\langle e, f\rangle$ の頂点作用素代数構造はそのグライス代数から一意的に決まると予想しており，実際 4A, 5A, 6A, 3C 以外の場合には構造の一意性が示されています。

2　ベビーモンスターの二面体部分代数

ここでは佐久間の定理を頂点作用素超代数に拡張した結果を紹介します。

2.1　ベビーモンスター頂点作用素超代数

定理 1.3より $V^\natural$ においてイジング元は $\mathbb{M}$ の 2A 元と一対一に対応し，それゆえすべて $\mathbb{M}$ の作用で共役です。よって $e \in V^\natural$ をイジング元としたとき $\langle e\rangle$ の交換団部分代数 $\mathrm{Com}_{V^\natural}\langle e\rangle$ の構造は e の取り方に依らず一意的に定まります[7]。そこで $VB^{\natural,0} := \mathrm{Com}_{V^\natural}\langle e\rangle$ とおき，これを**ベビーモンスター頂点作用素代数**と呼びます。理由は $\mathrm{Aut}(VB^{\natural,0}) = \mathbb{B}$ となるからです (cf. [H10, Y05])。$VB^{\natural,0}$ にはトップウェイト 3/2 の既約加群 $VB^{\natural,1}$ があり，拡大 $VB^\natural := VB^{\natural,0} \oplus VB^{\natural,1}$ には頂点作用素超代数の構造が入ります (loc cit)。こちらはそのままベビーモンスター頂点作用素超代数と呼ばれます。

$VB^{\natural,0}$ のグライス代数とベビーモンスター $\mathbb{B}$ との関係を見てみましょう。t を $\mathbb{B}$ の 2A 元とするとき，$C_{\mathbb{B}}(t) \simeq 2\cdot{}^2E_6(2):2$ であり，次の分解が成り立ちます (cf. [ATLAS]):

$$
\begin{aligned}
VB^{\natural,0}{}_2 &= \underline{1} + \underline{96255} && (\mathbb{B}\text{-加群}) \\
&= \underline{1} + \underline{1} + \underline{1938} + \underline{48620} + \underline{45696} && (C_{\mathbb{B}}(t)\text{-加群})
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

$V^\natural$ の場合と同様にこの場合も $C_{\mathbb{B}}(t)$ による不動点 $(VB^{\natural,0}{}_2)^{C_{\mathbb{B}}(t)}$ は 2 次元であり，$VB^{\natural,0}$ の共形ベクトルは二つの互いに直交するヴィラソロ元に分解されます。この二つのヴィラソロ元の中心電荷はそれぞれ $c = 114/5$ と $c = 7/10$ であり，後者はユニタリー系列届し (1.1) において $m = 2$ とした場合になります。$(VB^{\natural,0})^{C_{\mathbb{B}}(t)}$ に含まれる $c = 7/10$ のヴィラソロ元を a_t とするとき，t および a_t のゼロモード $\mathrm{o}(a_t)$ の $VB^{\natural,0}{}_2$ への作用は以下のようになります (cf. [HLY12])。

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
VB^{\natural,0}{}_2 & = & \underline{1} & + & \underline{1} & + & \underline{1938} & + & \underline{48620} & + & \underline{45696} \\
t & : & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & -1 \\
\mathrm{o}(a_t) & : & 0 & & 1 & & {}^3/_5 & & 0 & & {}^1/_{10} \\
(-1)^{10\mathrm{o}(a_t)} & : & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & -1
\end{array}
\tag{2.2}
$$

この表から 2A 元 t のグライス代数への作用は $(-1)^{10\mathrm{o}(a_t)}$ と一致します。$VB^{\natural,0}$ において a_t は σ-型であり，付随する宮本の自己同型 σ_{a_t} は $t = (-1)^{10\mathrm{o}(a_t)}$ と一致します。それゆえ，$VB^{\natural,0}$ においては $\mathbb{B}$ と中心電荷 7/10 の σ-型ヴィラソロ元の間にコンウェイ・宮本対応が成立しています。より強く，次の一対一対応が成り立ちます。

定理 2.1. ([HLY12]) 宮本の自己同型 $e \mapsto \sigma_e$ により $VB^{\natural,0}$ に含まれる $c = 7/10$ σ-型ヴィラソロ元と $\mathbb{B} = \mathrm{Aut}(VB^{\natural,0})$ の間には一対一対応が成立する。

---

[7] 部分代数 A に対し，$\mathrm{Com}_V A$ は V における A の交換団 (commutant) を表します。今の場合，$\mathrm{Com}_{V^\natural}\langle e\rangle = \mathrm{Ker}_{V^\natural}(\omega - e)_{(0)} = \mathrm{Ker}_{V^\natural}\mathrm{o}(\omega - e)$ が成り立ちます。

