自然数の分割と MOCK THETA FUNCTION

杉山健一
千葉大学理学研究科

1. はじめに

"The mock theta-functions give us tantalizing hints of a grand synthesis still to be discovered. Somehow it should be possible to build them into a coherent group theoretical structure, analogous to the structure of modular forms which Hecke built around the old theta-fundtions of Jacobi. This remains a challenge for the future. My dream is that I will live to see the day when our young physicists, struggling to bring the predictions of superstring theory into correspondence with the facts of nature, will be led to enlarge their analytic machinery to include mock theta-functions... But before this can happen, the purely mathematical explanation of mock-modular forms and their mod-symmetries must be carried a great deal further. " (Freeman Dyson 1987)

Ramanujan によって発見された Mock(=Fake) Theta function は整数論、組み合わせ論、幾何学、素粒子物理など、様々な分野に出現する関数であるが、未だ謎が多い。彼は、17 個の Mock Theta function を挙げたが、その正確な定義は述べなかった。そのうちの一つが

$$f(q) := 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{m^2}}{(1+q)^2 \cdots (1+q^m)^2}$$

であり、これは自然数の分割に伴う母関数

$$P(q) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{m^2}}{(1-q)^2 \cdots (1-q^m)^2}$$

と極めて良く似ている（分母における各項の符号が異なるだけ）が、その性質は大きく異なる。実際、$P(q)$ は重さ 12 の尖点形式 $\Delta(q) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$ を用いて

$$P(q) = \frac{q^{1/24}}{\eta(q)}, \quad \eta(q) = \Delta(q)^{1/24},$$

と表されるので、ほぼ重さ $-1/2$ の保型形式となっている。しかし、$f(q)$ の保型性は謎であった。その保型性は Zwegers([8]) によって明らかにされたが、このレポートでは彼の結果の解説を試みる（**定理 3.2**）。簡単に彼の結果を述べると、

$$\text{Mock Theta function} = \text{重さ } \frac{1}{2} \text{ の Maass 形式} + \text{重さ } \frac{3}{2} \text{ の Theta 関数の周期積分}$$

となるが、このような構造は Maass 形式にも現れる ([2])。すなわち 1 より大きい半整数 k について、重さ $2-k$ の Maass 形式 f のフーリエ展開は

$$f(z) = f_+(z) + f_-(z)$$

と正則部分 $f_+(z)$ と非正則部分 $f_-(z)$ に分解される。このとき、$f_-(z)$ は重さ k の尖点形式の周期積分となるので $f_+(z)$ は Mock Theta function と同様の表示を持つ（本稿第 3 章参照)。したがって、我々は $f_+(z)$ を Mock modular form と呼ぶことにする。

$$G_{1/2}(q) := \sum_{d=0}^{\infty} h(d)q^d \quad h(d) := \text{判別式が } -d \text{ の Hurwitz 類数}$$

は Mock modular form の一例であるが、これは複素射影平面上に定義されたランク 2 の半安定ベクトル束の moduli 空間列の Euler 数の母関数に表れる（第 4 章参照)。

次章以降の構成は、第 2 章で自然数の分割の母関数 $P(q)$ の Euler 級数表示について解説し、第 3 章で Ramanujan による (True)Theta function と Mock Theta function あるいは Mock modular form を紹介する。第 4 章では、これらの関数と (Vafa-Witten 予想と関係する）幾何学との関わりについて解説する。

本稿は、金沢大学、岡山大学、東北大学で行った講演に基づきますが、幾つかの訂正と補足を加えました。特に、岡山大学の山田裕史教授は講演における誤りをご指摘下さり、ここに感謝を述べさせて頂きます。

2. 自然数の分割の母関数

この章では自然数の分割に伴う母関数について解説する。より詳細な取り扱いを知りたい読者は、

(1) G. Andrews and K. Eriksson, Integer Partitions, Cambridge
(日本語訳：佐藤文広訳、整数の分割、数学書房)

