多分割エクスパンダーとグラフへの非原始的群作用

見村万佐人 (Masato MIMURA)
東北大・理

本稿では，常に $\Gamma = (V, E)$ を有限正則グラフ（連結でなくてもよい）とし，$\deg\Gamma =: k$ とおく．さらに，以下，(グラフの頂点集合などの) 分割といったときは，空集合からなる要素を許さないことと約束する．

1 多分割等周定数 $h_n(\Gamma)$

Γ の通常の意味での（辺）等周定数 h_2，ラプラス作用素の第 2 固有値 λ_2 はそれぞれ以下のように定義された．

定義 1. (1) （等周定数）

$$h_2(\Gamma) = h(\Gamma) := \min_{1 \leq |A| \leq |V|/2} \frac{|\partial A|}{|A|}.$$

(2) （ラプラス作用素の第 2 固有値）: $L(\Gamma) := kI_V - A(\Gamma)$. $A(\Gamma)$ は隣接行列，は正規化されていない Γ のラプラス作用素であり，$L(\Gamma)$ の第 1 固有値を $\lambda_1 := 0$ とおくときの（重複度込みの）第 2 固有値を $\lambda_2(\Gamma) = \lambda(\Gamma)$ とおく．

ここで，$A \subseteq V$ であり，∂A は辺境界（つまり，A と A^c をつなぐ辺の集合）のことを指す．

通常の記法では上の $\lambda(\Gamma)$ は $\lambda_1(\Gamma)$ と表記されることに注意されたい．
$h(\Gamma)$ は，

グラフ（の頂点集合）を 2 つに分割するときに，どれだけ痛みを伴うか

を（切断しなければいけない辺の本数）と（分割する頂点集合の位数）との比（の全分割を考えたときの最小値）を考えることで定量化したものである．

これらの数量の間には以下のような関係がある．まず第一に，$h(\Gamma) = 0$, $\lambda(\Gamma) = 0$ は同値で，Γ が連結でないことを意味する．より詳しくは，チーガー型の不等式と呼ばれる，Alon–V. Milman [1] による有名な不等式

$$\frac{\lambda(\Gamma)}{2} \leq h(\Gamma) \leq \sqrt{2k\lambda(\Gamma)}$$

が知られている．

上の定義で，$\partial A = \partial A^c$ であることに注意すると，次のような，これらの数量の一般化を考えられる．

定義 2. $2 \leq n \leq |V|$ とする．

(1) （n 分割等周定数（*n-way isoperimetric constant*））

$$h_n(\Gamma) := \min_{V=A_1\sqcup\cdots\sqcup A_n} \max_{1\leq i\leq n} \frac{|\partial A_i|}{|A_i|}.$$

ここで，$V = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n$ は V の分割である（本稿冒頭で書いたように分割では空集合を許さない）．

(2) （ラプラス作用素の第 n 固有値）: $L(\Gamma)$ の（重複度込みの）第 n 固有値を $\lambda_n(\Gamma)$ とおく（$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n \leq \cdots$ と小さいほうから順に並べている）．

$h = h_2$ と同様，$h_n(\Gamma)$ は，

グラフ（の頂点集合）を n 個に分割するときに，どれだけ痛みを伴うか

を定量化したものと考えることができる．

h_n, λ_n の間にも，$n = 2$ のときと同様の関係がある．まず，$h_n(\Gamma) = 0$，$\lambda_n(\Gamma) = 0$ は同値で，Γ が少なくとも n 個の連結成分をもつことを意味する．さらに，高次のチーガー型の不等式として h_n と λ_n に対し，以下の関係が Lee–Gharan–Trevisan [4] によって示されている（h_n と彼らの ϕ_n とは n 倍までのずれがあることに注意されたい）．

定理 3. （[4]）$k := \deg\Gamma$ とするとき，

$$\frac{\lambda_n(\Gamma)}{2} \leq h_n(\Gamma) \leq O(n^3)\sqrt{k\lambda_n(\Gamma)}.$$

