複素既約指標の生成定数は 1 である

ー共同研究：山口大学 飯寄信保 氏ー

千葉大学（教育） 澤辺正人

1 はじめに

この報告は山口大学 飯寄信保氏との共同研究の一部である。一連の研究内容については論文 [1, 2, 3] または報告集 [4, 5] を参照されたい。特にここで報告する内容は [1, Section 5.3] である。

■生成定数の一般論 以下，生成定数 (cf. [1, Definition 3.14]) を復習する。報告集 [4] の中にその解説が既にあることから，個々の詳細は省略する。クイバー $Q = (Q_0, Q_1, s, r)$ と重み関数 $w : Q_1 \longrightarrow \mathbb{Z}$ に対して $\mathbb{Z}$-代数 $\mathsf{UD}(Q, w)$ (cf. [1, Definition 3.3 and Definition 3.14]) を導入する。この代数構造は

$$\mathsf{UD}(Q, w) \cong \left(\sum_{\Delta \in \mathsf{P}_{a \Rightarrow b}} w(\Delta) \cdot \mathbb{Z} \right)_{a, b \in Q_0}$$

のように行列代数の (a, b) 成分 $(a, b \in Q_0)$ にイデアル $I_{a,b} := \sum_{\Delta \in \mathsf{P}_{a \Rightarrow b}} w(\Delta) \cdot \mathbb{Z}$ を張り付けたものになっている (cf. [1, Proposition 3.12])。ここで $\mathsf{P}_{a \Rightarrow b}$ は Q を単なる無向グラフと見なしたときの a から b へのパス全体からなる集合である。言い換えれば，Q の各矢印を両矢印に代えて得られるクイバー $\overline{Q}$ の中での a から b へのパス全体ということになる。元に戻ると，これらのパス $\Delta \in \mathsf{P}_{a \Rightarrow b}$ の重み $w(\Delta) \in \mathbb{Z}$ 全体で生成される $\mathbb{Z}$ のイデアル $I_{a,b}$ が (a, b) 成分に張り付いているのである。ここで $\mathbb{Z}$ は単項イデアル整域であることから，各 $I_{a,b} \neq \{0\}$ に対して正整数の生成元 $\mathsf{s}_{a,b}$ が一意的に定まる。即ち重み $w(\Delta)$ $(\Delta \in \mathsf{P}_{a \Rightarrow b})$ の最大公約数である。これを a, b の**生成定数**と名付ける。一方 $I_{a,b} = \{0\}$ の場合は $\mathsf{s}_{a,b} = 0$ と約束する。

2 複素既約指標の生成定数

■指標のクイバー 有限群 G とその部分群 $H \leq G$ に対して，$\mathrm{Irr}(H)$ を H の複素既約指標全体からなる集合とする。以下，指標から定義されるクイバーを導入する。まず頂点集合として部分群 $H \leq G$ と H の複素既約指標 $\chi \in \mathrm{Irr}(H)$ のペア全体 $(Q_G^{\mathrm{ch}})_0 := \{(H, \chi) \mid H \leq G,\ \chi \in \mathrm{Irr}(H)\}$ を取る。2 つのペア $(K, \theta), (H, \chi) \in (Q_G^{\mathrm{ch}})_0$ に対して $K > H$ かつ $(\theta|_H, \chi)_H \neq 0$ なるときペアの間の矢印 $(K, \theta) \to (H, \chi)$ を定義し，矢印全体の集合を $(Q_G^{\mathrm{ch}})_1$ とする。このとき $Q_G^{\mathrm{ch}} := \big((Q_G^{\mathrm{ch}})_0, (Q_G^{\mathrm{ch}})_1, s, r \big)$ はクイバーを成す。ここで s, r はいつものように定める。さらに矢印 $\alpha = \big((K, \theta) \to (H, \chi)\big)$ に対する重み $w_G^{\mathrm{ch}}(\alpha)$ はその重複度 $(\theta|_H, \chi)_H \neq 0$ で定義する。