(2) G. Andrews, R. Askey, R. Roy, Special Functions, Cambridge

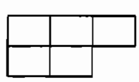
を参照して下さい。さて、我々は自然数 n の分割の方法の総数を $p(n)$ で表す。例えば、$n=5$ とすると

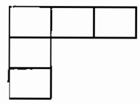
$$5 = 5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1,$$

より $p(5) = 7$ となるが、各分割に現れる自然数をその分割の和因子とよぶ。例えば、分割 $5 = 2+2+1$ の和因子は $\{1, 2\}$ となる。自然数の分割を列挙するときは、和因子が広義単調減少となるように並べると便利である。すると、分割

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_r, \quad a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_r,$$

は、箱を第 1 行に a_1 個、第 2 行に a_2 個、$\cdots$、第 r 行に a_r 個並べることにより、サイズ n の Ferrers 図形と 1 対 1 に対応する。例えば $5 = 3+2$、$5 = 3+1+1$ に対応する図形は、それぞれ





となる。サイズ n の Ferrers 図形は n 次対称群の規約表現のパラメーターとなっているので、$p(n)$ は n 次対称群の規約表現の個数に等しい。我々は数列 $\{p(n)\}_n$ そのものよりも、その母関数

$$P(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n, \quad p(0) = 1$$

に興味がある。第 4 章で解説するように、この形式的巾級数は代数曲面の 0 次元閉部分 scheme を parametrize する Hilbert modular varieties の系列から自然に得られる。また次章で、このレポートの表題にある Mock theta function との関係を解説するが、ここではその準備として $P(q)$ を Euler 級数で表す。

まず、幾何級数 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = (1-q)^{-1}$ を用いて、Euler による無限積表示

$$P(q) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n_1,\cdots,n_r \geq 0} q^{1\cdot n_1+\cdots+r\cdot n_r} = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} q^{n\cdot m} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} \tag{1}$$

が得られる。自然数 n の分割で、条件 C を満たすものを $p(n|C)$ と表すことにしよう。例えば 5 を奇数のみを用いて分割する方法は $5 = 5 = 3+1+1 = 1+1+1+1+1$ の 3 通り存在するので、$p(5|$ 和因子はすべて奇数$) = 3$ となる。また和因子がすべて異なるように分割する方法は $5 = 5 = 4+1 = 3+2$ となるので、$p(5|$ 和因子はすべて互いに相異なる$) = 3$ がわかる。実は Euler により、一般に任意の自然数 n について

$$p(n|\text{和因子はすべて奇数}) = p(n|\text{和因子はすべて互いに相異なる})$$

となることが知られているが、これは母関数を用いて以下のように示される：

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} p(n|\text{和因子はすべて奇数})q^n &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{2n-1}} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} 1-q^{2n} / \prod_{n=1}^{\infty} 1-q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^{2n}}{1-q^n} = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p(n|\text{和因子はすべて互いに相異なる})q^n.
\end{aligned}$$

また、自然数 m を固定したとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n|\text{最大和因子は } m \text{ 以下})q^n = \prod_{n=1}^{m} \frac{1}{1-q^n} \tag{2}$$

となることが容易に確認される。Ramanujan の Euler 級数表示といわれる、以下の等式は第 3 章で重要な役割を担う。

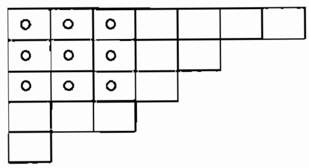
定理 2.1. *(Ramanujan)*

$$P(q) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{m^2}}{(1-q)^2 \cdots (1-q^m)^2}.$$

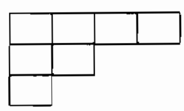
ここでは組み合わせ論を用いた証明を与える。

定義 2.1. *(Durfee 正方形)* 自然数 n の分割 $n = a_1 + \cdots + a_r$, $(a_1 \geq \cdots \geq a_r \geq 1)$ に対応する *Ferrers* 図形 F に含まれる最大の正方形（ただし正方形の上辺と左辺は F のそれと一致する：以下の例を参照）をその分割の Durfee 正方形と呼ぶ。

