頂点代数上の対数項付きの加群について

田辺顕一朗 (北海道大学大学院理学研究院数学部門)

e-mail : ktanabe@math.sci.hokudai.ac.jp

1 準備

頂点代数 V とは 1986 年に Borcherds[1] によって導入された代数系である．簡単にいうと，頂点代数とは $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V と双線形写像

$$Y(-,x)-:V\otimes_{\mathbb{C}}V\to V((x))$$

の組であっていくつかの条件を満たすものである (Y は V 上の "積" である)．ここで x は形式的変数で $V((x))=\{\sum_{i\in\mathbb{Z}}v_{(i)}x^i \mid v_{(i)}\in V, v_{(i)}=0\ (i\ll 0)\}$ である．V は代数系であるから V 加群がしかるべく定義される．また 3 つの V 加群 L,M,N に対する intertwining operator

$$I(-,x)-:L\otimes_{\mathbb{C}}M\to N\{x\}$$

を定義することが出来る．ここで $N\{x\}=\{\sum_{i\in\mathbb{C}}n_{(i)}x^i \mid n_{(i)}\in N\}$ である．2002 年に Milas[5] は，物理における対数的共型場理論を背景に，intertwining operator の拡張である対数的 intertwining operator を導入した．簡単にいうと，対数的 intertwining operator とは intertwining operator の定義において，次のように対数項を許したものである：

$$I(-,x)-:L\otimes_{\mathbb{C}}M\to N\{x\}[\log x].$$

ここではこの対数的 intertwining operator を参考にして，V 加群の定義の拡張である "対数項を許した V加群" を考える．このような加群の存在が期待出来ること，および自然であることは，以下の考察から従う．U を V の部分頂点代数，(M,Y_M) を V 加群とする．ここで，V,M はそれぞれ U 加群であるから，$Y_M(-,x)-:V\otimes_{\mathbb{C}}M\to M((x))$ は U に対する intertwining operator になっていることに注意する．したがって，U 加群達に対する intertwining operator に対数項を許すことを考えるならば，U 加群 N であって，対数的 intertwining operator

$$Y_N(-,x)-:V\otimes_{\mathbb{C}}N\to N((x))[\log x]$$

を持つものが期待出来る．これを V の立場から見れば，N は "対数項を許した V 加群" というべきものになっているはずである．実際，V を格子頂点代数，U を Heisenberg 頂点代数としてこのことが起こっていることを後で説明する．

まず，"対数項を許した V 加群" を以下の形で定式化し，対数項付き (V,T) 加群と呼ぶことにする．以下，$x,y,\log x$ 等は可換な形式的変数である．

定義 1. T を正の整数とする．次の条件を全て満たす組 (M, Y_M) を対数項付き (V,T) 加群という．

(1) M は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間．

(2) $Y_M(-,x)- : V \otimes_{\mathbb{C}} V \to V((x^{1/T}))[\log x]$ は $\mathbb{C}$ 双線形写像．

(3) $Y_M(\mathbf{1},x) = \mathrm{id}_M$.

(4) $a,b \in V, u \in M$ に対して，$Y_M(a,b,u|x,y) \in M[[x^{1/T},y^{1/T}]][x^{-1/T},y^{-1/T},(x-y)^{-1},\log x,\log y]$ が存在して

$$\iota_{x,y}Y_M(a,b,u|x,y) = Y_M(a,x)Y_M(b,y)u \in M((x^{1/T}))((y^{1/T}))[\log x,\log y],$$
$$\iota_{y,x}Y_M(a,b,u|x,y) = Y_M(b,y)Y_M(a,x)u \in M((y^{1/T}))((x^{1/T}))[\log x,\log y],$$
$$\iota_{y,x-y}Y_M(a,b,u|x,y) = Y_M(Y(a,x-y)b,y)u \in M((y^{1/T}))((x-y))[\log y]$$