■指標の生成定数 クイバー Q_G^{ch} の下で $x, y \in (Q_G^{\mathrm{ch}})_0$ に対する生成定数 $\mathsf{s}_{x,y}$ を改めて確認する。まず各部分群 $H \leq G$ に対して既約指標 $\chi \in \mathrm{Irr}(H)$ がある。2 つの指標 $\theta \in \mathrm{Irr}(K)$ と $\chi \in \mathrm{Irr}(H)$ に対して，誘導と制限を繰り返して得られる θ から χ への Up-Down のパス $\Delta \in \mathsf{P}_{(K,\theta) \Rightarrow (H,\chi)}$ が全て走ったときの重み $w_G^{\mathrm{ch}}(\Delta)$ の最大公約数，即ち重複度の最大公約数が生成定数 $\mathsf{s}_{(K,\theta),(H,\chi)}$ である。

■TGC-群 任意の頂点 $x, y \in (Q_G^{\mathrm{ch}})_0$ に対して $\mathsf{s}_{x,y} = 1$ が成り立つとき，群 G を TGC-群 (Trivial Generating Constant) と呼ぶことにする。さらに特別な頂点として，単位群 $\{e\}$ とその単位指標 $1_{\{e\}}$ のペアを太文字の $\mathbf{1} := (\{e\}, 1_{\{e\}}) \in (Q_G^{\mathrm{ch}})_0$ で表すことにする。

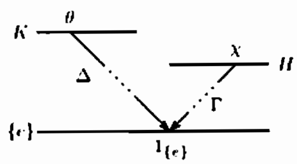
3 複素既約指標の生成定数は 1 である

次の命題を示すことが目標である。

命題 3.1 任意の有限群は TGC-群である。

補題 3.2 任意の頂点 $x \in (Q_G^{\mathrm{ch}})_0$ に対して $s_{x,1} = 1$ ならば G は TGC-群である。

証明 任意の頂点 $x = (K, \theta), y = (H, \chi) \in (Q_G^{\mathrm{ch}})_0$ を取る。仮定から $s_{x,1} = 1$ である。つまり定義に従うと θ から $1_{\{e\}}$ への Up-Down のパス $\Delta \in \mathsf{P}_{x \Rightarrow 1}$ が全て走ったときの重複度 $w_G^{\mathrm{ch}}(\Delta)$ の最大公約数が 1 となる。



即ち重みに関して $\sum_{\Delta \in \mathsf{P}_{x \Rightarrow 1}} m_\Delta w_G^{\mathrm{ch}}(\Delta) = 1$ なる整数係数 1 次結合を得る。一方 $s_{y,1} = s_{1,y}$ も仮定から 1 である。同様に $1_{\{e\}}$ から χ への Up-Down のパス $\Gamma \in \mathsf{P}_{1 \Rightarrow y}$ が全て走ったときの重複度の最大公約数が 1 となる。つまり重みに関して $\sum_{\Gamma \in \mathsf{P}_{1 \Rightarrow y}} n_\Gamma w_G^{\mathrm{ch}}(\Gamma) = 1$ なる整数係数 1 次結合を得る。このとき, この 2 式の積

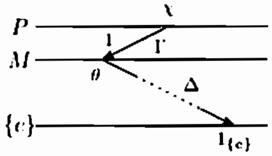
$$
\begin{aligned}
1 &= \left(\sum_{\Delta \in \mathsf{P}_{x \Rightarrow 1}} m_\Delta w_G^{\mathrm{ch}}(\Delta)\right) \times \left(\sum_{\Gamma \in \mathsf{P}_{1 \Rightarrow y}} n_\Gamma w_G^{\mathrm{ch}}(\Gamma)\right) \\
&= \sum_{\Delta \in \mathsf{P}_{x \Rightarrow 1}} \sum_{\Gamma \in \mathsf{P}_{1 \Rightarrow y}} m_\Delta n_\Gamma w_G^{\mathrm{ch}}(\Delta\Gamma).
\end{aligned}
$$

を考えれば θ から χ への Up-Down のパス $\Delta\Gamma \in \mathsf{P}_{x \Rightarrow y}$ に対して, やはりある整数係数 1 次結合が 1 となる。つまり最大公約数 $s_{x,y}$ は 1 である。□