λ_n の場合は自明であるが，h_n も n について単調非減少であることが証明できる．証明は省略するが，イメージとしては，

n 分割するときに痛みが伴うのであれば，
$n+1$ 分割するとき少なくともその分だけの痛みは伴う

ということであり，直感的にはほぼ当たり前である．

2 多分割エクスパンダーと，藤原耕二の問題

前節の最後に Γ を固定したとき $h_n(\Gamma)$ は n に関して単調非減少である（$n \leq |V(\Gamma)|$ の範囲で）ということを述べた．では，

<u>h_{n+1} は h_n と比べどれくらい大きくなりうるのか</u>

ということが自然な問題となる．一般的には，以下のように，いくらでも大きくなりうる．

(*a*) $h_n(\Gamma) = 0$ かつ $h_{n+1}(\Gamma) > 0$ となることは，Γ がちょうど n 個の連結成分をもつことと同値である．

(*b*) Γ の連結性を要請したとしても以下のような例が作れる：$\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ をそれぞれで h（通常の等周定数）が十分大きいグラフとし，これらをあまり多くない辺で（正則かつ連結グラフになるように）結んでできるグラフを Γ とする．Γ の頂点集合を $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ の頂点集合に分割することで，$h_n(\Gamma)$ はあまり大きくないことがわかる．一方，$n+1$ 個の頂点集合に分割しようと思うと $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ の少なくとも 1 つの頂点集合を空でないように分割しないといけないため，$h_{n+1}(\Gamma)$ は大きくなる．

$n = 2$ のときに，(*b*) の例をより詳しく述べる．l を非常に大きい自然数として，完全グラフ K_l を二つとってきてそれぞれのコピーを Γ_1，Γ_2 とおく．各 Γ_i から一本ずつ辺を消去し，Γ_1 から消去した辺の頂点を $\{v_1, w_1\}$，Γ_2 から消去した辺の頂点を $\{v_2, w_2\}$ とおく．最後にグラフ Γ を，

- 頂点集合は $V(\Gamma_1) \sqcup V(\Gamma_2)$；
- 辺集合は $(E(\Gamma_1)\setminus\{v_1, w_1\}) \sqcup (E(\Gamma_2)\setminus\{v_2, w_2\})$ に二本の辺 $e_1 := \{v_1, v_2\}, e_2 := \{w_1, w_2\}$ を加えたもの

として定める．すると，

- 「Γ を 2 つに分割」しようと思うと，e_1, e_2 の 2 本を分離すれば分割できるので，これは痛みをほとんど伴わない．数式で書くと
$$h_2(\Gamma) \leq \frac{2}{l};$$
- 他方で，「Γ を 3 つに分割」しようと思うと，「完全グラフ K_l」のどこかの部分を切断しないといけなくなり，どんな切り方をしても痛みを伴う．数式で書くと，ラフな評価で
$$h_3(\Gamma) \geq \frac{l}{3}$$
と評価できる（ここの議論はより正確には，田中守 [7] の補題 1 を参照されたい）．

従ってこの Γ は，h_2 と h_3 の間に非常に大きなギャップがあることがわかる．

実は，[7] によって，連結グラフで h_n と h_{n+1} の間に大きなギャップがあるケースは，定性的には上の (*b*) の構成となっていることが示されている．

以上で見たように，一般の Γ では，連結であっても h_n と h_{n+1} の間にいくらでもギャップがありうることがわかる．藤原耕二は，

<u>上の問題に関して，Γ が連結なケーリーグラフの場合は何か非自明な不等式はないか</u>

という問題を提示した．ここで，有限群 G とその対称な部分集合 $S = S^{-1} \not\ni 1_G$ に対し，(G, S) のケーリーグラフ $\Gamma = \mathrm{Cay}(G, S)$ を以下で定義する：

