The smallest eigenvalues of the line graphs of some trees
– Cvetković and Stevanović's Question –

谷口 哲至 (松江工業高等専門学校)

1 はじめに

今回の研究 [2] は，ある特別な tree の line graph の最小固有値に関するものである．[1] の中で Cvetković 氏，Stevanović 氏らは，グラフの最小固有値の列 $\{\lambda_{\min}(K_n \otimes K_q)\}_{n=1}^{\infty}$ が，与えられた整数 q に対し一定であることを示している．但し，グラフの最小固有値を $\lambda_{\min}$ で表す．また，グラフのコロナを $\otimes$ で表す．そこで，彼らは次のような疑問を挙げている．

問題 1.1. Do there exist other sequences of the line graphs of trees whose smallest eigenvalues are constant?

今回の成果は，彼らの疑問に対する答えを一つ与えた物である (Corollary 3.2)．また，今回の成果は宗政昭弘氏[1]、佐野良夫氏[2]らとの共同研究である．

2 準備

正の整数 n と $s_1, \ldots, s_n$ たちに対し，tree $T_{s_1,\ldots,s_n}$ を次のように帰納的に定義する：T_{s_1} を s_1-claw とする．s_n 個のペンダント頂点を $T_{s_1,\ldots,s_{n-1}}$ の各葉に付け加えることで，$T_{s_1,\ldots,s_{n-1}}$ から得られる tree とする．ここで，$K_n \otimes K_q$ は $T_{n,q-1}$ のライングラフ $L(T_{n,q-1})$ である．

次に $m_l = \prod_{i=1}^{l} s_i \quad (l = 0, 1, \ldots, n)$. $\sigma_l = m_l - m_{l-1} \quad (l = 1, \ldots, n)$ とする．このとき，$m_0 = 1$, $m_1 = s_1$, $\sigma_1 = s_1 - 1$ となる．

更に，多項式 $g_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ を次のように帰納的に与える：

$$g_{i+2}(\lambda) = (\lambda + 1 - s_{n-i})g_{i+1}(\lambda) - s_{n-i}g_i(\lambda) \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$g_0(\lambda) = 1, \qquad g_1(\lambda) = \lambda + 1.$$

[1] 東北大学大学院 情報科学研究科
[2] 筑波大学 システム情報系

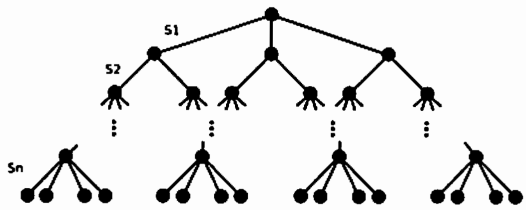

図 1: $T_{s_1,\ldots,s_n}$

更に，グラフ G の隣接行列 $A(G)$ について，その固有多項式を $\chi_G(\lambda)$ とする．即ち，$\chi_G(\lambda) = \det(\lambda I - A(G))$.

補題 2.1 (Schwenk [3, Theorem 5])**.** G_0 を頂点数 p のグラフ，H を頂点数 q で *root* r の *rooted graph* とする．更に，G_0 の各頂点 v に r を同一視することで，H を付け加えて得られるグラフを G とする．このとき，

$$\chi_G(\lambda) = \chi_{H-r}(\lambda)^p \chi_{G_0}\left(\frac{\chi_H(\lambda)}{\chi_{H-r}(\lambda)}\right).$$

補題 2.1 において，グラフ G_0 を完全グラフとすることで，次の補題を得る：

補題 2.2. H を頂点数 q で *root* r の *rooted graph* とする．また，s を 2 以上の整数とする．更に，完全グラフ K_s の各頂点 v に r を同一視することで，H を付け加えて得られるグラフを G とする．このとき，

$$\chi_G(\lambda) = (\chi_H(\lambda) - (s-1)\chi_{H-r}(\lambda))(\chi_H(\lambda) + \chi_{H-r}(\lambda))^{s-1} \qquad (1)$$

であり，その最小固有値は多項式 $\chi_H(\lambda) + \chi_{H-r}(\lambda)$ の最小根である．特に，G の最小固有値は s とは無関係に定まる．

3 主結果

以下は，今回の主たる成果である：

定理 3.1. ライングラフ $L(T_{s_1,s_2,\ldots,s_n})$ の固有多項式は

$$\chi_{s_1,\ldots,s_n}(\lambda) = \frac{1}{\lambda+2}(g_{n+1}(\lambda) + g_n(\lambda)) \prod_{l=1}^{n} g_l(\lambda)^{\sigma_{n-l+1}}$$

である．更に，$L(T_{s_1,s_2,\ldots,s_n})$ の最小固有値は $s_2,\ldots,s_n$ のみに依存し，s_1 とは無関係に定まる．

補題 2.1 において，グラフ H を tree $T_{1,s_2,\ldots,s_n}$ のライングラフとすることで，帰納法で証明できる．

また，因子 $\frac{1}{\lambda+2}(g_{n+1}(\lambda)+g_n(\lambda)), g_1(\lambda), \ldots, g_{n-1}(\lambda)$ らの根は，$\chi_{s_1,\ldots,s_n}(\lambda)$ の最小根にならない．唯一 $g_n(\lambda)$ の最小根のみが $\chi_{s_1,\ldots,s_n}(\lambda)$ の最小根となる．得られた式から，その重複度が $\sigma_1 = s_1 - 1$ であることがわかる．

Cvetković 氏，Stevanović 氏らは，ライングラフの構造に注目すること無く議論を進めたため，彼らの構成したグラフの拡張に気付くことが出来なかった．今回は，ライングラフという構造に注目した故に，気付くことができた．定理 3.1 から，ライングラフの最小固有値が s_1 に依存していないことがわかる．Cvetković 氏，Stevanović 氏らの主張が，次のように拡張されることとなる：

Corollary 3.2. $s_2, \ldots, s_n$ を正の整数とする．正の整数 i に対し，*tree* $T_{i,s_2,\ldots,s_n}$ のライングラフを G_i で表す．このとき，列 $\{\lambda_{\min}(G_i)\}_{i=1}^{\infty}$ は一定である．

参考文献

[1] D. Cvetković and D. Stevanović: Graphs with least eigenvalue at least $-\sqrt{3}$, *Institut Mathématique. Publications. Nouvelle Série* **73(87)** (2003) 39–51.

[2] A. Munemasa, Y. Sano, T. Taniguchi: On the smallest eigenvalues of the line graphs of some trees. CoRR abs/1405.3475 (2014)

[3] A. Schwenk: Computing the characteristic polynomial of a graph, *Graphs and combinatorics (Proc. Capital Conf., George Washington Univ., Washington, D.C., 1973)*, pp. 153–172, *Lecture Notes in Mathematics* **406** (Springer, Berlin, 1974).