注釈 2.2. この定理において σ-型という条件は落とすことはできません。$VB^{\natural,0}$ には σ-型と非 σ-型の $c = 7/10$ ヴィラソロ元がありますが，後者に付随する宮本の自己同型 τ_e は $\mathbb{B}$ における 2B 共役類に属すからです。

この定理から $\mathbb{B}$ の 2A 元を調べるには，$VB^{\natural,0}$ の $c = 7/10$ σ-型ヴィラソロ元を調べればよいことが分かります。最も基本的な問題として，二つの $c = 7/10$ σ-型ヴィラソロ元で生成される $\mathbb{B}$ の二面体部分代数を分類する問題が考えられます。イジング元の場合と同様に，佐久間型の定理が成立することが期待されますが，$c = 7/10$ の場合フュージョン規則が $c = 1/2$ の場合よりも複雑で，佐久間の定理の証明をそのまま読み替えることはできません。ここではベビーモンスターの場合には超代数構造が入ることに着目して，拡大グライス代数を用いて佐久間型の定理を導きます。そのために次小節で拡大グライス代数について解説します。

2.2 拡大グライス代数

ここでは次のような頂点作用素超代数を考えます。

仮定 2. 頂点作用素超代数 $V = V^0 \oplus V^1$ は次の条件を満たしている。
(1) V は $\mathbb{R}$ 上で定義されている。
(2) V^0 は $V^0 = \bigoplus_{n\geq 0} V_n$, $V_0 = \mathbb{R}\mathbb{1}$, $V_1 = 0$ なる次数分解を持つ。
(3) V^1 は $h \in \mathbb{Z}_{\geq 0} + 1/2$ があって $V^1 = \bigoplus_{n\geq 0} V_{n+h}$, $V_h \neq 0$ なる次数分解を持つ。
(4) V 上の不変内積は $(\mathbb{1}|\mathbb{1}) = 1$ および $a \in V_h$ に対して $a^*_{(n)} = a_{2h-n-2}$ なる正規化のもとで正定値である。

V の部分空間 $V_2 \oplus V_h$ に積を $a, b \in V_2 \subset V^0$, $u, v \in V_h \subset V^1$ に対して

$$ab := a_{(1)}b, \qquad au := a_{(1)}u, \qquad ua := u_{(1)}a, \qquad uv := u_{(2h-3)}v \tag{2.3}$$

として定義します。このとき $V_2 \oplus V_h$ は V^0 のグライス代数を部分代数として含む可換非結合的代数になります。これを頂点作用素超代数 $V = V^0 \oplus V^1$ の**拡大グライス代数**と呼びます (cf. [Y14])。ベビーモンスター頂点作用素超代数 $VB^\natural = VB^{\natural,0} \oplus VB^{\natural,1}$ は $h = 3/2$ として仮定2を満たしています。以下では $VB^\natural$ の拡大グライス代数を考えます。グライス代数においてヴィラソロ元は冪等元に対応しますが，拡大グライス代数では冪等元の平方根を取ることができます。t を $\mathbb{B}$ の 2A 元するとき，$VB^{\natural,1}$ のトップレベル ${VB^{\natural,1}}_{3/2}$ は $C_{\mathbb{B}}(t)$-加群として次のように分解します (cf. [ATLAS]):

$$\begin{aligned} {VB^{\natural,1}}_{3/2} &= \underline{4371} && (\mathbb{B}\text{-加群}) \\ &= \underline{1} + \underline{1938} + \underline{2432} && (C_{\mathbb{B}}(t)\text{-加群}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

a_t を t に対応する $VB^{\natural,0}$ の $c = 7/10$ σ-型ヴィラソロ元とするとき，上の分解において $C_{\mathbb{B}}(t)$-不動点 $\underline{1}$ が a_t の平方根 $x_t \in {VB^{\natural,1}}_{3/2}$ を与えています。実際に計算すると以下のよ

うになります (cf. [Y14])。

$$
\begin{array}{rcccccc}
VB^{\natural,1}{}_{3/2} & = & \underline{\mathbf{1}} & + & \underline{\mathbf{1938}} & + & \underline{\mathbf{2432}} \\
t & : & 1 & & 1 & & -1 \\
o(a_t) & : & 3/2 & & 1/10 & & 0 \\
(-1)^{10o(a_t)} & : & -1 & & -1 & & 1
\end{array}
\tag{2.5}
$$

この x_t を t の**軸平方根**と呼ぶことにします[8]。a_t の平方根 x_t が $VB^{\natural}$ において生成する部分代数 $\langle x_t\rangle$ はヴィラソロ頂点作用素代数 $L(7/10)$ の超代数への拡大 $L(7/10,0)\oplus L(7/10,3/2)$ になっており，ここには $N=1$ ヴィラソロ頂点作用素超代数の構造が入ります ([Y14])。$\theta=(-1)^{L(0)}$ を超代数 $VB^{\natural}=VB^{\natural,0}\oplus VB^{\natural,1}$ の自然な対合とすると $\mathrm{Aut}(VB^{\natural})=\langle\theta\rangle\times\mathrm{Aut}(VB^{\natural,0})\simeq 2\times\mathbb{B}$ となっており，$VB^{\natural}$ 上 $t=-(-1)^{10o(a_t)}=\theta\sigma_{a_t}$ が成り立ちます。以上をまとめると，$\mathbb{B}$ の場合のコンウェイ・宮本対応は超代数を用いて次のように定式化することができます。