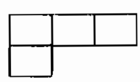
例 2.1. 分割 $20 = 7 + 5 + 4 + 3 + 1$ に対応する *Ferrers* 図形に含まれる *Durfee* 正方形は $\circ$ の入った箱を集めた図形となる：



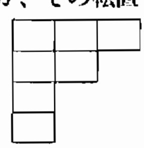
この例が示すように、自然数の分割に対して Durfee 正方形は一意に決まる。さて自然数 n の分割を表す Ferrers 図形 F に含まれる Durfee 正方形 D のサイズを $m \times m$ とすると、$F \setminus D$ は二つの Ferrers 図形、すなわち D の右に位置する F_r と下に位置する F_d の連結和となる。例えば**例 2.1** では、F_r は



となり、F_d は



となる。ここで、F_r は和因子の個数が m 以下の分割に対応し、F_d は最大和因子が m 以下の分割に対応することに注意する。ところで、自然数の分割を Ferrers 図形に表したとき、その転置（対角線に関する折り返し；行列における転置と同じ操作）をとると、和因子の個数が m 以下の分割と最大和因子が m 以下の分割の間に 1 対 1 対応が存在することがわかる。例えば F_r は分割 $7 = 4 + 2 + 1$ を表すが、その転置：



は、分割 $7 = 3 + 2 + 1 + 1$ を表し最大和因子は 3 となる。このようにして 1 対 1 対応

$\{n\text{の分割}\} \simeq \sqcup_{m=1}^{\infty} \sqcup_{r+d=n-m^2} \{r\text{の分割で最大和因子が } m \text{ 以下}\} \times \{d\text{の分割で最大和因子が } m \text{ 以}$

が得られる。

定理 2.1 の証明： 右辺の q^n $(n \geq 1)$ の係数は、(2) より

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r+d=n-m^2} p(r|\text{ 最大和因子} \leq m) \cdot p(d|\text{ 最大和因子} \leq m)$$

となるが、上記の 1 対 1 対応よりこれは $p(n)$ に等しい。

□

3. Maass 形式と Mock Theta Function

Mock Theta function を解説する前に、Ramanujan が考えていた (True) Theta function について解説する。詳細は

- B.C.Berndt, Number Theory in the Spirit of Ramanujan, AMS

の第 1 章を参照してください。

定義 3.1. *(Ramanujan's Theta function)* $|ab| < 1$ となる複素数 a, b について *Ramanujan's Theta function* $f(a,b)$ を

$$f(a,b) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{n(n+1)/2} b^{n(n-1)/2}$$

で定義する。

$|q| < 1$ となる複素数 q について、特別かつ重要な 3 つの Theta function が存在する：

$$\varphi(q) := f(q,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \tag{3}$$

$$\psi(q) := f(q,q^3) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2} \tag{4}$$

$$f(-q) := f(-q,-q^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(3n-1)/2} \tag{5}$$

これら 3 つは無限積表示を持つことが Jacobi's triple product identity ([1]**Theorem 1.3.3**) からわかる。

定理 3.1. *(*[1]**Corollary 1.3.4***)*

$$\begin{aligned}
\varphi(q) &= (-q;q^2)_\infty^2 (q^2;q^2)_\infty \\
\psi(q) &= \frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty} \\
f(-q) &= (q;q)_\infty .
\end{aligned}$$

ただし、

$$(a;q)_\infty := \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k).$$

特に最後の等式は Euler's Pentagonal Number Theorem と呼ばれる：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n(3n-1)/2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n(3n+1)/2}=(q;q)_\infty.$$

$\varphi(q)$ は良く知られたように、重さ $\frac{1}{2}$ の保型形式である。また、$\Delta(q)=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$ は重さ 12 の保型形式であるから、$\eta(q):=\Delta(q)^{1/24}=q^{1/24}(q;q)_\infty$ も重さ $\frac{1}{2}$ の保型形式となる。したがって**定理 2.1** から

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{m^2}}{(1-q)^2\cdots(1-q^m)^2}(=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^n})$$