となる．

ここで $\iota_{x,y}f$ は，f を $|x|>|y|$ と思って形式的に展開したものである．$\iota_{y,x}, \iota_{y,x-y}$ も同様に定める．例えば

$$\iota_{x,y}(x-y)^k = \sum_{p=0}^{\infty}\binom{k}{p}(-1)^p x^{k-p}y^p \in \mathbb{C}((x))((y)),$$
$$\iota_{y,x}(x-y)^k = \sum_{p=0}^{\infty}\binom{k}{p}(-1)^{k-p} y^{k-p}x^p \in \mathbb{C}((y))((x)),$$
$$\iota_{y,x-y}\log x = \log y + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{i}y^{-i}(x-y)^i \in \mathbb{C}((y))((x-y))[\log y]$$

となる．

2 Heisenberg 頂点代数 $M(1)$ の対数的 intertwining operator

次に Milas[6] による，Heisenberg 頂点代数 $M(1)$ の加群間の対数的 intertwining operator の例を，この原稿で用いる部分に限って紹介する．$M(1)$ の構成に用いられるリー環 $\hat{H}$ の紹介から始める．

例 2. (1) リー環 $\hat{H}$.

H を 1 次元複素ベクトル空間，$\langle -,- \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ を H 上の非退化双線形形式とする．H を可換なリー環とみなして，そのアフィン化 $\hat{H} = H \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ を考える．$\alpha \in H, n \in \mathbb{Z}$ に対して $\alpha(n) = \alpha \otimes t^n$ と書くことにする．交換関係は

$$[\alpha(m),\beta(n)] = \delta_{m+n,0}\langle\alpha,\beta\rangle K, \qquad [\hat{H},K] = 0$$

で与えられる．$\hat{H}$ の二つの部分リー環 $\hat{H}^{\geq 0} = \bigoplus_{n\geq 0} H\otimes t^n \oplus \mathbb{C}K$ と $\hat{H}^{-} = \bigoplus_{n<0} H\otimes t^n$ を準備する．$H \cong H \otimes \mathbb{C}t^0$ として H を $\hat{H}^{\geq 0}$ の部分リー環とみなす．

(2) Heisenberg 頂点代数 $M(1)$ と $M(1)$ 加群.

Ω を有限次元 H 加群とする. $(\bigoplus_{n>0} H\otimes t^n)\Omega=0, K=\mathrm{id}_\Omega$ とおいて Ω を $\hat{H}^{\geq 0}$ 加群とみなす. Ω を $\hat{H}$ 上に誘導した $\hat{H}$ 加群

$$M(1,\Omega)=U(\hat{H})\otimes_{U(\hat{H}^{\geq 0})}\Omega\cong S(\hat{H}^-)\otimes_{\mathbb{C}}\Omega$$

を考える. ここで $U(g)$ はリー環 g の包絡環, $S(\hat{H}^-)$ は $\hat{H}^-$ の対称代数である. 以下, 話を簡単にするために, $\beta\in H$ に対して, $\mathbb{C}^n$ 上に $\gamma\in H\mapsto J(\langle\beta,\gamma\rangle,n)\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ で H の作用を定めた H 加群 $\Omega(\beta,n)$ を考えることにする. ここで $r\in\mathbb{C},n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$J(r,n)=\begin{pmatrix} r & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \dots & \cdots & 0 & r\end{pmatrix}\ (n\text{ 次正方行列})$$

とおいている. $M(1)=M(1,\Omega(0,1))$ には頂点代数の構造が入り, 任意の有限次元 H 加群 Ω に対して $M(1,\Omega)$ は頂点代数 $M(1)$ 上の (通常の意味での) 加群となる. $n=1$ のときは $\Omega(\beta,1)\cong\mathbb{C}$ の基底を e^β で表す : $\Omega(\beta,1)=\mathbb{C}e^\beta$.

(3) 対数的 intertwining operator [6].