- 頂点集合は G 自身とする；
- 辺は $\{g, gs\}$, $g \in G, s \in S$ たちとする．

$\Gamma = \mathrm{Cay}(G, S)$ は正則グラフとなり（S に位数 2 の元がなければ Γ の次数は $2|S|$ である），Γ が連結となることと S が G を生成することが同値である．重要なこととして，群の左作用が Γ の推移的な自己同型を与えるので，ケーリーグラフは頂点推移的である（逆は正しくない．頂点推移的な有限グラフで，ケーリーグラフと同型にならないものとして，例えばピーターセングラフがある）．

藤原耕二の問題の意義は「エクスパンダー（族）」と呼ばれる概念にある．有限正則グラフの無限列 $\{\Gamma_m = (V_m, E_m)\}_m$ がエクスパンダー（族）(*expanders*) であるとは,「(i) 各グラフの次数 k_m が一定値 k」であり；「(ii) $|V_m| \to \infty$」であり；「(iii_2) しかも，$\inf_m h(\Gamma_m) > 0$ を満たす」ことをいう．Alon–Milman の不等式から，最後の条件は「$\inf_m \lambda(\Gamma_m) > 0$」と同値である．エクスパンダーグラフは"連結性の高い，疎なグラフ"という非常に不思議な性質を持つグラフ列であり，効率の良いネットワークや距離埋め込みの障害など，応用数学・純粋数学の枠を超えて大活躍している概念である．

エクスパンダーの概念を一般化して，各 $n \geq 2$ を固定したとき，以下の定義をする．

定義 4. （n 分割エクスパンダー (*n-way expanders*)）有限正則グラフの無限列 $\{\Gamma_m = (V_m, E_m)\}_m$ が n 分割エクスパンダー（族）であるとは，上記の条件 $(i), (ii)$ および,「(iii_n) $\inf_m h_n(\Gamma_m) > 0$ を満たす」ことをいう．

Lee–Gharan–Trevisan の不等式から，条件 (iii_n) は「$\inf_m \lambda_n(\Gamma_m) > 0$」であることと同値である．$h_n$，$\lambda_n$ の n についての単調非減少性から，一般に n が大きくなるほど"n 分割エクスパンダー性"は弱い条件となる（$n = 2$ のときが通常のエクスパンダー性である）．藤原耕二の問題はこの文脈では,

各 Γ_m が連結なケーリーグラフのとき，n 分割エクスパンダー性は n によらず全て同値か

という問題となる（これが藤原のもともとの問題意識である）．

藤原の問題を「多分割エクスパンダー」に関する問題だけと思えば，グラフの次数には上界が設定されていると思ってよい．しかし，より一般的な問題だと思えば，グラフの次数には制限がついてないと考えてもよい．詳しくは次節で述べる．

3 主結果とその系

講演者はプレプリント [6] において，連結な頂点推移的グラフに対して h_n と h_{n+1} の間に普遍的な不等式を導いた．それにより，上記の多分割エクスパンダーに関する藤原の問題を，ケーリーグラフより一般の連結な頂点推移的グラフの枠組みで肯定的に解決した．

本稿の主定理は以下である：

定理 5. (**主定理**)
Γ を有限で連結な頂点推移的なグラフとする．このとき，任意の $2 \leq n \leq |V(\Gamma_m)| - 1$ に対して，以下の不等式が成立する．

$$h_n(\Gamma) \geq \frac{h_{n+1}(\Gamma)}{10n + h_{n+1}(\Gamma)}.$$

見かけは異なっているが，この式は h_n を h_{n+1} に関して下から評価する式であるので，変形すれば h_{n+1} を h_n に対して上から評価する式となる．
主定理の不等式へのコメントを行なう．