は重さが $-1/2$ の保型形式にほぼ等しい。これと類似の Rogers-Ramanujan 等式

$$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{m^2}}{(1-q)\cdots(1-q^m)},$$

$$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{m+m^2}}{(1-q)\cdots(1-q^m)}.$$

に現れる級数は、本質的に楕円曲線の L 関数の岩澤理論で重要な役割を果たす modular unit（あるいは Siegel unit）と呼ばれる保型関数である。しかし、一般に右辺のような Euler 級数と呼ばれる無限級数が保型性を持つことは期待できない。にも関わらず Mock Theta function と呼ばれる特別な級数については、Zwegers により保型関数との関係が明らかにされた [8]。

以下、[6] に沿って Mock Theta function と Mock modular form の理論の概略を紹介する。詳細および関連する文献は [6] を参照してください。

Ramanujan は Hardy への手紙で、Mock Theta function の 17 個の例を述べている（ただし Mock Theta function の定義は述べられていない）。そのうちの 2 つを Ramanujan の記号にしたがって挙げると（記号が (5) と重なってしまいますが、ご容赦ください）：

$$f(q):=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{m^2}}{(1+q)^2\cdots(1+q^m)^2},$$

$$\omega(q):=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q^{2m^2+2m}}{(1-q)^2(1-q^2)^2\cdots(1-q^{2m+1})^2}.$$

彼は、また $P(q)$ と $f(q)$ を補間する Euler 級数,

$$\Omega(t;q):=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{m^2}}{(1-tq)^2\cdots(1-tq^m)^2}.$$

について深い考察を行っている (明らかに、$P(q)=\Omega(1;q)$, $f(q)=\Omega(-1;q)$)。$f(q)$ は通常の保型形式とはならないが、Watson がその複雑な変換法則を得ている。後に Zwegers がベクトル値の保型形式を導入して簡潔な形にまとめた。以下、彼の結果を紹介する。

記号 3.1. (1)

$$z = x + iy, \quad q = \exp(2\pi iz).$$

(2)

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}).$$

(3) 半整数 k に対して、

$$\Delta_k = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + 2iky\frac{\partial}{\partial \bar{z}} : \text{重み } k \text{ のラプラシアン}.$$

(4)

$$\Gamma_0(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \,|\, c \equiv 0(N)\}.$$

(5)

$$\epsilon_d = \begin{cases} 1, & if\, d \equiv 1 \ (mod\ 4) \\ i, & if\, d \equiv 3 \ (mod\ 4) \end{cases}.$$

定義 3.2. k を半整数とする。上半平面 $\mathbb{H}$ 上の複素数値関数 M が、以下の条件を満たすとき、重さ k、レベル N の *Maass* 形式と呼ぶ（ただし $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$ の時は $4|N$ とする）：

(1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ に対して、

$$M(\frac{az+b}{cz+d}) = \begin{cases} (cz+d)^k M(z), & if\, k \in \mathbb{Z} \\ \left(\frac{c}{d}\right)^{2k} \epsilon_d^{-2k}(cz+d)^k M(z), & if\, k \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

(2)

$$\Delta_k M = 0.$$

(3) ある多項式 $p_M \in \mathbb{C}[q^{-1}]$ が存在し、$y >> 0$ について

$$M(z) - p_M(z) = O(e^{-\alpha y}), \quad \exists \alpha > 0.$$

（この条件は、すべての尖点（= 無限遠点）について成立すると仮定する。）

M が正則関数の時は、古典的な保型形式である。条件 (1) より、各尖点で M を q についてフーリエ級数展開できるが、すべての尖点で級数展開が q の正巾のみからなるとき、M を尖点形式とよぶ。p_M は M の主要部と呼ばれ、M が条件 (1) と (2) を満たす（つまり無限遠方での増大条件無しの）とき、弱 Maass 形式と呼ばれる。

定義 3.3. （周期積分）f を上半平面 $\mathbb{H}$ 上定義された連続関数とする。半整数 ν に対して、その周期積分を

$$I_\nu(f)(z) = \int_{-\bar{z}}^{i\infty} \frac{f(\tau)}{(-i(\tau+z))^\nu} d\tau$$