$\langle\alpha,\beta\rangle\in\mathbb{Z}$ となる $\alpha,\beta\in H$ をとる (条件 $\langle\alpha,\beta\rangle\in\mathbb{Z}$ は記述を簡単にするためだけにつけたものである). 写像

$$Y_{\alpha,\beta,n}(-,x)-:M(1,\Omega(\alpha,1))\otimes M(1,\Omega(\beta,n))\to M(1,\Omega(\alpha+\beta,n))((x))[\log x]$$

を $p\in S(\hat{H}^-),u\in\Omega(\beta,n)$ に対して

$$Y_{\alpha,\beta,n}(e^\alpha,x)(p\otimes u)=\exp(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(-n)}{n}x^n)\exp(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\alpha(n)}{n}x^{-n})p\otimes e^\alpha x^{\alpha(0)}u$$

で定める. ここでテンソル積の前の部分は $\hat{H}$ 加群の作用で定め, 後の部分は次で定める :

- $x^{\alpha(0)}\mapsto x^{\langle\alpha,\beta\rangle}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}J(0,n)^i(\log x)^i=x^{\langle\alpha,\beta\rangle}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i!}J(0,n)^i(\log x)^i$ on $\Omega(\beta,n)$.
- e^α は $\begin{array}{ccc}\Omega(\beta,n) & \xrightarrow{e^\alpha} & \Omega(\alpha+\beta,n)\\ \| & & \|\\ \mathbb{C}^n & = & \mathbb{C}^n\end{array}$ が可換となるように定める.

このとき，$a \in M(1), u \in M(1,\Omega(\alpha,1)), v \in M(1,\Omega(\beta,n))$ に対して，$Y_{\alpha,\beta,n}(a,u,v|x,y) \in M(1,\Omega(\alpha+\beta,n))[[x,y]][x^{-1},y^{-1},(x-y)^{-1},\log y]$ が存在して

$$\begin{aligned}
\iota_{x,y}Y_{\alpha,\beta,n}(a,u,v|x,y) &= Y_{M(1,\Omega(\alpha+\beta,n))}(a,x)Y_{\alpha,\beta,n}(u,y)v \\
&\in M(1,\Omega(\alpha+\beta,n))((x))((y))[\log y], \\
\iota_{y,x}Y_{\alpha,\beta,n}(a,u,v|x,y) &= Y_{\alpha,\beta,n}(u,y)Y_{M(1,\Omega(\beta,n))}(a,x)u \\
&\in M(1,\Omega(\alpha+\beta,n))((y))((x))[\log y], \\
\iota_{y,x-y}Y_{\alpha,\beta,n}(a,u,v|x,y) &= Y_{\alpha,\beta,n}(Y_{M(1,\Omega(\alpha,n))}(a,x-y)u,y)v \\
&\in M(1,\Omega(\alpha+\beta,n))((y))((x-y))[\log y]
\end{aligned}$$

となる．$n \geq 2$ の場合は，$Y_{\alpha,\beta,n}$ に対数項が現れる．$Y_{\alpha,\beta,n}(-,y)-$ は対数的 intertwining operator の例である．$n=1$ の場合は通常のよく知られた intertwining operator となっている．

3 格子頂点代数上の対数項付き加群

ここでは格子頂点代数に対して，その対数項付き加群の例を構成する．$(L,\langle -,- \rangle)$ を階数が 1 の非退化偶格子とする．$H = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} L$ に対して Heisenberg 頂点代数 $M(1)$ を考える．$L^{\perp}$ を L の双対格子とする．$\gamma \in L^{\perp}$ に対して $V_{\gamma+L} = \bigoplus_{\beta \in \gamma+L} M(1,\Omega(\beta,1))$ とおく．$V_L = V_{0+L}$ には $M(1)$ による作用と両立可能な頂点代数の構造が一意的に入る．V_L を L に付随する (格子) 頂点代数という．ここで積は，例 2 の $M(1)$ における intertwining operator $Y_{\alpha,\beta,1}(-,x)- : M(1,\Omega(\alpha,1)) \otimes M(1,\Omega(\beta,1)) \to M(1,\Omega(\alpha+\beta,1))((x))$ で与えられる．$M(1)$ は V_L の部分頂点代数となっている．同様に $V_{\gamma+L}, \gamma \in L^{\perp}$ には V_L 加群の構造が入る．V_L の表現について次の結果が知られている (L の階数は一般でよい)．