(1) 特に Γ の次数 k を使ってよければ，$h_{n+1}(\Gamma) \leq k$ であるから（本当はもっとよい評価が存在するが，簡単のためこれを使う），主定理の不等式により，

$$h_{n+1}(\Gamma) \leq (10n + k)h_n(\Gamma)$$

である．従って，Γ の次数 k に依ってよければ，あるグローバルな定数 $C(n,k)$ が存在し，

$$h_{n+1}(\Gamma) \leq C(n,k) \cdot h_n(\Gamma)$$

が成り立つ．

(2) (1) を見ると，

上の定数 $C(n,k)$ を次数 k に依らずにとることは可能か

という問題が自然に湧く．しかし，実はこれは不可能である．次節でそのような反例を挙げる．

(3) 主定理の式を変形すると，

$$(1 - h_n(\Gamma))h_{n+1}(\Gamma) \leq 10nh_n(\Gamma)$$

となる．従って，

- $h_n(\Gamma) \leq 1 - \epsilon$ なる $\epsilon > 0$ が存在するときは，

$$h_{n+1}(\Gamma) \leq \frac{10n}{\epsilon}h_n(\Gamma)$$

  となる．この評価は Γ の次数 k に依らない．
- 一方，$h_n(\Gamma) \geq 1$ のときは，上式は何ももたらさない．

このように，「主定理の不等式が機能するか」どうか，別な言い方をすると，「h_n の値から h_{n+1} の値が評価できるか」，は「h_n が 1 より真に小さいか」に依ることがわかる．

次節で，この 1 という数字が実際に閾値になっていることを確認する．

主定理の系として，藤原の「多分割エクスパンダー」に関する問題の肯定的な解決を得る．

系 6. $\{\Gamma_m\}_{\geq 1}$ を $|V(\Gamma_m)| \to \infty$ となるような有限・連結な頂点推移的な正則グラフの列とする．このとき，任意の $n \geq 2$ に対して，以下が成立する：

$$\inf_m h_{n+1}(\Gamma_m) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \inf_m h_n(\Gamma_m) > 0.$$

特に，連結な頂点推移的なグラフを考える限り，任意の $n \geq 2$ に対して，「n 分割エクスパンダー」と通常の「エクスパンダー」の概念が一致する．

この系において，グラフ列 $\{\Gamma_m\}_m$ の次数たちに制約をつけていないことに注意されたい．次数の上界が有限でないとき，系の最初の主張は "正規化した h_n（つまり，h_n を次数 k で割ったもの）" にすると正しくない．この反例も次節で述べる．

哲学的に類似の研究として，リッチ曲率が正である（ないしは，適切な下からの制約がある）リーマン多様体での船野敬・塩谷隆 [2]，および船野敬 [3] による研究がある（前者はラプラス作用素の固有値間の不等式の存在について，後者はラプラス作用素の固有値および多分割等周定数についての具体的な不等式である）．彼らの研究結果の新しいところは，多様体の次元に依らない普遍的な評価を与えているところである．本研究ではグラフの次数に依らない普遍的な評価を与えている．グラフの次数と多様体の次元が直接対応しているわけではないが，多様体の次元の制約をつけないこととグラフの次数の制約をつけないことは対応していると考えるのが自然であろう．

4 主定理の補足～普遍的な定数倍評価への反例

ここでは主定理のコメントの (2) で述べた，連結な頂点推移的なグラフ Γ に対する普遍的な（n のみに依る）定数倍評価

$$h_{n+1}(\Gamma) \leq C(n) h_n(\Gamma)$$

の存在問題に関する反例を挙げる．反例は頂点推移的より強く，ケーリーグラフで構成できる．

$n \geq 2$ を固定して議論する．自然数 l を十分大きくとる．有限群とその部分集合 (H, T) を $\mathrm{Cay}(H, T) \simeq K_l$ となるようにとる（例えば $H = \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$，$T = \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ とせよ）．二面体群

$$D_n := \langle a, b | a^2 = b^2 = (ab)^n = 1_{D_n} \rangle$$

をとってくる．以上の設定の下で，ケーリーグラフ $\Gamma = \mathrm{Cay}(G, S)$ を構成する：

- $G := H \times D_n$；
- $S := (T \times \{1_{D_n}, a\}) \sqcup \{(1_H, b)\}$.