と定める（ただし、積分が定義されるとき）。

$z \in \mathbb{H}$ として、重み 3/2 の Theta function $\{g_i\}_{i=1,2,3}$ を

$$\begin{aligned} g_0(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (n+\frac{1}{3}) e^{3\pi i(n+\frac{1}{3})^2 z}, \\ g_1(z) &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+\frac{1}{6}) e^{3\pi i(n+\frac{1}{6})^2 z}, \\ g_2(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+\frac{1}{3}) e^{3\pi i(n+\frac{1}{3})^2 z} \end{aligned}$$

と定義し、

$$F(z) = \begin{pmatrix} q^{-\frac{1}{24}} f(q) \\ 2q^{\frac{1}{3}}\omega(q^{\frac{1}{2}}) \\ 2q^{\frac{1}{3}}\omega(-q^{\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \quad I_\nu(\mathrm{g})(z) = \begin{pmatrix} I_\nu(g_1)(z) \\ I_\nu(g_2)(z) \\ I_\nu(g_3)(z) \end{pmatrix}$$

とおく。

定理 3.2. [8]

$$H(z) := F(z) - 2i\sqrt{3} I_{1/2}(\mathrm{g})(z)$$

とおくと、H はベクトルに値を持つ重み 1/2 の *Maass* 形式。すなわち、

(1)

$$\Delta_{1/2} H = 0$$

(2)

$$H(z+1) = \begin{pmatrix} \zeta_{24}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_3 \\ 0 & \zeta_3 & 0 \end{pmatrix} H(z), \quad H(-\frac{1}{z}) = \sqrt{-iz} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} H(z).$$

(ただし ζ_N は 1 の原子 N 乗根)

が成り立つ。

この定理から(いずれもベクトル値)、

(6) Mock Theta function = 重さ $\frac{1}{2}$ の Maass 形式 + 重さ $\frac{3}{2}$ の Theta 関数の周期積分,

となることがわかった。この関係式はスカラー値 Maass 形式でも成立するが、以下その事実を紹介する。

定義 3.4. *(不完全 Γ 関数)* $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ について

$$\Gamma(\alpha; x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

と定める。

一般に 1 より大きい半整数 k について重さ $2-k$ の Maass 形式 f のフーリエ展開は

(7) $$f(z) = f_+(z) + f_-(z),$$

ただし

(8) $$f_+(z) = \sum_{n > -\infty} c_f^+(n) q^n, \quad f_-(z) = \sum_{n<0} c_f^-(n) \Gamma(k-1, 4\pi |n| y) q^n,$$

と分解することが知られている ([2]Section 3)。$f_+(z)$ と $f_-(z)$ は、それぞれ f の正則部分、f の非正則部分と呼ばれる。ここで、整数論と関係する Maass 形式の例を挙げよう（次章でも用いられる)。整数係数の斉次 2 次形式 $Q(x,y) = ax^2+bxy+cy^2$ と $Q'(x,y) = a'x^2+b'xy+c'y^2$ が変数変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{Z})$$

で移りあう時に両者を同値と定義すると、判別式 $D = b^2 - ac$ は同値類のみに依存し、$\mathcal{Q}_D$ で判別式 D の整数係数斉次 2 次形式の同値類の集合を表す。正の整数 d に対して Hurwitz 類数 $h(d)$ を

$$h(d) := \sum_{C \in \mathcal{Q}_{-d}} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(C)|}$$

と定める（ただし、$\mathrm{Aut}(C) \subset PSL_2(\mathbb{Z})$ は C の固定群）。例えば $h(3) = \frac{1}{3}$, $h(4) = \frac{1}{2}$, $h(7) = 1$。また、形式的に $h(0) := -\frac{1}{12}$ とおく。このとき

$$G_{1/2}(q) := \sum_{d=0}^{\infty} h(d) q^d$$

は重さ 1/2 の Maass 形式の正則部分となる（この q-series は楕円曲線の moduli における Heegner 因子と関係が深い)。実際

$$G^*_{1/2}(q) := G_{1/2}(q) + \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| \Gamma(\frac{1}{2}; 4\pi n^2 y) q^{-n^2}, \quad q = e^{2\pi i z}$$