定理 3. [2]

(1) $\{V_{\gamma+L} \mid \gamma + L \in L^{\perp}/L\}$ は既約 V_L 加群の完全代表系である．

(2) L が正定値ならば，任意の V_L 加群は完全可約である．

以下では，n を一般の正の整数として $M(1)$ 加群 $M(1,\Omega(\beta,n))$ に対して上記の V_L 加群の構成の類似を考える．つまり，$V(\gamma,n) = \bigoplus_{\beta \in \gamma+L} M(1,\Omega(\beta,n))$ とおき，例 2 の $M(1)$ における対数的 intertwining operator

$$Y_{\alpha,\beta,n}(-,x)- : M(1,\Omega(\alpha,1)) \otimes_{\mathbb{C}} M(1,\Omega(\beta,n)) \to M(1,\Omega(\alpha+\beta,n))((x))[\log x]$$

を用いて，写像

$$V_L \otimes_{\mathbb{C}} V(\gamma,n) \to V(\gamma,n)((x))[\log x]$$

を定める．$n=1$ ならば，$V(\gamma,1) = V_{\gamma+L}$ である．$n \geq 2$ ならば，対数項が現れるので当然ながら $V(\gamma,n)$ は V_L 加群ではないのだが，次の問題を考えるのは自然である：

問題. n が一般のとき，$V(\gamma,n)=\bigoplus_{\beta\in\gamma+L}M(1,\Omega(\beta,n))$ に適切な "V_L 加群" 構造を定めることは出来るか？

この問題に対する答えが対数項付き (V,T) 加群である．実際 [3] の格子頂点代数に関する計算を少し改良することにより，$V(\gamma,n)$ が対数項付き $(V_L,1)$ 加群となることを示すことが出来る．また，一般の正の整数 T に対して上記の構成を真似て対数項付き (V_L,T) 加群を構成することが出来る．

格子頂点代数は色々な頂点代数を部分代数として含むので，$V(\gamma,n)$ は色々な頂点代数に対する対数項付き加群の例を与える．

例 4. (1) $\langle\alpha,\alpha\rangle=4$ となる $\alpha\in L$ をとり

$$u=\frac{1}{16}\alpha(-1)^2+\frac{1}{4}(e^{\alpha}+e^{-\alpha})$$

とおくと，$V_L\supset\langle u\rangle\cong L(\frac{1}{2},0)$ (中心電荷 $\frac{1}{2}$ の Virasoro 頂点代数) となる．

(2) $\langle\alpha,\alpha\rangle=2$ となる $\alpha\in L$ をとり

$$v=e^{\alpha}+e^{-\alpha}$$

とおくと，$V_L\supset\langle v\rangle\cong M(1)$ となる．

したがって $V(\gamma,n)$ は，実際に対数項が現れる対数項付き $(L(\frac{1}{2},0),1)$ または $(M(1),1)$ 加群となっている．

また，頂点作用素代数の通常の加群論において基本的である Zhu 代数の類似が構成出来る．

定理 5. T を正の整数，V を $\mathbb{N}$ 次数付き頂点代数としたとき，$\mathbb{C}$ 多元環 $A^{\log,T}(V)$ が存在して次の性質を満たす．

(1) 任意の $(1/T)\mathbb{N}$ 次数付きの対数項付き (V,T) 加群 $M=\bigoplus_{i\in(1/T)\mathbb{N}}M(i)$ に対して，$M(0)$ は $A^{\log,T}(V)$ 加群となる．

(2) 逆に任意の $A^{\log,T}(V)$ 加群 N に対して，$M(0)\cong N$ となる $(1/T)\mathbb{N}$ 次数付きの対数項付き (V,T) 加群 $M=\bigoplus_{i\in(1/T)\mathbb{N}}M(i)$ が存在する．