つまり，Γ は以下のようなグラフである：K_l のコピーが D_n の各元に対応して（$= 2n$ 個）だけある（K_l なのでそれぞれのコピーの中は辺がぎっしりつまっている）．各コピーの間には，右作用で a の乗算で移りあう 2 つのコピーの間にはほぼ全ての辺を引く．最後に，右作用で b の乗算で移りあう 2 つのコピーの間には，1 つのコピーの各頂点から一本ずつ辺を引く．

このとき，Γ の頂点集合を

$$\bigsqcup_{i=0}^{n-1}(H \times \{(ab)^i, (ab)^i a\})$$

のようにそれぞれ $2l$ 個からなる n 個の集合に分割する．このとき各部分を切り離すのにそれぞれ $2|H| = 2l$ 個の辺しか切断しなくてすむので，

$$h_n(\Gamma) \leq 1$$

である．一方，$(n+1)$ 個に分割しようと思うとこの n 個の分割の中のどこかを切らないといけないが，この分割のそれぞれの要素はほぼ K_{2l} に近いグラフ（実際には各頂点から $2l-2$ 個の辺が出ている）であるから，ラフに評価しても

$$h_{n+1}(\Gamma) \geq \frac{l}{2}$$

である（1 節のときと同様，正確には [7] の補題 1 を用いる）．

以上から，$\frac{h_{n+1}(\Gamma)}{h_n(\Gamma)}$ は，有限連結で頂点推移的なグラフ Γ を動かすとき（次数の制限がなければ）いくらでも大きくなりうる．

また，この例から，前節のコメント (3) で h_n の値が 1 より真に小さいかどうかが“閾”のようになっている，と書いたが，この 1 という値が本当の閾値であることがわかる．さらに，上記の例は，系 6 の前半の主張は，正規化した多分割等周定数を用いると反例があることを示している．このことから，今回の研究では，正規化していない定数の方が良く振舞うことが分かる．

5　非原始的な作用と，主定理の証明の概略

本節では主定理の証明の概略を述べるが，その際に必要となるので作用の非原始性の考察をする．

有限群 G が有限集合 F に推移的に作用をしているとする．F の n 個への分割

$$F = F_1 \sqcup F_2 \sqcup \cdots \sqcup F_n$$

がサイズが n の非原始的なシステム（*system of imprimitivity of size n*）をもつとは，$G \curvearrowright F$ がこの分割を通じて n 点集合への作用 $G \curvearrowright \{1, 2, \ldots, n\}$ に分解することをいう．つまり，任意の $g \in G$ に対して対称群の元 $\sigma_g \in \mathrm{Sym}(n)$ が存在し，$g \cdot F_i = F_{\sigma_g(i)}$ $(1 \leq i \leq n)$ となることをいう．非原始的なシステムによる分割の各要素をブロックという．イメージとしては，作用が非原始的なシステムを持つとき，“作用がブロックの間の仕切りを壊さない”ようになっており，ある意味で作用が“よくかき混ぜていない”ともいえる（これが「非」原始的という言葉の意味するところの解釈のひとつである）．

前節では，有限連結な頂点推移的グラフに限っても一般に h_n と h_{n+1} の間にはいくらでもギャップがあることを反例を通じて述べた．しかし，そのときに挙げた例

はサイズが n の非原始的なシステムをもっている（$h_n \leq 1$ を示すときに用いた n 個の部分集合への分割がそうなっている）．そこで，

群の頂点集合への作用が“よくかき混ぜて”いたら，ギャップも制御できるのでは

ということを考えることができる．

主定理の証明は，このように「サイズが n の非原始的な作用がない」場合と「ある」場合で場合わけをして行なわれる．前者の場合は相対的に簡単で，この場合は実は h_n と h_{n+1} の間のギャップは普遍的な定数（n にのみ依る）倍で制御ができる（しかも，この場合は Γ が連結であるという仮定も必要ない）．後者の場合は前節のようなことが起こりえるので扱いはより難しい．