は重さ 1/2 の Maass 形式であることが知られている。

以下 Maass 形式の非正則部分は、尖点形式の周期積分と解釈されることを説明する。そのために

(1) $H_k(N)$：重さ k でレベル N の Maass 形式からなる集合、
(2) $S_k(N)$：重さ k でレベル N の尖点形式からなる集合、

とおく。いずれも $\mathbb{C}$ 上の線型空間となり、半整数 w について

$$\xi_w(f) := 2iy^w \frac{\partial \overline{f}}{\partial z},$$

と線型微分作用素を定める。

定理 3.3. *([2]Proposition 3.2.)* 1より大きい半整数 k について、ξ_{2-k} は全射線型写像

$$\xi_{2-k} : H_{2-k}(N) \to S_k(N)$$

を引き起こす。さらに、*(8)* の記号を用いて

$$\xi_{2-k}(f) = -(4\pi)^{k-1}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{c_f^-(-n)}n^{k-1}q^n, \quad f \in H_{2-k}(N) \tag{9}$$

が成り立つ。

$n \geq 1$ に対し、

$$\int_{-\bar{z}}^{i\infty}\frac{e^{2\pi i n\tau}}{(-i(\tau+z))^{2-k}}d\tau = \int_{2iy}^{i\infty}\frac{e^{2\pi i n(\tau-z)}}{(-i\tau)^{2-k}}d\tau = i(2\pi n)^{1-k}\Gamma(k-1;4\pi ny)q^{-n}$$

となるので、$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ について

$$I_{2-k}(f) = i(2\pi)^{1-k}\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma(k-1;4\pi ny)a_n n^{1-k}q^{-n} \tag{10}$$

が成り立つ。(8)、(9)、(10) を合わせると

$$f^-(z) = i(-2)^{k-1}I_{2-k}(\xi_{2-k}(f)), \quad f \in H_{2-k}(N)$$

が得られる。このように Maass 形式の非正則部分は尖点形式の周期積分となることがわかった。したがって $f \in H_{2-k}(N)$ ($k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $k > 1$) について、(6) と類似の式

$$f^+ = f - i(-2)^{k-1}I_{2-k}(\xi_{2-k}(f)),$$

が成り立つ。このことから f^+ を重さ k の Mock modular form と呼ぶことにする。

例 3.1. $G_{1/2}$ は重さ 1/2 の *Mock modular form*。

もし k が 2 以上の整数のときは、次の事実が知られている。

定理 3.4. *([6]Theorem.4.7.)* $2 \leq k \in \mathbb{Z}$ とすると、$f \in H_{2-k}(N)$ に対して $D^{k-1}(f) = D^{k-1}(f^+)$ が成り立ち、これらは重さ k の弱保型形式となる。ここで D は

$$D = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}\left(= q\frac{d}{dq}\right)$$

で定義される線型微分作用素。

4. 幾何学と Mock Theta Function

関数 $P(q)$ は、組み合わせ論のみならず、幾何学においてもしばしば登場する。

定義 4.1. V を、可換体 F 上定義された次数付き線型空間とし、

$$V = \oplus_{n=0}^{\infty} V_n, \quad \dim V_n < \infty$$

をその次数による分解とする。このとき V の Hilbert 多項式 $\chi_V(q)$ を

$$\chi_V(q) := \sum_{n=0}^{\infty}\dim V_n \cdot q^n$$

と定める。

補題 4.1. V と W とそれぞれ次数付き線型空間とすると、

$$\chi_{V\oplus W}(q) = \chi_V(q) + \chi_W(q), \quad \chi_{V\otimes W} = \chi_V(q)\cdot\chi_W(q)$$