補題 3.3 有限アーベル群と有限 p-群は共に TGC-群である。

証明 有限アーベル群の既約指標の次数は 1 であることから, アーベル群の場合は直ちに導かれる。

次に p-群 P について考える。補題 3.2 より任意の頂点 $x = (K, \chi)$ に対して $s_{x,1} = 1$ を示せば十分である。また位数に関する帰納法の仮定より, 部分群 $K \leq P$ は P 自身であるとして良い。ここで P の極大部分群 $M < P$ を取る。すると p-群の性質から χ を M に制限すると, 再び既約になるか, 或いは相異なる既約指標の和で表される。何れにしても $(\chi|_M, \theta)_M = 1$ なる $\theta \in \mathrm{Irr}(M)$ が存在する。$y = (M, \theta)$ と置く。



さらに帰納法の仮定より M は TGC-群である。つまり M に於ける y と $\mathbf{1}$ の生成定数は 1 である。言い換えれば M に於ける θ から $1_{\{e\}}$ への Up-Down のパス $\Delta \in (\mathsf{P}_M)_{y \Rightarrow 1}$ に着目すると, 重みに関して $\sum_{\Delta \in (\mathsf{P}_M)_{y \Rightarrow 1}} n_\Delta w_M^{\mathrm{ch}}(\Delta) = 1$ なる整数係数 1 次結合を得る。このとき Δ に Γ を結合した $\Gamma\Delta$ は χ から $1_{\{e\}}$ への Up-Down のパスであり, さらに Γ の重みが 1 であることから, 同じ整数係数に対して $\sum_{\Delta \in (\mathsf{P}_M)_{y \Rightarrow 1}} n_\Delta w_P^{\mathrm{ch}}(\Gamma\Delta) = 1$ を得る。つまり最大公約数 $s_{x,1}$ は 1 である。□

補題 3.4 有限群 H と K は共に TGC-群であると仮定する。その直積群を $G := H \times K$ とする。このとき頂点 $x = (G, \chi) \in (Q_G^{\mathrm{ch}})_0$ に対して $\mathfrak{s}_{x,1} = 1$ が成り立つ。

証明　直積群 G の既約指標は $\mathrm{Irr}(G) = \{\theta \times \psi \mid \theta \in \mathrm{Irr}(H),\ \psi \in \mathrm{Irr}(K)\}$ と表されることに注意する。そこで $\chi = \theta \times \psi$ に対して、対応する頂点を $y := (H, \theta)$, $z := (K, \psi)$ とする。TGC-群の仮定から H と K に於ける生成定数 $\mathfrak{s}_{y,1}^H$ と $\mathfrak{s}_{z,1}^K$ は共に 1 である。即ち重複度に関して

$$\sum_{\Delta \in (\mathsf{P}_H)_{y \Rightarrow 1}} m_\Delta w_H^{\mathrm{ch}}(\Delta) = 1, \quad \sum_{\Gamma \in (\mathsf{P}_K)_{z \Rightarrow 1}} n_\Gamma w_K^{\mathrm{ch}}(\Gamma) = 1$$

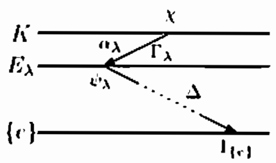
なる整数係数 1 次結合を得る。ここで各パス

$$\Delta = (y =: (H_1, \theta_1) - (H_2, \theta_2) - \cdots - (H_s, \theta_s) := 1) \in (\mathsf{P}_H)_{y \Rightarrow 1},$$
$$\Gamma = (z =: (K_1, \psi_1) - (K_2, \psi_2) - \cdots - (K_t, \psi_t) := 1) \in (\mathsf{P}_K)_{z \Rightarrow 1}$$

に対して頂点 $p_{i,j} := (H_i \times K_j, \theta_i \times \psi_j) \in (Q_G^{\mathrm{ch}})_0$ $(1 \leq i \leq s,\ 1 \leq j \leq t)$ を定める。さらに $p_{i,j}$ を用いて x から 1 への Up-Down のパス $\Delta \sharp \Gamma := (p_{1,1} - \cdots - p_{s-1,1} - p_{s,1} - p_{s,2} - \cdots - p_{s,t}) \in \mathsf{P}_{x \Rightarrow 1}$ を定義する。このパス $\Delta \sharp \Gamma$ を用いて、再びある整数係数 1 次結合が 1 となることを、最終的に示すことになる。詳細は [1, Lemma 5.14] を参照されたい。□