主定理を示す第一歩となるのが，前者の場合を述べた以下の定理である．

定理 7. （*[6]* の定理 4.1）Γ を有限な頂点推移的なグラフ（連結でなくてもよい）とし，有限群 G が $V = V(\Gamma)$ に推移的に，グラフ同型で作用しているとする．$2 \leq n \leq |V| - 1$ とする．作用 $G \curvearrowright V$ がサイズ n の非原始的システムをもたないとき，以下の不等式が成り立つ：

$$h_{n+1}(\Gamma) \leq 2(n+1)h_n(\Gamma).$$

前述したように，この場合は普遍的な定数 $C(n) = 2(n+1)$ をとることができる．G は推移的に作用していさえすれば $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 全体でなくてよいので，群 G のケーリーグラフの場合は G 自身をとってくることができる．

主定理の証明の概略を述べる．Γ を有限で頂点推移的なグラフ，G を頂点集合 V に推移的にグラフ同型で作用する有限群とし，$n \leq |V| - 1$ とする．以下，

$$h_{n+1}(\Gamma) > 2(n+1)h_n(\Gamma).$$

と仮定する．このとき，次の 3 ステップで証明を行なう．

Step 1. 仮定の下で，$G \curvearrowright V$ がサイズ n の非原始的なシステムをもつことを示す（対偶をとることにより定理 7 が従う）；

Step 2. Step 1 で存在が証明された「サイズ n の非原始的なシステム」を，「$h_n(\Gamma)$ を実現する分割」の“十分近く”にとることができることを示す（詳しくは次節）；

Step 3. ここで初めて Γ が連結であることを仮定する．すると，Step 2 でとった非原始的なシステムでは，分割のどの要素の中の頂点からも（頂点ごとに）他の要素へと結ばれる辺が少なくとも 1 本は存在する．この観察を用いて $h_n(\Gamma)$ を評価をすることにより，主定理の不等式を得る．

前節で述べた，h_{n+1} の評価ができるような h_n の値の閾値である 1 は，Step 3 で「1 本ずつ」というところに由来する．

各ステップのより詳しい説明を以下行なう．本稿ではアイディアだけを記述するので，詳細に興味をもたれた方は [6] を参照されたい．

Step 1. $h_n(\Gamma)$ を実現する V の分割を

$$V = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n$$

とおく．A_1 が $A_1, \ldots, A_n$ の中で位数が最大として対称性を失わない．このとき，仮定 $h_{n+1}(\Gamma) > 2(n+1)h_n(\Gamma)$ から，A_1 を各 G の元 g で移したとき，各 $1 \leq l \leq n$ で，

(1_l) $g \cdot A_1$ と A_l がほとんど一致するか；

(2_l) $g \cdot A_1$ と A_l がほとんど disjoint か，

のどちらかであることがいえる．$> 2(n+1)$ 倍ということが効いて，固定された g に対して (1_l) を満たす l がただ 1 つ存在することが証明できる（本質的には，「全部の l で (2_l) が成り立つとすると個数の勘定が合わず矛盾するので，(1_l) を満たす l が存在する」ということがポイントである）．$g \in G$ を決めたときのこの l を l_g とおく．

適切に番号を並び替えて $\{l_g : g \in G\} = \{1, \ldots, t\} (\subseteq \{1, 2, 3, \ldots, n\})$ としてよい（$l_{1_G} = 1$ に注意せよ）．すると上記の議論と同様にして，$A_1, \ldots, A_t$ の間では，各 $g \in G$ に対し，$g \cdot A_s \approx A_{\Phi_g(s)}$ $(1 \leq s \leq t)$ となるような対応