定理 2.3. ([HLY12, Y14]) $VB^{\natural}$ に含まれる $N=1$ $c=7/10$ ヴィラソロ頂点作用素超部分代数と $\mathbb{B}\subset\mathrm{Aut}(VB^{\natural})$ の 2A 元の間には一対一対応がある。この対応は θ を超代数 $VB^{\natural}$ の自然な対合として，部分代数の生成元である軸平方根 $\pm x_t$ に対して $\pm x_t\mapsto\theta\sigma_{x_t^2}$ と定めることで与えられる。

2.3 超代数における佐久間型定理

前小節でみたように，超代数の場合には軸ベクトルの平方根がとれますが，軸ベクトルではなく軸平方根を用いると佐久間型の定理を簡単に導くことができます[9]。以下が本稿の主定理になります。

定理 2.4. $V=V^0\oplus V^1$ を $h=3/2$ として仮定 2を満たす頂点作用素超代数とし，e,f を V^0 における相異なる $c=7/10$ ヴィラソロ元，$x,y\in V^1$ を V の拡大グライス代数における e,f の平方根とする。このとき次が成り立つ。
(1) e,f は V^0 上 σ-型である。
(2) x,y の生成する部分代数の拡大グライス代数構造は全部で 4 通りある。
(3) V^0 上 $\sigma_e\sigma_f$ の位数は 4 以下となる。

上の主張において $\langle x,y\rangle$ は $\langle e,f\rangle$ の拡大になっており，$\langle x,y\rangle$ が決定できたことから $\langle e,f\rangle$ も決定できたことになります。$\langle x,y\rangle$ はいわば二面体部分代数の超代数版になります。(3) を $VB^{\natural}$ に適用すれば，$\mathbb{B}$ の $\{3,4\}$-互換性を頂点作用素超代数の枠組みで導くことができます。これはすでに超代数を用いない場合に [HLY12] で示されていることですが，超代数の枠組みでも定理 2.4として定式化することができます。

[8] 平方根なので符号の選び方によって二通り取り方があります。
[9] 軸平方根を考えずに軸ベクトルだけで考えても証明できると思いますが，$\mathbb{B}$ への応用を考えた場合，このように定式化した方がよいと考えています。

参考文献

[ATLAS] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker and R.A. Wilson, ATLAS of finite groups, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[C85] J.H. Conway, A simple construction for the Fischer-Griess monster group. *Invent. Math.* **79** (1985), 513–540.

[FLM88] I.B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex Operator Algebras and the Monster, Academic Press, New York, 1988.

[G82] R.L. Griess, The friendly giant, *Invent. Math.* **69** (1982), 1–102.

[H10] G. Höhn, The group of symmetries of the shorter moonshine module. *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.* **80** (2010), no. 2, 275–283.

[HLY12] G. Höhn, C.H. Lam and H. Yamauchi, McKay's E_7 observation on the Babymonster, *Internat. Math. Res. Notices* **2012** (2012), 166–212. doi:10.1093/imrn/rnr009

[LYY05] C.H. Lam, H. Yamada and H. Yamauchi, McKay's observation and vertex operator algebras generated by two conformal vectors of central charge 1/2. *Internat. Math. Res. Papers* **3** (2005), 117–181.

[Ma01] A. Matsuo, Norton's trace formulae for the Griess algebra of a vertex operator algebra with larger symmetry. *Commun. Math. Phys.* **224** (2001), 565–591.

[Mi96] M. Miyamoto, Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras. *J. Algebra* **179** (1996), 528–548.

[S] S. Sakuma, 6-transposition property of τ-involutions of vertex operator algebras. *Internat. Math. Res. Notices* **2007**, no. **9**, Art. ID rnm 030, 19 pp.

[SY] S. Sakuma and H. Yamauchi, Vertex operator algebra with two Miyamoto involutions generating S_3. *J. Algebra* **267** (2003), 272–297.

[W93] W. Wang, Rationality of Virasoro vertex operator algebras. *Internat. Math. Res. Notices* **71** (1993), 197–211.

[Y05] H. Yamauchi, 2A-orbifold construction and the baby-monster vertex operator superalgebra. *J. Algebra* **284** (2005), 645–668.

[Y14] H. Yamauchi, Extended Griess algebras and Matsuo-Norton trace formulae, Conformal Field Theory, Automorphic Forms and Related Topics, Springer, 2014.