補題 3.5 任意の基本部分群 $E \leq G$ が TGC-群ならば G は TGC-群である。

証明　補題 3.2 より任意の頂点 $x = (K, \chi)$ に対して $\mathfrak{s}_{x,1} = 1$ を示せば十分である。まずブラウアーの指標定理により χ は基本部分群 $E_\lambda \leq G$ の 1 次指標 $\psi_\lambda \in \mathrm{Irr}(E_\lambda)$ の誘導指標に関する整数係数 1 次結合 $\chi = \sum_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda (\psi_\lambda)^K$ で表される。各誘導指標に対して $\alpha_\lambda := (\ \chi, (\psi_\lambda)^K\ )_K = (\ \chi|_{E_\lambda}, \psi_\lambda\ ) \neq 0$ とすると (K, χ) から $(E_\lambda, \psi_\lambda)$ への矢印 Γ_λ が定義される。その重みは α_λ である。



また両辺を比較することにより $\sum_\lambda m_\lambda \alpha_\lambda = 1$ を得る。ここで帰納法の仮定より E_λ は TGC-群である。つまり E_λ に於ける頂点 $(E_\lambda, \psi_\lambda)$ と 1 の生成定数は 1 である。即ち E_λ に於ける ψ_λ から $1_{\{e\}}$ への Up-Down のパス $\Delta \in (\mathsf{P}_{E_\lambda})_{(E_\lambda, \psi_\lambda) \Rightarrow 1}$ に着目すると、重みに関して $\sum_{\Delta \in (\mathsf{P}_{E_\lambda})_{(E_\lambda, \psi_\lambda) \Rightarrow 1}} n_\Delta w_{E_\lambda}^{\mathrm{ch}}(\Delta) = 1$ なる整数係数 1 次結合を得る。p-群の場合は α_λ が 1 であったことから直ちに結論が導かれた。一方この場合は定数倍 m_λ との適当な総和を取ることによって、1 に等しいある整数係数 1 次結合を導き出すことが出来る。□

補題 3.6 任意の基本部分群 $E = P \times C \leq G$ は TGC-群である。ここで P はある素数 p に対する p-群であり、C は p'-巡回群である。

証明　補題 3.2 より任意の頂点 $x = (S, \chi)$ に対して $\mathfrak{s}_{x,1} = 1$ を示せば十分である。また位数に関する帰納法の仮定より、部分群 $S \leq E$ は $E = P \times C$ 自身であるとして良い。ここで補題 3.3 より P と C は共に TGC-群である。さらに補題 3.4 より $\mathfrak{s}_{x,1} = 1$ が成り立つ。□

以上、補題 3.5 および補題 3.6 から命題 3.1 が証明されたことになる。即ち複素既約指標の生成定数 $\mathfrak{s}_{x,y}$ $(\forall x, \forall y \in (Q_G^{\mathrm{ch}})_0)$ は 1 である。

■最後の注意　ここで生成定数 $s_{x,y}$ はそもそも何だったのかを振り返ると，クイバー Q_G^{ch} から定義される UD の代数構造が行列代数の各成分にある単項イデアルを張り付けたものになっており，その各生成元が生成定数であった。即ちこの場合は対応する代数が全行列代数になってしまい，面白い状況ではない。しかしながら，とにかく生成定数という非負整数は計算可能なものであり，その 1 例として指標の場合をここに報告させて頂いた次第である。一方，全ての指標を考えるのではなく，指標の部分族を考察したり，或いは部分群による固定空間を考察することも興味ある課題である。さらにはモジュラー指標の生成定数は我々に何を教えてくれるのであろうか？今後の研究課題である。

参考文献

[1] N. Iiyori and M. Sawabe, Representations of path algebras with applications to subgroup lattices and group characters, *Tokyo J. Math.* **37**, no.1, (2014), 37–59.

[2] N. Iiyori and M. Sawabe, Simplicial complexes associated to quivers arising from finite groups, accepted in *Osaka J. Math.*

[3] N. Iiyori and M. Sawabe, Homology of a certain associative algebra, submitted for publication.

[4] 澤辺正人，有限群の部分群族とパス代数の表現，第２９回代数的組合せ論シンポジウム（弘前大学）報告集.

[5] 澤辺正人，有限群の Up-Down パスから得られる単体複体について，第３０回代数的組合せ論シンポジウム（静岡大学）報告集.