$$\Phi_g \colon \{1, \ldots, t\} \to \{1, \ldots, t\}$$

を定義できる．各 $g \in G$ に対し Φ_g が全単射であることが確認できるので，写像

$$\Phi \colon G \to \mathrm{Sym}(t) \colon \quad g \mapsto \Phi_g$$

が定義される．

重要なポイントが，

この写像 Φ が群準同型になる

ことである．これは，一般に，$i := \Phi_g(\Phi_h(s))$，$i' := \Phi_{gh}(s)$ $(1 \leq s \leq t)$ とおくとき，

$$A_i \approx g \cdot (h \cdot A_s) = (gh) \cdot A_s \approx A_{i'}$$

であるからである．このような操作をすると $\approx$ による誤差は原理的には増えるが，(1_l)（ほとんど一致）と (2_l)（ほとんど disjoint）のような二者択一となっているため，“ほとんど disjoint” でなければ前者のケースとなる．前者のケースはただ 1 つの添え字のみで成立するので，こうして $i = i'$ となり Φ の群準同型性がいえる．t の選び方から，上記の準同型 $\Phi \colon G \to \mathrm{Sym}(t)$ によって誘導される作用 $G \curvearrowright \{1, \ldots, t\}$ は推移的である．

今，

$$G \curvearrowright V \text{ がサイズ } n \text{ の非原始的システムを持たない}$$

と仮定しよう．すると，上のことから t は n よりも真に小さいことがわかる．このとき，$B := A_{t+1} \sqcup \cdots \sqcup A_n$ とおくと，B は空でない十分小さい集合で，しかも今までの構成から “ほとんど G-不変” であることがわかる．しかし，このようなことは起こりえず（[6] の “キーレンマ” である補題 4.3 を参照されたい），矛盾する．こうしてサイズ n の非原始的システム，より強く，上の構成で $t = n$ であることが示せる．　□

Step 2. Step 1 の構成から，群 G を上記の準同型写像 $\Phi: G \to \mathrm{Sym}(n)$ を用いていろいろなコセットに分割することができる．$A_1, \ldots, A_n$ の各特性関数をこれらのコセットで回して平均を取り，そのレベルセットをとることで意中の非原始的なシステムを得ることができる（詳細は [6] の 5 節を参照されたい）． □

Step 3. 各頂点から，分割の他の要素へ結ばれる辺をとってくるとき，相手の頂点がかぶらないようにとってくる必要がある．このようにとれることは Γ がケーリーグラフのときはほぼ明らかであるが，一般の頂点推移的グラフのときには Hall の結婚定理を用いる．残りの議論は [6] の 6 節を参照されたい． □

6 Step 2 の詳細の主張と M. Kac の問題

前節 Step 2 の主張の詳細は，以下の定理にまとめられる．

定理 8. （*[6] の定理 C*）
Γ を有限な頂点推移的なグラフ（連結でなくてもよい）とし，G を頂点集合 V に推移的にグラフ同型として作用する有限群とする．$2 \leq n \leq |V| - 1$ を固定する．もし，

$$h_{n+1}(\Gamma) > 2(n+1)h_n(\Gamma)$$

であるならば，任意の $h_n(\Gamma)$ を実現する分割

$$V = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n$$

に対し，$G \curvearrowright V$ のサイズ n の非原始的システム

$$V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \cdots \sqcup V_n$$

が存在し，次を満たす：任意の $1 \leq i \leq n$ に対し，

$$|V_i \triangle A_i| \leq \frac{4h_n(\Gamma)}{h_{n+1}(\Gamma)}|V|.$$

この定理は，“Can One Hear the Shape of a Drum?”（つまり，「幾何学的対象の形を，そのスペクトル的なデータから推定することができるか？」）という M. Kac の哲学と関連するものと思われる（ただし，ここでは“スペクトル的データ”はラプラス作用素の固有値ではなく，多分割等周定数である）．