が成り立つ。

一般に次数付き線型空間 V から構成される対称代数あるいは歪対称代数を、それぞれ $\mathrm{Sym}(V)$ あるいは $\mathrm{Alt}(V)$ と表す。$\deg t = 1$ とすると、$\mathcal{A} := \mathrm{Alt}(t\mathbb{Q}[t])$ あるいは $\mathcal{S} := \mathrm{Sym}(t\mathbb{Q}[t])$ について、次数を保つ自然な同型

$$\mathcal{A} \simeq \wedge^{\cdot}(\oplus_{n=1}^{\infty}\mathbb{Q}dx_n), \quad t^n \to dx_n. \tag{11}$$

および

$$\mathcal{S} \simeq \mathbb{Q}[\{x_n\}_{n\geq 1}], \quad t^n \to x_n \tag{12}$$

が存在する。容易に観察されるように $\dim\mathcal{S}_n = p(n)$、$\dim\mathcal{A}_n = p(n|$ 和因子はすべて相異なる$)$ なので、

$$\chi_{\mathcal{A}}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n|\text{ 和因子はすべて相異なる}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n), \tag{13}$$

$$\chi_{\mathcal{S}}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = P(n) \tag{14}$$

がわかる。このような無限次元線型空間は代数曲面の 0 次元閉部分 scheme を parametrize する Hilbert modular schemes から自然に得られることが、Grojnowski[4], 中島 [5] によって指摘された。ここでは、その事実を簡単に振り返る。

X を $\mathbb{C}$ 上定義された非特異射影代数曲面とし、$X^{[n]}$ を長さ n の $\mathcal{O}_X$ 加群の moduli 空間とすると、$X^{[n]}$ は $2n$ 次元の非特異射影代数多様体で、X の n 次対称積 $\mathrm{Sym}X^n$ と双有理同値となる。$X^{[0]}$ は 1 点と定義すると、無限次元線型空間 $\mathbf{H}_X := \oplus_{n=0}^{\infty}H^{\cdot}(X^{[n]}, \mathbb{Q})$ は $\mathcal{S}$ と $\mathcal{A}$ を用いて表される。実際

$$H^+(X) := \oplus_{n\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)}H^n(X,\mathbb{Q}), \quad H^-(X) := \oplus_{n\equiv 0(\mathrm{mod}\, 1)}H^n(X,\mathbb{Q}), \quad d_{\pm}(X) = \dim H^{\pm}(X)$$

とおくと、同型

$$\mathbf{H}_X \simeq \mathrm{Sym}(H^+(X)\otimes t\mathbb{Q}[t])\otimes\mathrm{Alt}(H^-(X)\otimes t\mathbb{Q}[t]) \simeq \mathcal{S}^{\otimes d_+(X)}\otimes\mathcal{A}^{\otimes d_-(X)}$$

が存在し、**補題 4.1** および Euler の等式より

$$\chi_{\mathbf{H}_X}(q) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^n)^{d_+(X)}(1-q^{2n-1}))^{d_-(X)}}$$

が従う。特に X が有理曲面のときは

$$\chi_{\mathbf{H}_X}(q) = P(q)^{2+b_2(X)}, \quad b_2(X) = \text{the second Betti number}$$

がわかる。多様体の族 $\{X^{[n]}\}_n$ の間には「代数的対応」が存在し、この代数的対応から $\mathbf{H}_X$ は Heisenberg 代数の表現空間となることが判明する。一方、$H^{\cdot}(X^{[n]}, \mathbb{Q})$ には、代数的サイ

クルで生成される部分空間 $\mathcal{A}^{\cdot}(X^{[n]})$ や Hodge サイクルで生成される部分空間 $\mathcal{H}^{\cdot}(X^{[n]})$ など、数論幾何的に興味深い部分空間が存在する。$X^{[n]}\ (\forall n)$ についての Hodge 予想は $\mathcal{A}^{\cdot}(X^{[n]}) = \mathcal{H}^{\cdot}(X^{[n]})\ (\forall n)$ が成立するかを尋ねることになるが、これは

$$\chi_{\oplus_n \mathcal{A}^{\cdot}(X^{[n]})}(q) = \chi_{\oplus_n \mathcal{H}^{\cdot}(X^{[n]})}(q)$$