上の対応は，既約 $A^{T,\log}(V)$ 加群と既約 $(1/T)\mathbb{N}$ 次数付きの対数項付き (V,T) 加群との一対一対応を与える．

Remark 6. 対数項を許すように加群を拡張することは，ここで述べた以外に [4] において，位数が無限の自己同型に対する twisted 加群としてなされている．今回導入した対数項付き加群はその部分的な拡張であるが，前節で定めた対数項付き V_L 加群 $V(\gamma,n)$ は [4] の twisted 加群にはなっていない．

また，$n\geq 2$ のときは $V(\gamma,n)$ は直既約であるが既約ではない．

4 ある行列の行列式の問題

この節においては頂点代数の知識は必要ない．対数項付き加群に対して成り立つある結果があるのだが，以下に記す正方行列が正則であるがことが分かれば，その簡単な別証明を与えることが出来る．行列式がきれいな形をしていそうなのだが，私にはまだ証明出来ていないのでここに載せておく．何か情報をお持ちの方がいたら連絡を下さい．まず

$$(\log(1+x))^i = \Big(\sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^{h+1}}{h} x^h\Big)^i =: i! \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\mathrm{st}}(n,i) x^n$$

で $\widehat{\mathrm{st}}(n,i)$ を定める． $i!\,\widehat{\mathrm{st}}(n,i)/n!$ は第一種 Stirling 数となる．$p, k \in \mathbb{Z}_{>0}$ を固定し

$$\Gamma_i := \begin{pmatrix} \widehat{\mathrm{st}}(1,i) & \widehat{\mathrm{st}}(2,i) & \cdots & \widehat{\mathrm{st}}(p,i) \\ \widehat{\mathrm{st}}(2,i) & \widehat{\mathrm{st}}(3,i) & \cdots & \widehat{\mathrm{st}}(p+1,i) \\ \widehat{\mathrm{st}}(3,i) & \widehat{\mathrm{st}}(4,i) & \cdots & \widehat{\mathrm{st}}(p+2,i) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \widehat{\mathrm{st}}(pk,i) & \widehat{\mathrm{st}}(pk+1,i) & \cdots & \widehat{\mathrm{st}}(p(k+1)-1,i) \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, k,$$

$$\Gamma := (\Gamma_1\ \Gamma_2\ \cdots\ \Gamma_k)\ (pk \times pk \text{ 行列})$$

とおく．計算機による実験から，Γ の行列式は次の形をしていると思われる：

問題.

$$\det \Gamma = (-1)^* \frac{\Big(\prod_{i=1}^{p-1} i!\Big)^{(k+1)^2}}{\prod_{i=1}^{(k+1)p-1} i!} \quad ?$$

$(-1)^*$ の $*$ は整数である．$*$ を明示的に書くことは出来ると思うが，きちんと詰めていない．

$k=1$ の場合は

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{-1}{2} & \cdots & \frac{(-1)^{p+1}}{p} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{(-1)^{p+2}}{p+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} & \cdots & \frac{(-1)^{p+3}}{p+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{(-1)^{p+1}}{p} & \frac{(-1)^{p+2}}{p+1} & \cdots & \frac{(-1)^{2p+2}}{2p-1} \end{pmatrix} \text{ (Hilbert 行列に ± を付けたもの)}$$

となり

$$\det \Gamma = \frac{\Big(\prod_{i=1}^{p-1} i!\Big)^4}{\prod_{i=1}^{2p-1} i!}$$

が成り立つことがよく知られている．

参考文献

[1] R. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **83** (1986), 3068–3071.

[2] C. Dong, Vertex algebras associated with even lattices. *J. Algebra* **161** (1993), 245–265.

[3] I. B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Applied Math., Vol. **134**, Academic Press, 1988.

[4] Y. Z. Huang, Generalized twisted modules associated to general automorphisms of a vertex operator algebra, *Comm. Math. Phys.* **298** (2010), 265–292.

[5] A. Milas, Weak modules and logarithmic intertwining operators for vertex operator algebras. *Recent developments in infinite-dimensional Lie algebras and conformal field theory* (Charlottesville, VA, 2000), 201–225, Contemp. Math., **297**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[6] A. Milas, Logarithmic intertwining operators and vertex operators, *Comm. Math. Phys.* **277** (2008), 497–529.