特に baby case として，「$h_n(\Gamma) = 0$ かつ $h_{n+1}(\Gamma) > 0$」のときを考えよう（この定理では Γ は連結でなくてもよいことに注意せよ）．このようなことが起こるのは「Γ がちょうど n 個の連結成分からなる」ことが必要十分であり，このとき連結成分への分割が h_n の実現と同時に非原始的なシステムを与えている．上記の定理は，連結なグラフでも“定量的に近い”場合に（誤差が入る形で）同様のことが成り立つという事を述べている．

7　2014年9月時点で未解決と思われる問題

(1) 4 節のような h_n と h_{n+1} の間のギャップのある例で，h_n を実現する分割が非原始的なシステムと一致しない（本当に少しずれている）ような例を作れ．

(2) 「サイズ n の非原始的システムがない」場合の評価では定理 7 のように n 倍のオーダーの評価が得られたが，このオーダーは最良のものであろうか？このときに，n に依らない普遍定数倍の評価を得ることは可能か？

(3) ラプラス固有値でも同様の研究を行なえ．4 節と同じ構成により，有限連結で頂点推移的なグラフに対して，λ_n と λ_{n+1} の間のギャップはいくらでも大きくなりうることがわかる．

参考として，等質なリーマン多様体に対しては P. Li [5] による不等式が知られており，この場合は特に $\lambda_{n+1}(M) < 5\lambda_n(M)$ である．従って，グラフの場合の方が（辺方向などで）等質性が少なく，問題が複雑になっていると考えられる．

(4) 辺境界の代わりに対称的な頂点境界（つまり，A とその補集合を結ぶ辺の頂点になりうる頂点全体の集合）をとることで,（対称的）頂点等周定数，および，それの多分割バージョン $g_n(\Gamma)$ が定義される．この数量に関して同様の評価を行なえ．重要なこととして，g_n では 4 節の例は普遍的定数倍評価の反例とはなっていない．

[6] では主定理と同じ仮定の下で

$$g_{n+1}(\Gamma) \leq (11n+1)g_n(\Gamma)$$

を示している（h_n のときと違い，n のみに依る普遍的定数倍による評価が存在する）．n にも依らない，普遍的な定数 $C > 0$ が存在するだろうか？

(5) h_n，λ_n，g_n それぞれの場合において，隣り合う番号の数量だけでなく間のあいた番号の数量（例えば λ_2 と λ_n など）の比較をせよ．g_n を除いては 4 節のような例があるので適切な仮定をつける必要があるが，その場合に得られる評価の最良のオーダーはどのようなものであろうか．

(6) 単に頂点推移的ではなく，頂点推移的かつ辺推移的のときに，Li の評価のようなものは得られるか．[6] では $h_{n+1}(\Gamma) \leq (10n+1)h_n(\Gamma)$ が成り立つことを示したが，n に依らない普遍定数倍の評価を得ることはできるか？

(7) 距離正則グラフではどうか？

参考文献

[1] N. Alon and V.D. Milman, λ_1, isoperimetric inequalities for graphs and superconcentrators, *J. Combin. Theory. Ser. B* **38**, 73–88, 1985.

[2] K. Funano and T. Shioya, Concentration, Ricci curvature, and eigenvalues of Laplacian, *Geom. Funct. Anal.* **23**, no. 3, 886–936, 2013.

[3] K Funano, Eigenvalues of Laplacian and multi-way isoperimetric constants on weighted Riemannian manifolds, prerint, arXiv:1307.3919v1, 2013.

[4] J. R. Lee, Sh. O. Gharan, and L. Trevisan, Multi-way spectral partitioning and higher-order Cheeger inequalities, in *Proc. of 44th ACM STOC*, pp. 1117–1130, 2012.

[5] P. Li, Eigenvalue estimates on homogeneous manifolds, *Comm. Math. Helv.* **55**, no. 1, 347–363, 1980.

[6] M. Mimura, Multi-way expanders and imprimitive group actions on graphs. Preprint, arXiv:1403.2322

[7] M. Tanaka, Multi-way expansion constants and partitions of a graph. Preprint, arXiv:1112.3434