と同値となる。特に有理曲面 X については、$\mathbf{H}_X$ に作用する Hodge 群と Heisenberg 代数の表現の可換性（この事実は、Heisenberg 代数の表現が代数的対応に由来することからしたがう）から、

$$\chi_{\oplus_n \mathcal{A}^{\cdot}(X^{[n]})}(q) = \chi_{\oplus_n \mathcal{H}^{\cdot}(X^{[n]})}(q) = P(q)^{2+b_2(X)}$$

が成立することがわかるので（[7]**Remark 4.8**)、$X^{[n]}\ (\forall n)$ について Hodge 予想が成り立つ。

最後に、幾何学に由来する Mock modular form の例を述べる。S を $\mathbb{C}$ 上定義された非特異射影代数曲面とし、H をそのアンプル因子とする。

定義 4.2. S 上のベクトル束 E が半安定であるとは、

$$\frac{\chi(S, \mathcal{F}(n))}{\mathrm{rank}(\mathcal{F})} \leq \frac{\chi(S, \mathcal{E}(n))}{\mathrm{rank}(\mathcal{E})}$$

が E の任意の部分 $\mathcal{O}_S$ 加群 $\mathcal{F}$ について成り立つことと定義する。ここで

$$\mathcal{F}(n) := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S(H)^{\otimes n}, \quad \chi(S, \mathcal{F}(n)) := \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \dim H^i(S, \mathcal{F}(n))$$

である。

非負整数 d と $c_1 \in H^2(S, \mathbb{Z})$ について、$N_S^H(c_1, d)$ で条件 $c_1(E) = c_1$, $c_2(E) - \frac{c_1(E)^2}{4} = d$ をみたす、S 上のランク２の半安定ベクトル束 E の Moduli 空間を表す。Vafa-Witten により、$c_1 \in H^2(S, \mathbb{Z})$ と H を固定したとき、オイラー数 $e(N_S^H(c_1, d))$ の母関数 $Y_{c_1}^{S,H}(q) = \sum_{d=0}^{\infty} e(N_S^H(c_1, d)) q^d$ は「保型形式」を用いて表されることが予想されている。

定理 4.1. [3]$S = \mathbb{P}^2$、H を超平面としたとき、$c_1 = H$ として

$$e(N_{\mathbb{P}^2}^H(H, d)) = 3h(4d-1)$$

が成り立つ。

したがって Vafa-Witten 予想が正しければ、$Y_H^{\mathbb{P}^2, H}(q) = 3\sum_{d=0}^{\infty} h(4d-1) q^d$ は「保型形式」で表されるはずであるが、これは $q = e^{2\pi i z}$ とおいて z の関数と見ることにより、前章で解説した事実と**定理** **4.1** からの帰結；

$$Y_H^{\mathbb{P}^2, H}(2z) = \frac{3e^{2\pi i z}}{2}\{G_{1/2}(z) - G_{1/2}(z + \frac{1}{2})\}$$

から従う。

References

[1] B.C. Berndt, Number Theory in the Spirit of Ramanujan. *Student Mathematical Library* 34, AMS.
[2] J.H. Bruinier and J. Funke, On two geometric Theta lifts. *Duke Math. Journal* 125 (2004), 45-90.
[3] A.A. Klyachko. Moduli of vector bundles and numbers of classes. *Functional Analysis and Its Application* 25 (1991), 67-69.
[4] I. Grojnowski, Instantons and affine algebras I, The Hilbert schemes and vertex operators. *Math. Res. Lett.* 3 (1996), 275-291.
[5] H. Nakajima, Heisenberg algebra and Hilbert schemes of points on surfaces. *Ann. of Math.*145 (1997), 379-388.
[6] K. Ono, Moduli of vector bundles and numbers of classes. *Lecture Notes and Project Description* (2013).
[7] K. Sugiyama, On the Hodge conjecture and the Tate conjecture for the Hilbert schemes of an abelian surface. *Mathematische Nachrichten*. 279, No. 1-2(2006), 217-231.
[8] S. Zwegers. Mock theta functions. *preprint arXiv:0807.4834* .